6-6011

Т. Димчев

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СКОРОСТИ РАСПАДА АТОМНЫХ ЯДЕР И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИ НИЗКОФОНОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

6-6011

Т. Димчев

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СКОРОСТИ РАСПАДА АТОМНЫХ ЯДЕР И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИ НИЗКОФОНОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Статистический характер распадов ядер и регистрации этих событий в большой степени обуславливает методы оценки величин, связанных с определением радиоактивности.

Рассмотрение самопроизвольных распадов как независимых событий позволяет использовать биномиальное распределение для определения вероятности распада m ядер за время t, если первоначальное число ядер N_0, и все ядра имеют одинаковую вероятность распада λ /1-3/:

$$W(N_0;m)=\frac{N_0!}{(N_0-m)!\,m!}[P(\lambda;t)]^m[1-P(\lambda;t)]^{N_0-m}, \tag{1}$$

где
$$P(\lambda;t)=1-e^{-\lambda t} \quad - \tag{2}$$

вероятность того, что ядро распадается за время t при константе распада λ. $P(\lambda;t)$ является решением уравнения:

$$P(\lambda;t)=\int_0^t[1-P(\lambda;\tau)]\lambda d\tau. \tag{3}$$

Из формул (1) и (2) получаем:

$$W(N_0;m)=\frac{N_0!}{(N_0-m)!\,m!}(1-e^{-\lambda t})^m(e^{-\lambda t})^{N_0-m}. \tag{4}$$

Пусть p – вероятность того, что одно ядро распадается и будет зарегистрировано за время t, а η – вероятность регистрации одного распада, тогда:

$$p=\eta P(\lambda;t). \tag{5}$$

Вероятность того, что за время t будет регистрироваться n событий распада, дается выражением:

$$W(N_0;n)=\frac{N_0!}{(N_0-n)!\,n!}\,p^n(1-p)^{N_0-n}. \tag{6}$$

При определении неизвестной активности интересно определить вероятность того, что источник содержит число ядер, равное N_0, если за время t регистрируется n событий распада. Обозначим эту вероятность $V(n;N_0)$. Ее можно получить с помощью теоремы Бейса:

$$V(n;N_0)=\frac{A(N_0)W(N_0;n)}{\sum\limits_{N_0=n}^{\infty}A(N_0)W(N_0;n)}, \tag{7}$$

где $A(N_0)$ - априорная вероятность того, что число ядер в источнике N_0, не зависит от числа распадов за время t. Считая все величины N_0 равновероятными, получаем:

$$V(n;N_0)=\frac{W(N_0;n)}{\sum\limits_{N_0=n}^{\infty}W(N_0;n)}=\frac{\dfrac{N_0!}{(N_0-n)!\,n!}\,p^n(1-p)^{N_0-n}}{\sum\limits_{N_0=n}^{\infty}\dfrac{N_0!}{(N_0-n)!\,n!}\,p^n(1-p)^{N_0-n}}$$

или

$$V(n;N_0)=\frac{N_0!}{(N_0-n)!\,n!}\,p^{n+1}(1-p)^{N_0-n}. \tag{8}$$

Для средней величины N_0 при n наблюдаемых распадах за время t имеем:

$$\bar{N}_0=\sum_{N_0=n}^{\infty}N_0V(n;N_0)=\sum_{N_0=n}^{\infty}N_0\frac{N_0!}{(N_0-n)!\,n!}\,p^{n+1}(1-p)^{N_0-n}. \tag{9}$$

После соответствующих преобразований получаем:

$$\bar{N}_0=\frac{n+1-p}{p}. \tag{10}$$

Заменяя p из (2) и (5), получаем:

$$\bar{N}_0 = \frac{n + 1 - \eta + \eta e^{-\lambda t}}{\eta (1 - e^{-\lambda t})} . \qquad (11)$$

При n наблюдаемых распадов за время t вероятное число распадов за время t равно:

$$N = N_0 P(\lambda ; t) = N_0 (1 - e^{-\lambda t}),$$

тогда

$$\bar{N} = \overline{N_0 P(\lambda ; t)} = \bar{N}_0 (1 - e^{-\lambda t})$$

или

$$\bar{N} = \frac{n + 1 - \eta + \eta e^{-\lambda t}}{\eta} . \qquad (12)$$

При n "наблюдаемых" распадов за время t вероятная скорость распада:

$$A = \frac{N}{t} . \qquad (13)$$

Средняя величина скорости распада:

$$\bar{A} = \frac{n + 1 - \eta + \eta e^{-\lambda t}}{t \eta} \qquad (14)$$

или

$$\bar{A} = \frac{n}{t \eta} + \frac{1 - \eta + \eta e^{-\lambda t}}{t \eta} . \qquad (15)$$

Обозначив $\nu = \frac{n}{t}$, получим из (15):

$$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} + \frac{1 - \eta + \eta e^{-\lambda t}}{t \eta} . \qquad (16)$$

Дисперсия N_0 равна:

$$\sigma^2(N_0) = \overline{N_0^2} - \bar{N}_0^2, \tag{17}$$

или

$$\overline{N_0^2} = \sum_{N_0=n}^{\infty} N_0 V(n; N_0) = \sum_{N_0=n}^{\infty} N_0^2 \frac{N_0!}{(N_0-n)!\, n!} p^{n+1} (1-p)^{N_0-n}. \tag{18}$$

После соответствующих преобразований получаем:

$$\overline{N_0^2} = \frac{(n+2)(n+1)}{p^2} - 3\frac{n+1}{p} + 1; \quad \bar{N}_0^2 = \frac{(n+1)^2}{p^2} - 2\frac{n+1}{p} + 1. \tag{19}$$

Подставляя полученные величины $\bar{N}_0^2$ и $\overline{N_0^2}$ в (16), получаем:

$$\sigma^2(N_0) = \frac{n+1}{p^2}(1-p). \tag{20}$$

Стандартное отклонение равно:

$$\sigma(N_0) = \frac{1}{p}\sqrt{(n+1)(1-p)} = \frac{\sqrt{(n+1)(1-\eta+\eta e^{-\lambda t})}}{\eta(1-e^{-\lambda t})}. \tag{21}$$

Дисперсия числа распадов N за время t равна:

$$\sigma^2(N) = \sigma^2[N_0 P(\lambda; t)] \tag{22}$$

или

$$\sigma^2(N) = \frac{n+1}{p^2}(1-p)(1-e^{-\lambda t})^2. \tag{23}$$

Для стандартного отклонения получаем:

$$\sigma(N) = \frac{\sqrt{(n+1)(1-p)}}{\eta} = \frac{\sqrt{(n+1)(1-\eta+\eta e^{-\lambda t})}}{\eta}. \tag{24}$$

Дисперсия вероятной скорости распада A, измеренной за время t:

$$\sigma^2\left(\frac{N}{t}\right) = \sigma^2(N)\,\frac{1}{t^2} \tag{25}$$

или

$$\sigma^2(A) = \frac{n+1}{t^2}\,\frac{1-p}{p^2}\,(1-e^{-\lambda t})^2. \tag{26}$$

Для стандартного отклонения получаем:

$$\sigma(A) = \frac{1-e^{-\lambda t}}{p}\sqrt{\frac{(n+1)(1-p)}{t^2}} \tag{27}$$

или

$$\sigma(A) = \frac{1}{\eta}\sqrt{\left(\frac{\nu}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\left(1-\eta+\eta\,e^{-\lambda t}\right)} \tag{28}$$

Преобразуя формулы (16) и (28), получаем:

$$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} + \frac{1}{\eta t} + \frac{e^{-\lambda t}-1}{t} \tag{29}$$

$$\sigma(A) = \sqrt{\left(\frac{\nu}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\left(\frac{e^{-\lambda t}}{\eta}+\frac{1}{\eta^2}-\frac{1}{\eta}\right)}\,. \tag{30}$$

Если за конечный интервал времени t имеем $\nu = 0$, из (29) и (30) следует:

$$\bar{A} = \frac{1}{\eta t} + \frac{e^{-\lambda t}-1}{t} \neq 0 \tag{31}$$

$$\sigma(A) = \frac{1}{\eta t}\sqrt{1-\eta+\eta\,e^{-\lambda t}} \tag{32}$$

Если $\nu = 0$ при $t \to \infty$, то из (31) получаем $\bar{A} \to 0$. Это означает, что активность можно считать равной 0 только в том случае, если при очень большом времени наблюдения $\nu = 0$.

Рассмотрим следующие четыре случая:

1) $T \gg t$, т.е. $\lambda t \to 0$
2) $T > t$, т.е. $\lambda t \ll 1$
3) $t \gg T$, т.е. $\lambda t \to \infty$
4) $t > T$, т.е. $\lambda t \approx 1$.

Величины $\bar{A}$, $\sigma(A)$ для этих случаев даны в табл. 1.

Рассмотрим случай, когда источником наблюдаемого эффекта (наблюдаемого числа распадов) является как распад ядер в исследуемой пробе, так и активность, присутствующая всегда, при всех наблюдениях.

Обозначим n_0 число регистрируемых событий при отсутствии пробы, а ν_0 – соответствующую скорость счета. Введем статистическую переменную

$$A = A_1 - A_0 \,. \qquad (33)$$

Вычислим среднюю величину и стандартное отклонение $\sigma(A)$. Согласно общей теории математической статистики, надо вычислить первый и второй семиинвариант (комулянт) распределения /4,5/.

$$\kappa_{1,A_1-A_0} = \kappa_{1,A_1} - \kappa_{1,A_2} \,,$$

т.е.

$$\bar{A} = \bar{A}_1 - \bar{A}_0 \,. \qquad (34)$$

Аналогично находим для второго семиинварианта распределения A :

$$\kappa_{2,A_1-A_0} = 1^2 \kappa_{2,A_1} + (-1)^2 \kappa_{2,A_0} = \kappa_{2,A_1} + \kappa_{2,A_0}$$

или

$$\sigma^2 (A_1 - A_0) = \sigma^2 (A_1) + \sigma^2 (A_0) \qquad (35)$$

Если принять, что период полураспада T_0 сопутствующей активности много больше времени наблюдения t_0 , т.е. $T_0 \to \infty$, из (16) определяем:

Таблица I

λt	$\bar{A}$	$\sigma(A)$	$\bar{A} - \sigma(A) \le A \le \bar{A} + \sigma(A)$ при $\nu = 0$, $t \neq \infty$
$\lambda t \to 0$	$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} + \frac{1}{\eta t}$	$\sigma(A) = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{\nu}{t} + \frac{1}{t^2}}$	$0 \le A \le \frac{2}{\eta t}$
$\lambda t < 1$	$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} + \frac{1}{\eta t} - \lambda$	$\sigma(A) = \frac{1}{\eta}\sqrt{\left(\frac{\nu}{t} + \frac{1}{t^2}\right)(1-\lambda\eta t)}$	$\frac{1-\lambda\eta t - \sqrt{1-\lambda\eta t}}{\eta t} \le A \le \frac{1-\lambda\eta t + \sqrt{1-\lambda\eta t}}{\eta t}$
$\lambda t \to \infty$	$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} + \frac{1-\eta}{\eta t}$	$\sigma(A) = \frac{1}{\eta}\sqrt{\left(\frac{\nu}{t} + \frac{1}{t^2}\right)(1-\eta)}$	$\frac{1-\eta-\sqrt{1-\eta}}{\eta t} \le A \le \frac{1-\eta+\sqrt{1-\eta}}{\eta t}$
$\lambda t \approx 1$	$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} + \frac{1}{\eta t} + \frac{1-e}{et}$	$\sigma(A) = \frac{1}{\eta}\sqrt{\left(\frac{\nu}{t} + \frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{\eta}{e}-\eta\right)}$	$\frac{1}{\eta t} + \frac{1-e}{et} - \frac{1}{\eta t}\sqrt{1+\frac{\eta}{e}-\eta} \le A \le \frac{1}{\eta t} + \frac{1-e}{et} + \frac{1}{\eta t}\sqrt{1+\frac{\eta}{e}-\eta}$

$$\bar{A}_0 = \frac{\nu_0}{\eta} + \frac{1}{\eta t_0}. \tag{36}$$

Аналогично, для дисперсии из (28) находим:

$$\sigma(A_0) = \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{\nu_0}{t_0} + \frac{1}{t_0^2}\right). \tag{37}$$

Применяя (34) и (35), вычисляем $\bar{A}$ и $\sigma(A)$:

$$\bar{A} = \bar{A}_1 - \bar{A}_0 = \frac{\nu_1 - \nu_0}{\eta} + \frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_0}\right) + \frac{e^{-\lambda t_1} - 1}{t_1}. \tag{38}$$

Обозначив наблюдаемую чистую скорость регистрации $\nu = \nu_1 - \nu_0$, получаем:

$$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} + \frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_0}\right) + \frac{e^{-\lambda t_1} - 1}{t_1}. \tag{38'}$$

Если принять $t_0 = t_1 = t$, придем к виду:

$$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} + \frac{e^{-\lambda t} - 1}{t}. \tag{39}$$

Для дисперсии имеем:

$$\sigma^2(\bar{A}) = \frac{1}{\eta^2}\left[\left(\frac{\nu_1}{t_1} + \frac{\nu_0}{t_0} + \frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_0^2}\right) + \left(\frac{\nu_1}{t_1} + \frac{1}{t_1^2}\right)\left(e^{-\lambda t_1} - 1\right)\eta\right]. \tag{40}$$

Стандартное отклонение равно:

$$\sigma(A) = \frac{1}{\eta}\sqrt{\left(\frac{\nu_1}{t_1} + \frac{\nu_0}{t_0} + \frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_0^2}\right) + \left(\frac{\nu_1}{t_1} + \frac{1}{t_1^2}\right)\left(e^{-\lambda t_1} - 1\right)\eta}. \tag{41}$$

Для $t_0 = t_1 = t$ получаем:

$$\sigma(A) = \frac{1}{\eta}\sqrt{\left(\frac{\nu_1}{t} + \frac{\nu_0}{t} + \frac{2}{t^2}\right) + \left(\frac{\nu_1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)\left(e^{-\lambda t} - 1\right)\eta} \tag{41'}$$

или

$$\sigma(A) = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{\nu_1}{t}(1-\eta+\eta e^{-\lambda t}) + \frac{\nu_0}{t} + \frac{1}{t^2}(2-\eta+\eta e^{-\lambda t})}. \tag{42}$$

Если за время наблюдения получаем $\nu = 0$, т.е. $\nu_1 = \nu_0$, то из (38) и (41) следует:

$$\bar{A} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_0}\right) + \frac{e^{-\lambda t_1} - 1}{t_1},$$

$$\sigma(A) = \frac{1}{\eta}\sqrt{\nu_0\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_0}\right) + \left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_0^2}\right) + \left(\frac{\nu_0}{t_1} + \frac{1}{t_1^2}\right)(e^{-\lambda t_1} - 1)\eta}.$$

Примем для простоты $t_1 = t_0 = t$, тогда

$$\bar{A} = \frac{e^{-\lambda t} - 1}{t}$$

$$\sigma(A) = \frac{1}{\eta}\sqrt{\left(\frac{\nu_0}{t} + \frac{1}{t^2}\right)(2-\eta+\eta e^{-\lambda t})}$$

т.е.

$$\frac{e^{-\lambda t} - 1}{t} - \frac{1}{\eta}\sqrt{\left(\frac{\nu_0}{t} + \frac{1}{t^2}\right)(2-\eta+\eta e^{-\lambda t})} \le \bar{A} \le$$

$$\le \frac{e^{-\lambda t} - 1}{t} + \frac{1}{\eta}\sqrt{\left(\frac{\nu_0}{t} + \frac{1}{t^2}\right)(2-\eta+\eta e^{-\lambda t})}$$

$\bar{A} \to 0$ при $t \to \infty$, то есть неизвестную активность можно считать равной 0, если при достаточно большом времени измерения $\nu = 0$. При этом, чем меньше λ, тем больше должно быть время наблюдения.

Приведенное следствие подчеркивает качественное отличие принятой вероятностной концепции от обычного биномиального распределения.

В таблице 2 для четырех рассмотренных выше случаев даны величины A, $\sigma(A)$ и б.

Истинная величина активности с вероятностью a будет находиться в доверительном интервале:

Таблица II

λt	$\bar{A}$	$\sigma(A)$	δ
$\lambda t \to 0$	$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} + \frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_0}\right)$	$\sigma(A) = \frac{1}{\eta}\sqrt{\left(\frac{\nu_1}{t_1} + \frac{\nu_0}{t_0}\right) + \left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_0^2}\right)}$	$\delta = \frac{1}{\nu + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_0}\right)}\sqrt{\left(\frac{\nu_1}{t_1} + \frac{\nu_0}{t_0}\right) + \left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_0^2}\right)}$
$\lambda t < 1$	$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} + \frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_0}\right) - \lambda$	$\sigma(A) = \frac{1}{\eta}\sqrt{(1-\lambda\eta)\left(\frac{\nu_1}{t_1} + \frac{1}{t_1^2}\right) + \left(\frac{\nu_0}{t_0} + \frac{1}{t_0^2}\right)}$	$\delta = \frac{1}{\nu - \lambda\eta + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_0}\right)}\sqrt{(1-\lambda\eta)\left(\frac{\nu}{t_1} + \frac{1}{t_1^2}\right) + \left(\frac{\nu_0}{t_0} + \frac{1}{t_0^2}\right)}$
$\lambda t \to \infty$	$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} + \frac{1-\eta}{\eta} \cdot \frac{1}{t_1} - \frac{1}{\eta t_0}$	$\sigma(A) = \frac{1}{\eta}\sqrt{(1-\eta)\left(\frac{\nu}{t_1} + \frac{1}{t_1^2}\right) + \left(\frac{\nu_0}{t_0} + \frac{1}{t_0^2}\right)}$	$\delta = \frac{1}{\nu + (1-\eta)\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_0}}\sqrt{(1-\eta)\left(\frac{\nu}{t_1} + \frac{1}{t_1^2}\right) + \left(\frac{\nu}{t_0} + \frac{1}{t_0^2}\right)}$
$\lambda t \approx 1$	$\bar{A} = \frac{\nu}{\eta} + \frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_0}\right) + \frac{1-e}{e t_1}$	$\sigma(A) = \frac{1}{\eta}\sqrt{(1-0{,}632\eta)\left(\frac{\nu}{t_1} + \frac{1}{t_1^2}\right) + \left(\frac{\nu_0}{t_0} + \frac{1}{t_0^2}\right)}$	$\delta = \frac{1}{\nu + (1-0{,}632\eta)\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_0}}\sqrt{(1-0{,}632\eta)\left(\frac{\nu}{t_1} + \frac{1}{t_1^2}\right) + \left(\frac{\nu_0}{t_0} + \frac{1}{t_0^2}\right)}$

$$[\bar{A} - k_\alpha\, \sigma(A),\ \ \bar{A} + k_\alpha\, \sigma(A)], \tag{43}$$

где k_α – коэффициент, связанный с доверительной вероятностью α.

Если выразить $\sigma(A)$ через δ, т.е. $\sigma(A) = \bar{A}\cdot\delta$, получим:

$$[\bar{A} - \bar{A}\,k_\alpha\,\delta\ ,\ \bar{A} + \bar{A}\,k_\alpha\,\delta\ ]. \tag{44}$$

Если всегда считать $A \geq 0$, то величина произведения $k_\alpha\delta$ не должна быть больше 1, т.е. $0 \leq k_\alpha\,\delta \leq 1$. Если принять $k_\alpha\,\delta = 1$, то доверительный интервал, в котором с вероятностью α находится истинная величина активности, $[0, 2\bar{A}]$. Для этого интервала, если известно δ, можно найти $k_\alpha = \frac{1}{\delta}$. Если известна связь между k_α и α, вычислив δ, можно определить доверительную вероятность α. Тогда из (43) можно найти доверительный интервал по заданной доверительной вероятности α. Для нормального распределения при величинах α, равных: 0,683; 0,900; 0,950; 0,9975; 0,999, соответствующие величины k равны: 1,00; 1,645; 1,96; 2,976 $\approx$ 3,000 и 3,291.

Когда число наблюдаемых событий при измерении пробы и фона меньше 20, для оценки доверительного интервала можно использовать коэффициенты Стьюдента, учитывающие ограниченность наблюдений.

Полученные выражения для $\bar{A}$, $\sigma(A)$ и δ как в общем, так и в различных частных случаях, представляют определенный теоретический интерес в связи с интерпретацией результатов измерений и определением низких активностей, когда число наблюдаемых событий ограничено.

Есть основания предполагать, что они найдут практическое применение при интерпретации результатов измерений, когда число распадающихся ядер в исследуемой пробе очень мало.

Полученные выражения для средней статистической ошибки позволяют находить точную величину минимальной определяемой активности в зависимости от δ и общего времени измерения T как в общем случае, так и в рассмотренных частных случаях. Это дает возможность оценить сравнительную чувствительность применяемых методов измерения при данных величинах ν_0 и η .

Литература

1. В.И. Гольданский и др. В кн. "Статистика отсчетов при регистрации ядерных частиц". М., Физматгиз, гл. 1 и 11 (1959).
2. Э. Сегре и др. В кн. "Экспериментальная ядерная физика", М., ИЛ., т. III , гл. II (1958).
3. J. Thomas. Interpretation Low Level Counter. Risö Report, N 62(1962).
4. Г. Крамер. Математические методы статистики, ИЛ , (1948).
5. Б.Л. Ван дер Варден. Математическая статистика, ИЛ, (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
26 августа 1971 года.