СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

6 - 6012

Т.Димчев

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ НАБЛЮДЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИИ МИНИМАЛЬНО ИЗМЕРЯЕМОЙ АКТИВНОСТИ

1971

6 - 6012

Т.Димчев

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ НАБЛЮДЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИИ МИНИМАЛЬНО ИЗМЕРЯЕМОЙ АКТИВНОСТИ

Определение необходимого времени измерения образца и фона, а также минимальной измеряемой активности при заданной статистической ошибке позволяет сравнивать возможности различных методов измерения при оптимальных условиях .

Многие авторы при определении оптимального соотношения времени измерения образца и фона /1–4/ опираются на выражение стандартного отклонения и средней статистической ошибки, выведенные на основании предположения, что вероятность регистрации подчиняется распределению Пуассона.

В основе предлагаемого рассмотрения лежит гипотеза о том, что вероятность наличия активности при наблюдаемой скорости регистрации событий распада пробы и фона подчиняется биномиальному распределению. Используя ту же статистическую модель в работе /5/, мы получили общие выражения для средней скорости распада и ее стандартного отклонения:

$$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} + \frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_0}\right) + \frac{e^{-\lambda t_1 - 1}}{t_1} \qquad (1)$$

$$\sigma(A) = \frac{1}{\eta}\sqrt{\left(\frac{\nu_1}{t_1} + \frac{\nu_0}{t_0} + \frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_0^2}\right) + \left(\frac{\nu_1}{t_1} + \frac{1}{t_1^2}\right)\left(e^{-\lambda t_1} - 1\right)\eta}\,, \qquad (2)$$

где ν_1 и ν_0 – наблюдаемые скорости регистрации при измерениях проба+фон и фона; $\nu = \nu_1 - \nu_0$ – наблюдаемая скорость регистрации для образца; t_1 и t_0 – соответствующие времена измерения; η – эффективность регистрации; A – скорость распада в мин$^{-1}$.

В случае, когда период полураспада $T_{1/2}$ изотопа, содержащегося в препарате, много больше времени измерения, т.е. $T_{1/2}$ или $\lambda t_1 \ll 1$, то средняя статистическая ошибка в определении A из (1) и (2):

$$\delta = \frac{1}{\eta}\sqrt{\left(\frac{\nu_1}{t_1}+\frac{\nu_0}{t_0}\right)+\left(\frac{1}{t_1^2}+\frac{1}{t_2^2}\right)}. \tag{3}$$

Если $\frac{1}{t_1} \ll \nu_1$ и $\frac{1}{t_0} \ll \nu_0$, пренебрегая $\frac{1}{t_1^2}$ и $\frac{1}{t_0^2}$ по сравнению с ν_1 и ν_0, из (3) получаем известное выражение для δ, выведенное на основе предположения, что ν подчиняется распределению Пуассона /1/:

$$\delta = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\nu_1}{t_1}+\frac{\nu_0}{t_0}}. \tag{4}$$

Из требования оптимального соотношения для времени имеем /2/:

$$\frac{t_{1m}}{t_{0m}} = \frac{\sqrt{\nu_0}}{\sqrt{\nu_1}}. \tag{5}$$

Минимальная измеряемая активность в этом случае дается выражением, полученным *Putman J. L.* и Фурмановым /3,4/:

$$A_{min} = \frac{1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_m}}{\delta^2 \eta T_m}, \tag{6}$$

где $T_m = t_{1m} + t_{0m}$.

Рассмотрим случай, когда $\lambda t < 1$, так что справедливо приближение $e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t$. Из выражения для δ (2):

$$\delta = \frac{1}{\nu-\lambda\eta}\sqrt{(1-\lambda\eta)\left(\frac{\nu_1}{t_1}+\frac{1}{t_1^2}\right)+\left(\frac{\nu_0}{t_0}+\frac{1}{t_0^2}\right)} \tag{7}$$

при $\frac{1}{t_1} \ll \frac{\nu_1}{t_1}$ и $\frac{1}{t_0} \ll \frac{\nu_0}{t_0}$, получаем:

$$\delta = \frac{1}{\nu - \lambda\eta}\sqrt{(1-\lambda\eta)\frac{\nu_1}{t_1} + \frac{\nu_0}{t_0}}\,. \tag{8}$$

Для общего времени измерения имеем:

$$T = t_1 + t_0\,. \tag{9}$$

Вычислив из формулы (8) $t_1 = f(t_0)$ и подставляя в (9), получаем:

$$T = f(t_0) + t_0.$$

Теперь определим T_{min} при заданной величине δ, приравняв нулю полный дифференциал функции $T = T(f(t_0), t_0)$, т.е.

$$dT = f'(t_0)\,dt_0 + dt_0 = 0.$$

Получаем уравнение:

$$f'(t_0) + 1 = 0. \tag{10}$$

Из выражения (8) имеем:

$$t_1 = \frac{(1-\lambda\eta)\,\nu_1 t_0}{\delta^2(\nu-\lambda\eta)^2 t_0 - \nu_0} = f(t_0), \tag{11}$$

$$f'(t_0) = -\frac{\nu_1\,\nu_0\,(1-\lambda\eta)}{[\delta^2(\nu-\lambda\eta)^2\,t_0 - \nu_0]^2}\,. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10), получаем

$$\delta^4(\nu-\lambda\eta)^4\,t_0^2 - 2\delta^2(\nu-\lambda\eta)^2\,\nu_0\,t_0 + \nu_0^2 - \nu_1\,\nu_0\,(1-\lambda\eta) = 0$$

или

$$t_0^2 - \frac{2\nu_0}{\delta^2(\nu-\lambda\eta)^2}\,t_0 + \frac{\nu_0^2 - \nu_1\,\nu_0\,(1-\lambda\eta)}{\delta^4(\nu-\lambda\eta)^4}\,. \tag{13}$$

Решение полученного квадратного уравнения дается следующим выражением:

$$t_{0_{1,2}} = \frac{1}{\delta^2(\nu-\lambda\eta)^2}\left[\nu_0 \pm \sqrt{\nu_1 \nu_0(1-\lambda\eta)}\right]. \tag{14}$$

Оба решения уравнения – действительные числа, если $\lambda\eta \leq 1$, т.е. если $\frac{1}{\lambda} \geq \eta$ и $\frac{T_{1/2}}{\ln 2} \geq \eta$, что осуществляется на практике, если $T_{1/2} \geq 0{,}692$.

Так как всегда $t_0 > 0$, то нужно взять решение со знаком (+) перед радикалом, т.е.

$$t_{0\,min} = \frac{\nu_0 + \sqrt{\nu_1\nu_0(1-\lambda\eta)}}{\delta^2(\nu-\lambda\eta)^2}. \tag{15}$$

Аналогично из формулы (8), выражая t_0 через t_1 и подставляя в (9), получаем:

$$t_{1\,min} = \frac{(1-\lambda\eta)\nu_1 + \sqrt{\nu_1\nu_0(1-\lambda\eta)}}{\delta^2(\nu-\lambda\eta)^2}. \tag{16}$$

Подставляя (15) и (16) в (9), получаем:

$$T_{min} = \frac{(1-\lambda\eta)\nu_1 + \nu_0 + 2\sqrt{\nu_1\nu_0(1-\lambda\eta)}}{\delta^2(\nu-\lambda\eta)^2}. \tag{17}$$

Кроме того,

$$\frac{t_{1\,min}}{t_{0\,min}} = \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_0}(1-\lambda\eta)}. \tag{18}$$

Используя приближенную формулу: $\sqrt{1-\lambda\eta} \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda\eta$, а также преобразуя выражения (15), (16) и (17), получаем выражения для $t_{0\,min}$, $t_{1\,min}$ и T_{min} в следующем виде:

$$t_{0\,min} = \frac{1}{\delta\nu\left(1-\frac{\lambda\eta}{\nu}\right)^2}(\gamma-1)\left(1-\frac{\gamma}{4\gamma-1}\lambda\eta\right), \tag{19}$$

где

$$\gamma = \frac{\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_0}}}{\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_0}} - 1}, \qquad (20)$$

$$t_{1\,min} = \frac{1}{\delta^2 \nu (1 - \frac{\lambda\eta}{\nu})^2} \left(1 - \lambda\eta + \frac{\gamma - 1}{4\gamma - 2} \lambda\eta\right)\gamma ; \qquad (21)$$

$$T_{min} = \frac{1}{\delta^2 \nu (1 - \frac{\lambda\eta}{\nu})^2} [(2 - \lambda\eta)\gamma - 1]. \qquad (22)$$

Из (19), (21) и (22) можно выразить $t_{0\,min}$ и $t_{1\,min}$ через T_{min} :

$$t_{0\,min} = T_{min} \frac{\gamma - 1}{(2 - \lambda\eta)\gamma - 1} \left(1 - \frac{\gamma}{4\gamma - 2} \lambda\eta\right), \qquad (23)$$

$$t_{1\,min} = T_{min} \frac{\gamma}{(2 - \lambda\nu)\gamma - 1} \left(1 - \lambda\eta + \frac{\gamma - 1}{4\gamma - 2} \lambda\eta\right). \qquad (24)$$

Из (17) и (18) получаем также:

$$\frac{t_{1\,min}}{t_{0\,min}} = \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\eta\right)\gamma , \qquad (25)$$

$$T_{min} = \frac{\left(\sqrt{(1 - \lambda\eta)\,\nu_1} + \sqrt{\nu_0}\right)^2}{\delta^2 (\nu - \lambda\eta)^2} \qquad (26)$$

Подставляя $\nu = \nu_1 - \nu_0$, получаем следующее уравнение для ν

$$\delta^2 T_m \nu^2 - (2\delta^2 T_m \lambda\eta + 2\delta\sqrt{\nu_c T_m} + 1 - \lambda\eta)\nu + \delta^2 T_m \lambda^2\eta^2 + 2\delta\lambda\eta\sqrt{\nu_0 T_m} + \lambda\eta\nu_0 = 0. \qquad (27)$$

Решения этого уравнения даются выражением:

$$\nu_{1,2} = \frac{\delta\sqrt{\nu_0 T_m} + \delta^2 T_m \lambda\eta + \frac{1}{2}(1 - \lambda\eta) \pm \sqrt{1 - \lambda\eta}\,\sqrt{(\delta\sqrt{\nu_0 T_m} + \delta^2 T_m \lambda\eta + \frac{1}{2}(1 - \lambda\eta)) + (\delta^2 \nu_0 T_m - \frac{1 - \lambda\eta}{4})}}{\delta^2 T_m}. \qquad (28)$$

Оба корня – действительные. Так как всегда должно быть $\nu > 0$, нужно взять решение со знаком (+) перед радикалом.

Подставляя приближенное равенство $\sqrt{1 - \lambda\eta} \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda\eta$ в выражение (28), получаем:

$$\nu_{min} = \frac{(2\delta\sqrt{\nu_0 T_m}+1)+(2\delta^2 T_m - 1)\lambda\eta + (1-\frac{1}{2}\lambda\eta)\sqrt{(2\delta\sqrt{\nu_0 T_m}+1)^2+(4\delta^2 T_m - 1)\lambda\eta}}{2\delta^2 T_m} \quad (29)$$

Но в рассматриваемом втором случае $\bar{A} = \frac{\nu - \lambda\eta}{\eta}$. Тогда из (29) получаем:

$$\bar{A}_{min} = \frac{1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_m}+(1-0{,}5\lambda\eta)\sqrt{(1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_m})^2+(4\delta^2 T_m - 1)\lambda\eta} - \lambda\eta}{2\delta^2 \eta T_m} \quad (30)$$

При $T \to \infty$, т.е. при $\lambda \ll 1$, $\bar{A}_{min} \to \frac{1 + 2\delta\sqrt{\nu_0 T_m}}{\delta^2 \eta T_m}$, следовательно, как и надо было ожидать, при $\lambda \ll 1$ минимальная измеряемая активность будет определяться формулой (6), полученной для первого случая.

Выражение (30) дает минимально измеряемую активность в рассматриваемом случае, когда $\lambda t < 1$, при заданных параметрах аппаратуры ν_0 и η, средней статистической ошибке δ и общем времени измерения T, в которое входит время измерения образца и фона, имеющие оптимальное соотношение, согласно формулам (23), (24), (25).

В выражении (30) радикал может быть представлен в виде:

$$(1 + 2\delta\sqrt{\nu_0 T_m})\sqrt{1 + \frac{4\delta^2 T_m - 1}{(1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_m})^2}\lambda\eta}\ . \quad (31)$$

Если выполняется неравенство:

$$\frac{4\delta^2 T_{min} - 1}{(1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}})^2}\lambda\eta \le 1\ , \quad (32)$$

имеем:

$$\sqrt{1+\frac{4\delta^2 T_m-1}{(1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_m})^2}\lambda\eta} \approx 1-\frac{1}{2}\,\frac{4\delta^2 T_m-1}{(1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_m})^2}\lambda\eta . \tag{33}$$

Неравенство (33) выполняется, если $\lambda \leq \frac{\nu_0}{\eta}$. Подставляя (34) в (31), получаем для A_{min} приближенное выражение:

$$\bar{A}_{min} = \frac{3}{2}\,\frac{1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_m}}{\delta^2\eta T_m} + \{\frac{(2-\lambda\eta)(4\delta^2 T_m-1)}{4\delta^2 T_m(1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_m}} - \frac{1+\delta\sqrt{\nu_0 T_m}}{\delta^2 T_m}\}\lambda . \tag{34}$$

Пренебрегая членами, содержащими $\lambda^2\eta \ll 1$, получаем:

$$\bar{A}_{min} = \frac{3}{2}\,\frac{1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_m}}{\delta^2\eta T_m} + \{\frac{4\delta^2 T_m-1}{2\delta^2 T_m(1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_m}} - \frac{1+\delta\sqrt{\nu_0 T_m}}{\delta^2 T_m}\}\lambda . \tag{35}$$

Рассмотрим случай, когда $t \gg T_{1/2}$, т.е. $\lambda t \to \infty$. В этом случае из работы /5/ для активности и средней статистической ошибки имеем:

$$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} + \frac{1-\eta}{\eta}\,\frac{1}{t_1} - \frac{1}{\eta}\,\frac{1}{t_0}, \tag{36}$$

$$\delta = \frac{1}{\nu-(1-\eta)\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_0}}\sqrt{(1-\eta)(\frac{\nu_1}{t_1}+\frac{1}{t_1^2})+(\frac{\nu_0}{t_0}+\frac{1}{t_0^2})}. \tag{37}$$

Принимая $\frac{\nu}{\eta} \gg \frac{1-\eta}{\eta}\cdot\frac{1}{t_1}$ и $\frac{\nu}{\eta} \gg \frac{1}{\eta}\cdot\frac{1}{t_0}$, а также:

$$\frac{\nu_1}{t_1} \gg \frac{1}{t_1^2} \qquad \frac{\nu_0}{t_0} \gg \frac{1}{t_0^2}, \tag{38}$$

получаем:

$$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} \qquad \delta = \frac{1}{\nu}\sqrt{(1-\eta)\frac{\nu_1}{t_1}+\frac{\nu_0}{t_0}}. \tag{39}$$

Из последней формулы, выражая t_0 через t_1 и t_1 через t_0, получаем:

$$t_1 = \frac{(1-\eta)\,\nu_1 t_0}{\delta^2\nu^2 t_0 - \nu_0} \qquad\qquad t_0 = \frac{\nu_0 t_1}{\delta^2\nu^2 t_1 - (1-\eta)\,\nu_1}\,. \tag{40}$$

Производя последовательно соответствующие подстановки в $T = t_1 + t_0$, из $dT = 0$, получаем:

$$t_{1\,min} = \frac{(1-\eta)\nu_1 + \sqrt{(1-\eta)\,\nu_1\nu_0}}{\delta^2\nu^2}\,, \tag{41}$$

$$t_{0\,min} = \frac{\nu_0 + \sqrt{(1-\eta)\,\nu_0\,\nu_1}}{\delta^2\,\nu^2}\,, \tag{42}$$

$$T_{min} = \frac{(1-\eta)\,\nu_1 + \nu_0 + 2\sqrt{(1-\eta)\,\nu_0\nu_1}}{\delta^2\nu^2}\,. \tag{43}$$

Из (41) и (42) получаем:

$$\frac{t_{1\,min}}{t_{0\,min}} = \frac{\sqrt{(1-\eta)\,\nu_1}}{\sqrt{\nu_0}}\,. \tag{44}$$

Использовав соотношение $\sqrt{1-\eta} \approx 1 - \frac{1}{2}\eta$ для случая $\eta < 1$, преобразовываем выражения (41), (42), (43) и (44) к виду:

$$t_{0\,min} = \frac{1}{\delta^2\nu}(\gamma - 1)\left(1 - \frac{\gamma}{4\gamma - 2}\,\eta\right), \tag{45}$$

$$t_{1\,min} = \frac{1}{\delta^2\nu}\left(1 - \eta - \frac{\gamma - 1}{4\gamma - 2}\,\eta\right)\gamma\,, \tag{46}$$

$$T_{min} = \frac{1}{\delta^2\nu}\,[(2-\eta)\,\gamma - 1]\,. \tag{47}$$

Используя (45), (46) и (47), выражаем $t_{0\,min}$ и $t_{1\,min}$ через T_{min}:

$$t_{0\,min} = T_{min} \frac{\gamma - 1}{(2-\eta)\gamma - 1} \left(1 - \frac{\gamma}{4\gamma - 2} \eta\right), \tag{48}$$

$$t_{1\,min} = T_{min} \frac{\gamma}{(2-\eta)\gamma - 1} \left(1 - \eta + \frac{\gamma - 1}{4\gamma - 2} \eta\right). \tag{49}$$

Из (44) получаем также:

$$\frac{t_{1\,min}}{t_{0\,min}} = \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right)\gamma.. \tag{50}$$

Выражение (43) можно записать в виде:

$$T_{min} = \frac{\left(\sqrt{(1-\eta)\nu_1} + \sqrt{\nu_0}\right)^2}{\delta^2 \nu^2}. \tag{51}$$

Подставляя $\nu_1 = \nu + \nu_0$, получаем следующее уравнение для

$$\delta^2 T_{min} \nu^2 - \left(2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}} + 1 - \eta\right)\nu + \eta\nu_0 = 0. \tag{52}$$

Решения уравнения (52) дается выражением:

$$\nu_{1,2} = \frac{(2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}} + 1) - \eta \pm (\sqrt{1-\eta})\sqrt{(2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}} + 1)^2 - \eta}}{2\delta^2 T_{min}}. \tag{53}$$

Оба решения действительные, если $\eta < (2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}} + 1)^2$. Так как должно быть $\nu > 0$, берем решение со знаком (+) перед радикалом:

$$\nu_{min} = \frac{(2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}} + 1) - \eta + (1 - \frac{1}{2}\eta)\sqrt{(1 + 2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}})^2 - \eta}}{2\delta^2 T_{min}}. \tag{54}$$

Имея в виду (39), получаем:

$$\bar{A}_{min} = \frac{(1 + 2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}}) + (1 - \frac{1}{2}\eta)\sqrt{(1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}})^2 - \eta} - \eta}{2\delta^2 \eta T} . \quad (55)$$

Так как $\frac{\eta}{(1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}})^2} < 1$, разлагаем радикал в ряд до членов второй степени и получаем:

$$\bar{A}_{min} = (1-0,25\eta)\frac{1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}}}{\delta^2\eta T_{min}} - \left(\frac{1+\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}}}{2\delta^2 T_{min}} + \frac{1-0,5\eta}{4\delta^2 T_{min}(1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}})}\right), \quad (56)$$

где

$$(1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}})\left(1 - \frac{\eta}{(1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}})}\right)^{1/2} = \frac{2(1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}})^2 - \eta}{2(1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}})} . \quad (57)$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda t \approx 1$. Из работы /5/ имеем:

$$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} + \frac{1-0,632}{\eta}\cdot\frac{1}{t_1} - \frac{1}{\eta t_0} . \quad (58)$$

$$\delta = \frac{1}{\nu + (1-0,632\eta)\frac{1}{t_1} - \frac{1}{\eta t_0}}\sqrt{(1-0,632\eta)\left(\frac{\nu_1}{t_1} + \frac{1}{t_1^2}\right) + \left(\frac{\nu_0}{t_0} + \frac{1}{t_0^2}\right)} . \quad (59)$$

Если пренебречь $\frac{1-0,632\eta}{\eta t_1}$ и $\frac{1}{\eta t_0}$ по сравнению с $\frac{\nu}{\eta}$, и $\frac{1}{t_1^2}$ и $\frac{1}{t_0^2}$ по сравнению с $\frac{\nu_1}{t_1}$ и $\frac{\nu_0}{t_0}$ соответственно, получаем упрощенное выражение:

$$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{1}{\nu}\sqrt{(1-0,632\eta)\frac{\nu_1}{t_1} + \frac{\nu_0}{t_0}} . \quad (60)$$

Аналогично, для $t_{1\,min}$, $t_{0\,min}$, T_{min} и A_{min} получаем:

$$t_{1\,min} = \frac{(1-0{,}632\,\eta)\,\nu_1 + \sqrt{(1-0{,}632\,\eta)\,\nu_1\nu_0}}{\delta^2\nu^2}, \qquad (61)$$

$$t_{0\,min} = \frac{\nu_0 + \sqrt{(1-0{,}632\,\eta)\,\nu_0\,\nu_1}}{\delta^2\nu^2}, \qquad (62)$$

$$T_{min} = \frac{(1-0{,}632)\,\nu_1 + \nu_0 + 2\sqrt{(1-0{,}632\,\eta)\,\nu_1\nu_0}}{\delta^2\nu^2}, \qquad (63)$$

$$\frac{t_{1\,min}}{t_{0\,min}} = \sqrt{(1-0{,}632\,\eta)\,\frac{\nu_1}{\nu_0}}. \qquad (64)$$

Используя выражение $\sqrt{1-0{,}632\,\eta} \approx 1-0{,}316\,\eta$, получаем:

$$t_{0\,min} = T_{min}\,\frac{\gamma-1}{(2-0{,}632\,\eta)\,\gamma-1}\,\left(1-\frac{\gamma}{4\gamma-2}\,0{,}632\,\eta\right), \qquad (65)$$

$$t_{1\,min} = T_{min}\,\frac{\gamma}{(2-0{,}632\,\eta)\,\gamma-1}\,\left(1-0{,}632\,\eta+\frac{\gamma-1}{4\gamma-2}\,0{,}632\,\eta\right), \qquad (66)$$

$$\frac{t_{1\,min}}{t_{0\,min}} = (1-0{,}316\,\eta)\,\gamma, \qquad (67)$$

$$\bar{A}_{min} = (1-0{,}158\eta)\,\frac{1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}}}{\delta^2\eta\,T_{min}} - \left\{\frac{1+\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}}}{2\delta^2 T_{min}} + \frac{1-0{,}316\eta}{4\delta^2 T_{min}(1+\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}})}\right\} \qquad (68)$$

Если пренебречь $0{,}158\,\eta \ll 1$ и $0{,}316\eta \ll 1$, получим

$$\bar{A}_{min} = \frac{1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}}}{\delta^2\eta\,T_{min}} - \left(\frac{1+\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}}}{2\delta^2 T_{min}} + \frac{1}{4\delta^2 T_{min}(1+2\delta\sqrt{\nu_0 T_{min}})}\right). \qquad (69)$$

Выражения (6), (29), (55) и (68) дают средние величины для минимальной измеряемой активности $\bar{A}_{min}$ соответственно для всех четырех рассмотренных случаев. При этом использованное в нашем выводе выражение для средней статистической ошибки дается формулой $\delta = \frac{\sigma(A)}{\bar{A}}$.

Истинная величина A_{min} с вероятностью a находится в доверительном интервале $[\bar{A}_{min} - \sigma(A_{min}), \bar{A}_{min} - \sigma(A_{min})]$. Рассмотрим доверительный интервал:

$$[\bar{A}_{min} - K_a \cdot \sigma(A_{min}), \bar{A}_{min} + K_a \cdot \sigma(A_{min})], \tag{70}$$

где коэффициент K_a связан с доверительной вероятностью a. Если выразить $\sigma(A_{min})$ через δ, т.е. $\sigma(A_{min}) = \bar{A}_{min}\delta$, из (70) получим:

$$[\bar{A}_{min} - \bar{A}_{min} K_a \delta, \bar{A}_{min} + \bar{A}_{min} K_a \delta]. \tag{71}$$

Чтобы было $A_{min} \geq 0$, нужно $0 \leq K_a \delta \leq 1$. Примем $K_a\delta = 1$, тогда из (71) получим, что доверительный интервал, в котором с вероятностью a находится истинная величина A_{min} есть $[0, 2A]$.

Заменяя в выражении для $\bar{A}_{min}$, δ на $\frac{1}{K_a}$, мы можем определить в рассматриваемых случаях верхние границы доверительного интервала при заданной доверительной вероятности (надежности), если известна связь между K_a и a.

Из выражения (6) для первого случая получаем соответственно:

$$\bar{A}_{min} = \frac{K_a^2 + 2K_a\sqrt{\nu_0 T_{min}}}{\eta T_{min}}. \tag{72}$$

Такое выражение получено в /6/, но там не рассматриваются ограничения, которые накладываются на доверительный интервал предположением $K_a\delta = 1$.

Из выражения (30) для второго случая получаем:

$$\bar{A}_{min} = \frac{K_a^2 + 2K_a\sqrt{\nu_0 T_{min}} + (1-0{,}5\lambda\eta)\sqrt{(K_a^2 + 2K_a\sqrt{\nu_0 T_{min}})^2 + (4K_a^2 T_{min} - K_a^4)\lambda\eta} - \lambda\eta K_a^2}{2\eta T_{min}}. \tag{73}$$

Из (34) следует:

$$\bar{A}_{min} = \frac{3}{2}\,\frac{K_a^2 + 2K_a\sqrt{\nu_0 T_{min}}}{\eta\, T_{min}} +$$

$$+ \left\{ \frac{(2-\lambda\eta)(4T_{min} - K_a^2)}{4T_{min}(K_a + 2\sqrt{\nu_0 T_{min}})} - \frac{K_a + \sqrt{\nu_0 T_m}}{T_m} \right\} \lambda K_a . \tag{74}$$

Рассматривая (35), получаем:

$$\bar{A}_{min} = \frac{3}{2}\,\frac{K_a^2 + 2K_a\sqrt{\nu_0 T_{min}}}{\eta\, T_{min}} +$$

$$+ \left\{ \frac{4T_{min} - K_a^2}{2T_{min}(K_a + \sqrt{\nu_0 T_{min}})} - \frac{K_a + \sqrt{\nu_0 T_{min}}}{T_{min}} \right\} \lambda K_a . \tag{75}$$

Для третьего случая из выражения (55) имеем:

$$\bar{A}_{min} = \frac{K_a^2 + 2K_a\sqrt{\nu_0 T_{min}} + (1-0{,}5\eta)\sqrt{(K_a^2 + K_a \nu_0 T_{min})^2 - K_a^4 \eta} - \eta K_a^2}{2\eta\, T_{min}} . \tag{76}$$

Из (57) следует:

$$\bar{A}_{min} = (1-0{,}25\,\eta)\,\frac{K_a^2 + 2K_a\sqrt{\nu_0 T_{min}}}{\eta\, T_{min}} -$$

$$- \left\{ \frac{K_a^2 + K_a\sqrt{\nu_0 T_{min}}}{2T_{min}} + \frac{(1-0{,}5\eta)K_a^3}{4T_{min}(K_a + 2\sqrt{\nu_0 T_{min}})} \right\}. \tag{77}$$

Аналогично, из выражений (68) и (69) получаем соответственно

$$\bar{A}_{min} = (1-0{,}158\,\eta)\,\frac{K_a^2 + 2K_a\sqrt{\nu_0 T_{min}}}{\eta\, T_{min}} -$$

$$- \left\{ \frac{K_a^2 + K_a\sqrt{\nu_0 T_{min}}}{2T_{min}} + \frac{(1-0{,}316)K_a^3}{4T_{min}(K_a + 2\sqrt{\nu_0 T_{min}})} \right\}, \tag{78}$$

$$\bar{A}_{min} = \frac{K_a^2 + 2K_a\sqrt{\nu_0 T_{min}}}{\eta\, T_{min}} - \left\{ \frac{K_a^2 + K_a\sqrt{\nu_0 T_{min}}}{2T_{min}} + \frac{K_a^3}{4T_{min}(K_a + 2\sqrt{\nu_0 T_{min}})} \right\}. \tag{79}$$

В тех случаях, когда рассматривается нормальное распределение, при величинах K_a : 1,000; 1,645; 1,960; 2,576; 3,291 доверительная вероятность (надежность) a имеет величины соответственно: 0,683; 0,900; 0,950; 0,9975; и 0,999.

Если при измерении фона количество наблюдаемых событий меньше 20, для оценки доверительного интервала могут использоваться коэффициенты Стьюдента, учитывающие ограниченность наблюдения. Тогда, заменяя в (70) и (71) $K_a = t_a$, получаем соответственно:

$$[\bar{A}_{min} - t_a \sigma(A_{min}),\ \bar{A}_{min} + t_a \sigma(A_{min})]. \tag{80}$$

$$[\bar{A}_{min} - t_a \delta \bar{A}_{min},\ \bar{A}_{min} + t_a \delta \bar{A}_{min}]. \tag{81}$$

По заданной доверительной вероятности a из соответствующих таблиц можно найти величину t_a.

Выведенные выражения для минимальной определяемой активности позволяют объективно оценивать чувствительность метода измерения, когда известна эффективность η и фоновый эффект ν_0.

На рис. 1–10 даны кривые зависимости $A_{min} = f(T_{min})$ для случаев 11 и 111 при различных величинах ν_0, η, δ и K_a.

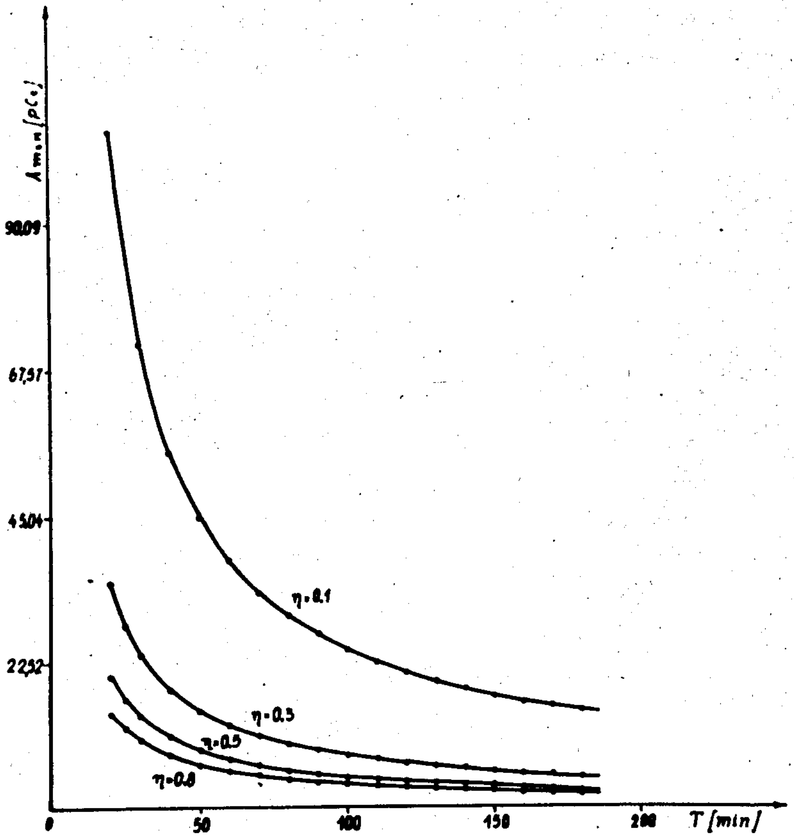
Формулы, позволяющие определять необходимый интервал времени на основе предварительных данных о наблюдаемой скорости регистрации, могут найти практическое применение при определении эффективности применяемых методов измерения.

Литература

1. В.И. Гольданский и др. в кн. "Статистика отсчетов при регистрации ядерных частиц", М., Физматгиз, гл. II , (1959).
2. D.E. Watt, D. Ramsden. "High Sensitivity Counting Techniques", Oxford-London, Pergamon Press, I P., (1964).
3. J.L. Putman. Intern. J. Appl. Radiation and Isotopes, 13, 99(1962).

4. А.О. Фурман, Е.И. Кабазев. Изв. Тимирязевск.с.-х Акад., 5,195(1962).
5. Т.В. Димчев. Препринт ОИЯИ, Дубна 16-6011 (1971).
6. Ch. Kambourov. Rep. SG-AE-33-2, Reaktorzentrum Seibersdorf, 4, 9 (1965).

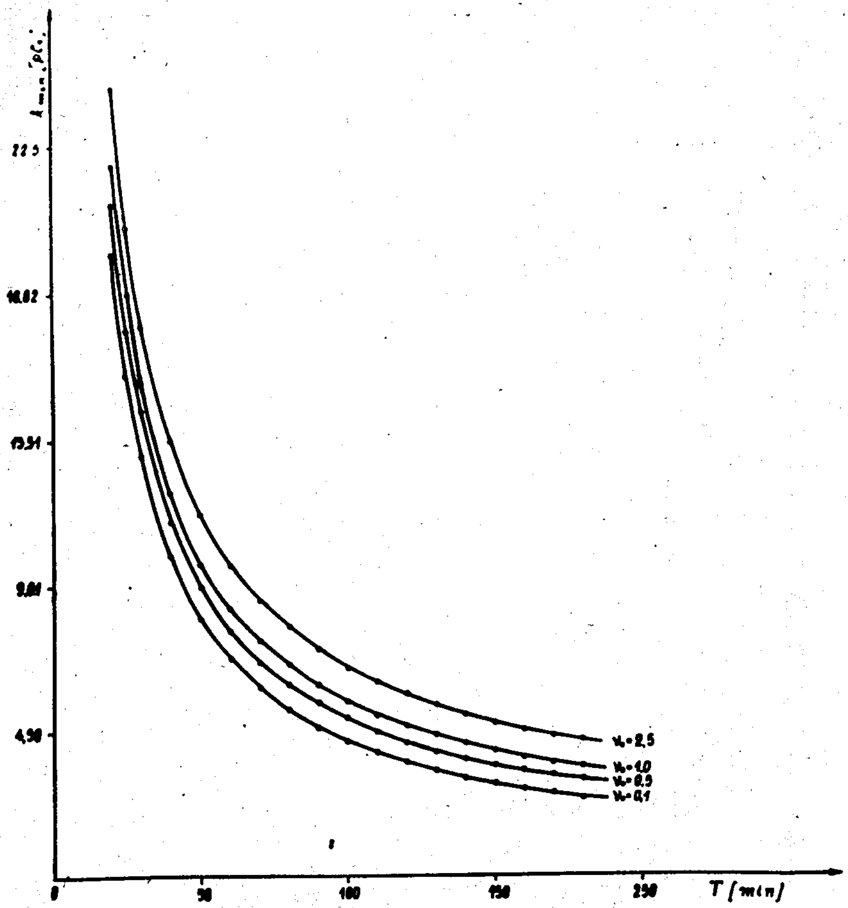
Рукопись поступила в издательский отдел
26 сентября 1971 года.



$V_0 = 0.5 \qquad \delta = 5\,\% \qquad \lambda = 0{,}01$

$$\Lambda_{min} = \frac{1 + 2\delta\sqrt{V_0 T_m} + (1 - 0.5\lambda\eta)\sqrt{\left(1 + 2\delta\sqrt{V_0 T_m}\right)^2 + \left(4\delta^2 T_m - 1\right)\lambda\eta} - \lambda\eta}{2\delta^2 \eta T_m}$$

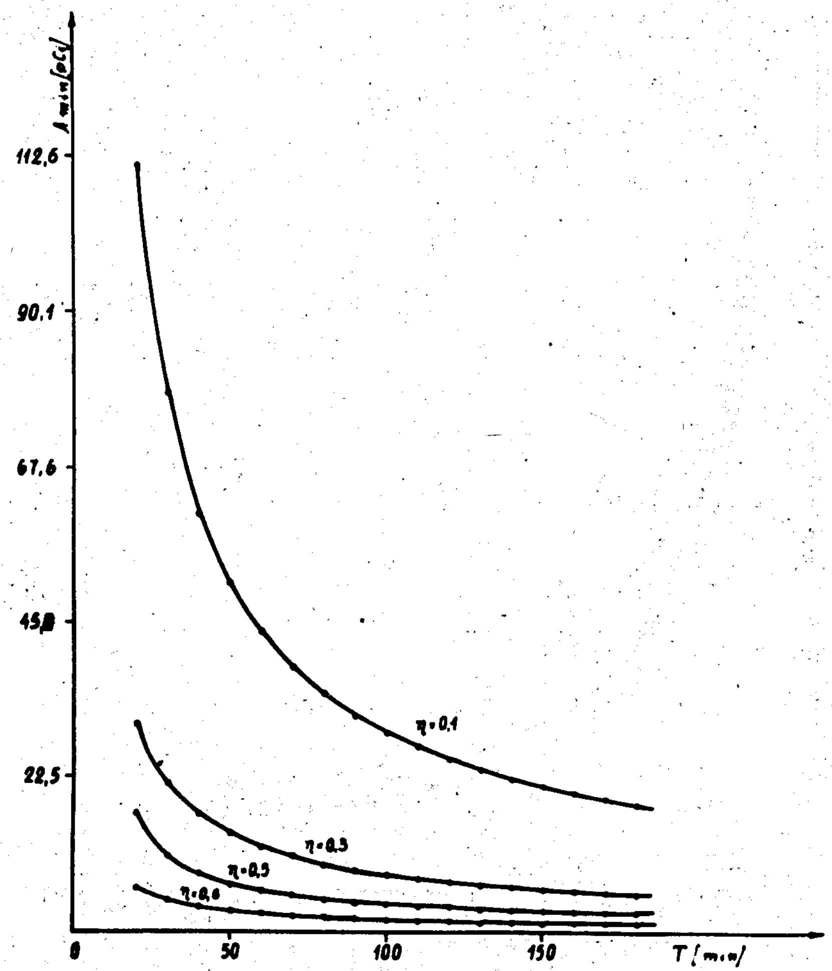
Рис. 1.



$\eta = 0.5 \quad \delta = 5\% \quad \lambda = 0.01$

$$\lambda_{min} = \frac{1 + 2\delta\sqrt{V_0 T_m} + (1 - 0.5\lambda\eta)\sqrt{(1 + 2\delta\sqrt{V_0 T_m})^2 + (4\delta^2 T_m - 1)\lambda\eta} - \lambda\eta}{2\delta^2 \eta T_m}$$

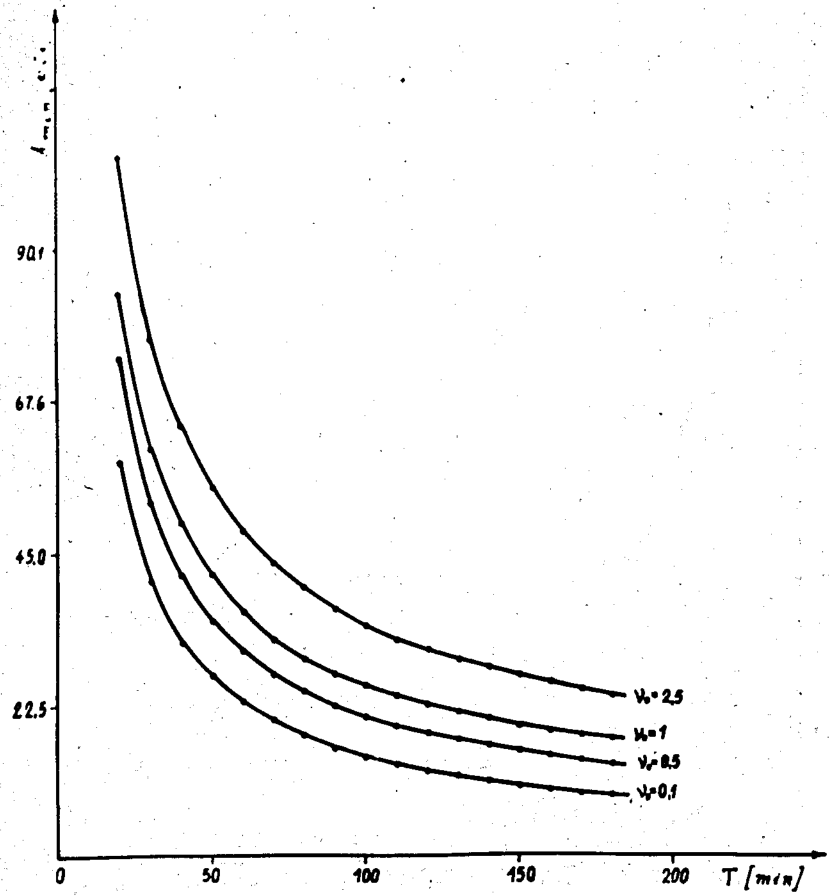
Рис. 2.



$v_\sigma = 0{,}5 \quad \delta = 5\%$

$$\lambda_{min} = \frac{\left(1+2\delta\sqrt{v_\sigma T_m}\right) + \left(1-0.5\eta\right)\sqrt{\left(1+2\delta\sqrt{v_\sigma T_m}\right)^2 - \eta} - \eta}{2\delta^2 \eta T_m}$$

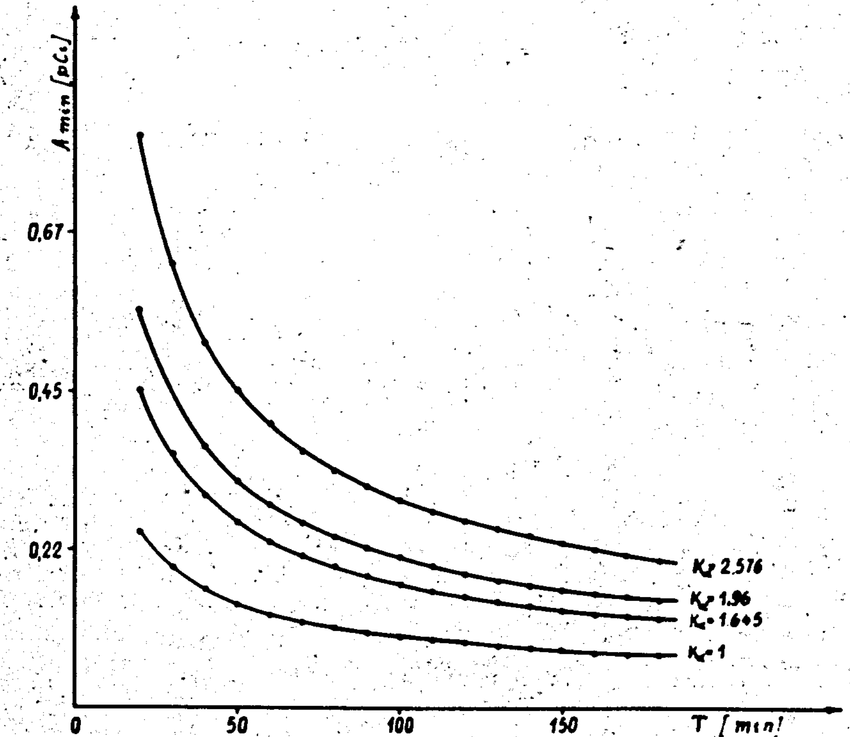
Рис. 3.



$\eta = 0.5 \quad \delta = 5\,\%$

$$A_{min} = \frac{1 + 2\delta\sqrt{\nu_0 T_m} + (1 - 0.5\eta)\sqrt{(1 + 2\delta\sqrt{\nu_0 T_m})^2 - \eta} - \eta}{2\delta^2 \eta T_m}$$

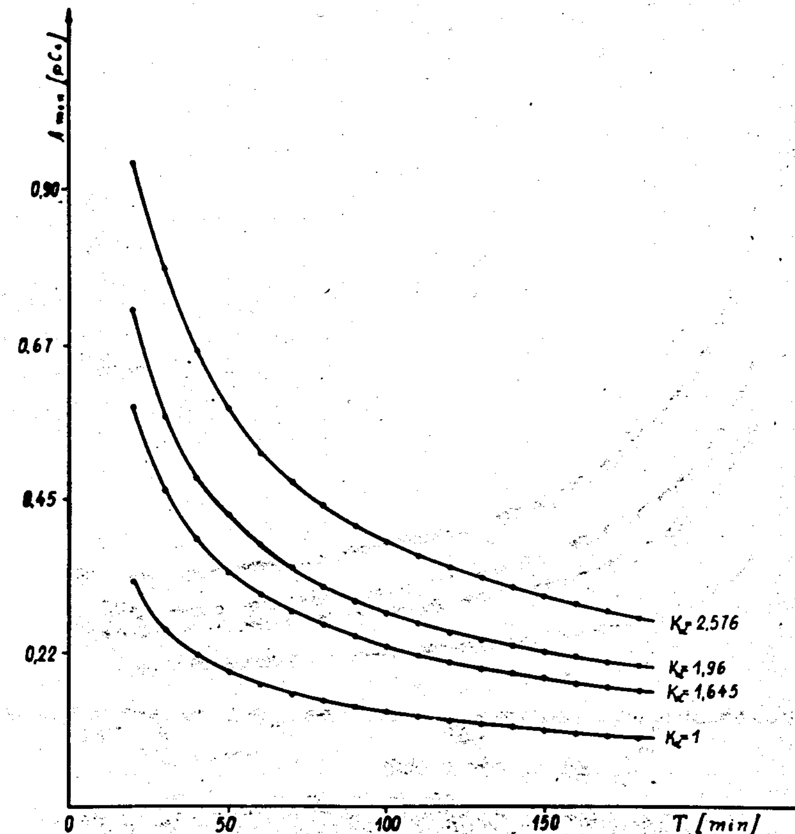
Рис. 4.



$$\eta = 0.5 \quad V_0 = 0.25 \quad \lambda = 0.01$$

$$A_{min} = \frac{K_\alpha^2 + 2K_\alpha\sqrt{V_0 T m} + (1-0.5\lambda\eta)\sqrt{(K_\alpha^2 + 2K_\alpha\sqrt{V_0 T m})^2 + (4K_\alpha^2 T m - K_\alpha^4)\lambda\eta} - \lambda\eta K_\alpha^2}{2\eta T m}$$

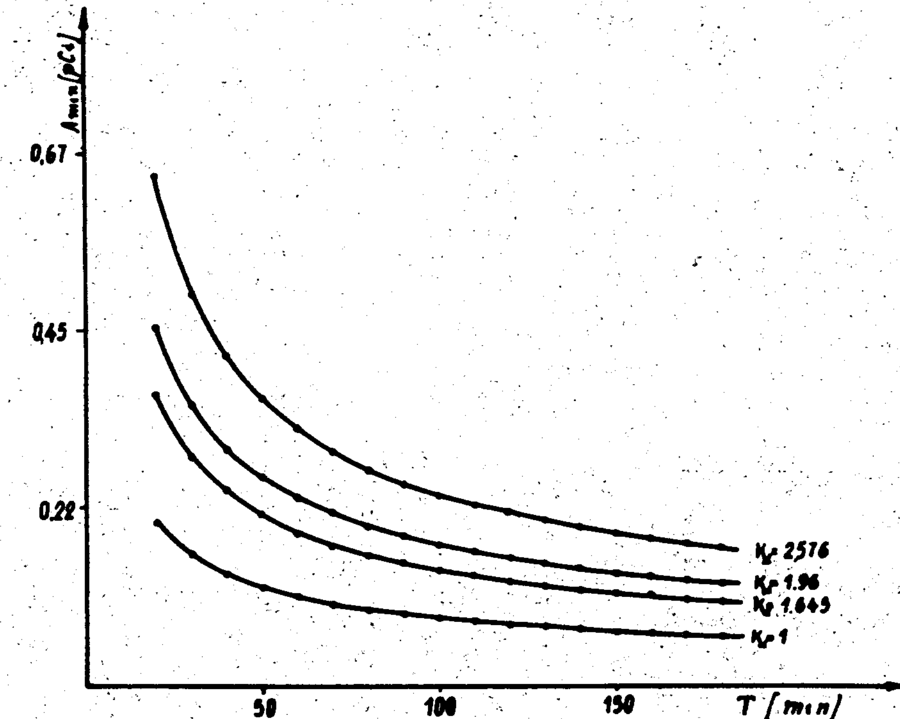
Рис. 5.



$$\eta = 0.5 \quad V_0 = 0.5 \quad \lambda = 0.01$$

$$A_{min} = \frac{K_\alpha^2 + 2K_\alpha\sqrt{V_0 T m} + (1-0.5\lambda\eta)\sqrt{(K_\alpha^2 + 2K_\alpha\sqrt{V_0 T m})^2 + (4K_\alpha^2 T m - K_\alpha^4)\lambda\eta} - \lambda\eta K_\alpha^2}{2\eta T m}$$

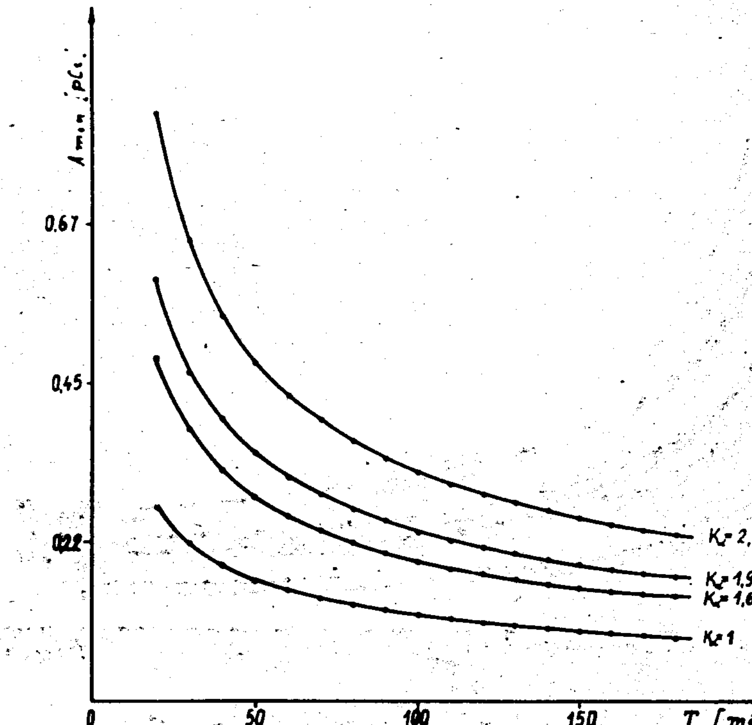
Рис. 6.



$\eta = 0.8 \quad \nu_0 = 0.5 \quad \lambda = 0.01$

$$A_{min} = \frac{K_\alpha^2 + 2K_\alpha\sqrt{\nu_0 T_m} + (1-0.5\lambda\eta)\sqrt{\left(K_\alpha^2 + 2K_\alpha\sqrt{\nu_0 T_m}\right)^2 + \left(4K_\alpha^2 T_m - K_\alpha^4\right)\lambda\eta} - \lambda\eta K_\alpha^2}{2\eta T_m}$$

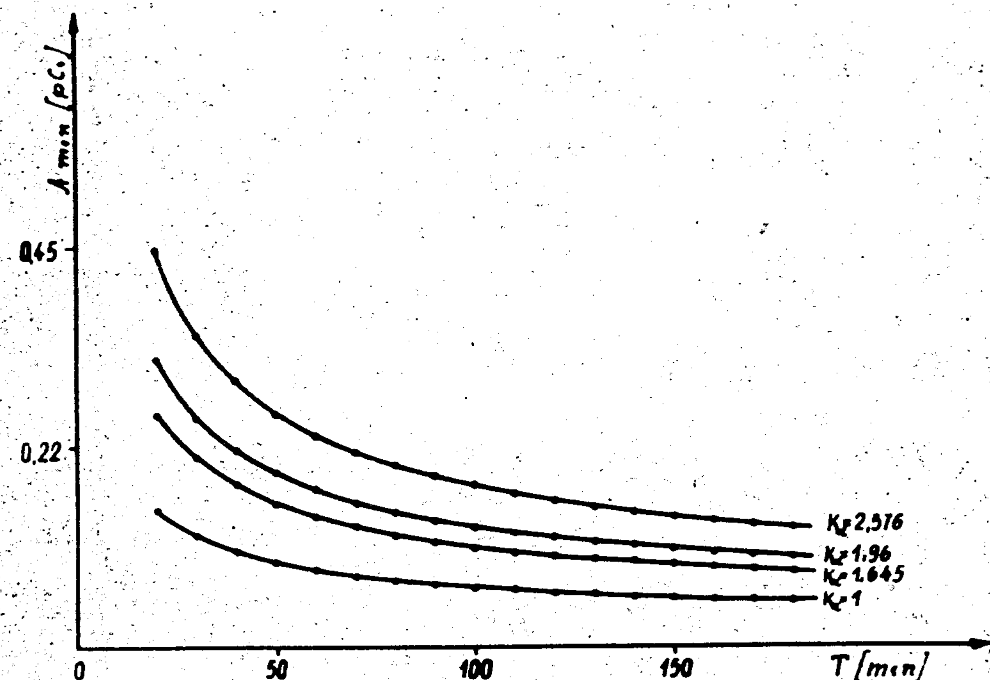
Рис. 7.



$\eta = 0{,}5 \quad \nu_0 = 0{,}5$

$$A_{min} = \frac{K_\alpha^2 + 2K_\alpha\sqrt{\nu_0 T_m} + (1-0{,}5\eta)\sqrt{\left(K_\alpha^2 + 2K_\alpha\sqrt{\nu_0 T_m}\right)^2 - K_\alpha^4\eta} - \eta K_\alpha^2}{2\eta T_m}$$

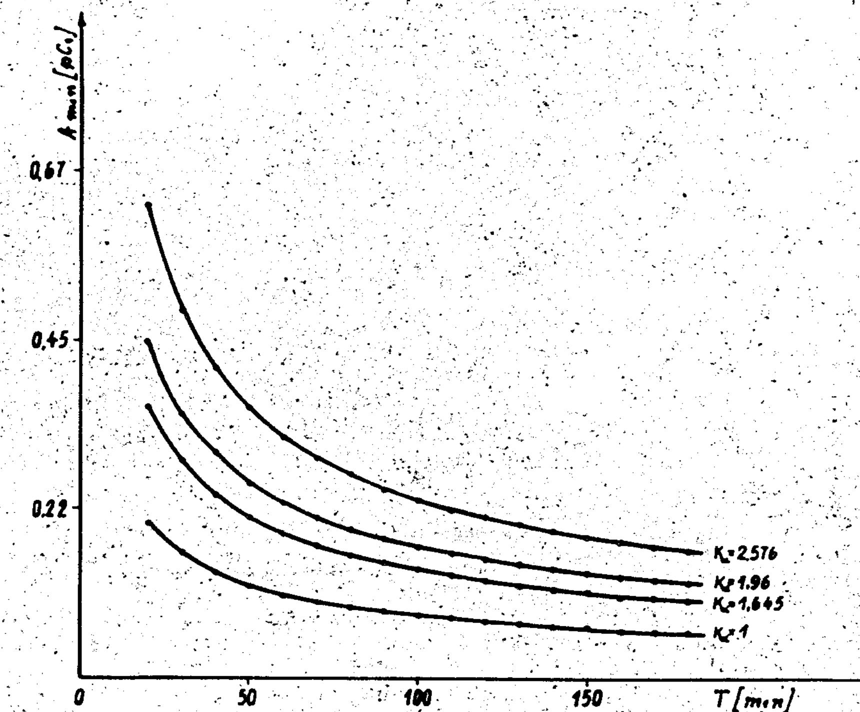
Рис. 8.



$\eta = 0.8 \quad \nu_0 = 0.5$

$$A_{min} = \frac{K_\alpha^2 + 2K_\alpha\sqrt{\nu_0 T_m} + (1-0.5\eta)\sqrt{(K_\alpha^2 + 2K_\alpha\sqrt{\nu_0 T_m})^2 - K_\alpha^4\eta} - K_\alpha^2\eta}{2\eta T_m}$$

Рис.9.



$\eta = 0.5 \quad \nu_0 = 0.25$

$$A_{min} = \frac{K_\alpha^2 + 2K_\alpha\sqrt{\nu_0 T_m} + (1-0.5\eta)\sqrt{(K_\alpha^2 + 2K_\alpha\sqrt{\nu_0 T_m})^2 - K_\alpha^4\eta} - \eta K_\alpha^2}{2\eta T_m}$$

Рис. 10.