Р-585

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

5-95-446

На правах рукописи
УДК 510.5
512.554.33
517.957

РОБУК
Виктор Николаевич

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ КОНЕЧНОПРЕДСТАВЛЕННЫХ АЛГЕБР ЛИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В АНАЛИЗЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность: 05.13.16 — применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1995

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук В.П.Гердт

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, профессор А.В.Михалёв

Кандидат физико-математических наук Н.Н.Васильев

Ведущая организация:
Институт кибернетики НАН Украины, Киев.

Защита диссертации состоится "15" декабря 1995 г. в 10^{30} час. на заседании диссертационного совета Д 047.01.04 при Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "14" ноября 1995 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Ив З.М.Иванченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В последние годы наблюдается большой интерес к компьютерным аспектам комбинаторной алгебры. Под этим, как правило, понимают анализ алгебраических объектов, заданных порождающими элементами и определяющими соотношениями полиномиального типа. Для алгебр Ли метод построения канонических систем порождающих идеалов (техника композиций) был введён А.И.Ширшовым (1962г.). Для ассоциативных алгебр изложение этого метода было дано Л.А.Бокутем (1976г.) и Дж. Бергманом (1978г.) В то же время в коммутативном случае довольно большое количество методов и приемов компьютерной алгебры для исследования полиномиальных систем с многими переменными были разработаны на основе техники базисов Гребнера (Б.Бухбергер, 1965г.). Несмотря на то, что концепция базисов Гребнера была обобщена на некоммутативные алгебры (Т.Мора, 1988г.), область их практического использования все еще остается ограниченной, поскольку метод некоммутативных базисов Гребнера применим на классе алгебр, называемых алгебрами решаемого типа, которые можно рассматривать как промежуточные между коммутативными и некоммутативными алгебрами. К сожалению, анализ алгебр Ли не может быть в общем случае сведен к алгебрам решаемого типа, исключая конечномерные алгебры Ли, обертывающие алгебры которых являются алгебрами решаемого типа.

С другой стороны, проблема построения конечнопредставленных алгебр Ли, т.е. алгебр Ли заданных конечным набором порождающих элементов и определяющих соотношений, имеет большое практическое значение для исследования алгебраической структуры нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных по двум независимым переменным (НДУ) в рамках метода Уолквиста-Истабрука (1975г.). Следует отметить, что метод Уолквиста-Истабрука является фактически единственной и наиболее общей вычислительной процедурой, значительно упрощающей построение таких принципиально важных, для методов точного интегрирования НДУ, математических объектов, как псевдопотенциалы. Такие конструкции как, например, $L - A$ - пара, $U - V$ - пара, преобразования Бэклунда, линеаризующие подстановки, представляют из себя всего лишь частные случаи соответствующих псевдопотенциальных представлений НДУ.

Однако метод Уолквиста-Истабрука не является в полном смысле этого слова регулярным методом построения явного вида псевдопотенциалов для исследуемого нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, а только сводит эту задачу к весьма сложной алгебраической задаче, а именно - к задаче построения факторалгебры Ли свободной алгебры Ли по идеалу порождённому набором образующих (порождающих) элементов и определяющих соотношений. Иными словами, применение метода Уолквиста-Истабрука приводит, на определённом этапе, к необходимости поиска решений системы нелинейных алгебраических уравнений от некоммутирующих переменных со значениями в алгебрах Ли. Единственным прямым методом решения таких уравнений как раз и является факторизация т.е. последовательное построение нетривиальных алгебраических следствий для начальных полиномиальных уравнений (определяющих соотношений) от некоммутирующих переменных (порождающих элементов). В общем случае такая задача

Объединенный институт
ядерных исследований

неразрешима регулярным способом, хотя бы уже в силу того, что все решения могут лежать в области бесконечномерных алгебр Ли и тогда нам только остаётся, насчитав достаточно большое количество алгебраических следствий, попытаться угадать закономерность в их генерации и таким образом построить рекуррентные соотношения, которые и дадут нам полный ответ о структуре соответствующей алгебры Ли. В тоже время, во многих прикладных задачах удаётся отыскать частные решения в виде конечномерных подалгебр общей алгебры Ли. И этого уже оказывается достаточно для того, чтобы построить явный вид конструктивных, в плане получения широких классов решений исследуемого дифференциального уравнения, псевдопотенциальных представлений. Однако и такой подход приводит во многих случаях к чрезвычайно большому объёму вычислений. С другой стороны сама процедура факторизации использует незначительное число разнотипных операций. Две последние фразы доказывают принципиальную необходимость и реальную возможность, соответственно, применения компьютера в решении подобного сорта задач.

Целью диссертационной работы является разработка алгоритмов для решения задачи факторизации свободной алгебры Ли по идеалу, порождённому конечным набором образующих элементов и определяющих соотношений, а также последующее применение этой техники вычислений к задаче нахождения псевдопотенциальных представлений точно интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных по двум независимым переменным.

Научная новизна. Разработана новая эффективная алгоритмическая процедура для решения задачи факторизации свободной алгебры Ли по идеалу порожденному конечным набором образующих элементов и определяющих соотношений. Основной элемент новизны заключается в отказе от использования традиционной техники композиций Ширшова (техники базисов Грёбнера) и в замене её на технику проверок тождеств Якоби для базисных элементов алгебры Ли. С целью эффективизации указанной алгоритмической процедуры доказаны две новые теоремы из области конечнопредставленных алгебр Ли: теорема о порождающих, которая сводит рост объема вычислений тождеств Якоби с $\mathcal{N}^3$ до $\mathcal{N}^2$ и теорема об элементах центра, которая позволяет эффективно организовать поиск элементов центра алгебры Ли. С целью упорядочения вычислительного процесса, а также с целью уменьшения неоднородности исходных определяющих соотношений понятие длины (степени) лиевского полинома заменено его новым обобщением, т.е. понятием веса. Новым в предложенной алгоритмической процедуре является также и принцип двойного упорядочения базисных мономов (по номеру и по весу), что исключает возможность ошибок в вычислениях.

На основе метода Уолквиста - Истабрука разработан новый конструктивный метод классификации НДУ по признаку наличия псевдопотенциальных представлений. Этот метод позволяет, исходя из общего вида некоторого класса НДУ, строить конкретные НДУ, обладающие хотя бы одним псевдопотенциальным представлением и для каждого такого НДУ - строить широкие классы псевдопотенциальных представлений в той мере, в которой это позволяет решение соответствующей задачи факторизации свободной алгебры Ли.

Для уравнений Ландау - Лифшица, описывающих нелинейную динамику антиферромагнетика с одноосной анизотропией, получен ряд эффективных, в плане построения широких классов решений, псевдопотенциальных представлений.

Для ряда прикладных задач, связанных с методом построения псевдопотенциалов (эволюционные уравнения второго порядка, уравнение Кортевега-де Фриза) полностью решена задача факторизации свободной алгебры Ли по идеалу, порожденному конечным набором образующих элементов и определяющих соотношений. Получена новая точно решаемая система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая одномерную динамику диссипативных структур. Предложен и продемонстрирован на примере уравнения Кортевега-де Фриза и ассоциированного с ним уравнения новый метод генерации точно решаемых нелинейных моделей.

Практическая ценность. Разработанные в диссертации методы и алгоритмы создают основу для создания эффективных программ на языках компьютерной алгебры для решения широкого класса задач, связанных с исследованием алгебр Ли. Этот класс задач содержит как задачи математической физики, в том числе связанные с исследованием интегрируемости нелинейных уравнений в частных производных, так и задачи комбинаторной алгебры. В этом разделе математики задача анализа конечнопредставленных алгебр Ли уже сама по себе, в ее наиболее общей постановке, является одной из наиболее важных.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Для уравнений Ландау - Лифшица, описывающих нелинейную динамику антиферромагнетика с одноосной анизотропией, получен ряд эффективных, в плане построения широких классов решений, псевдопотенциальных представлений.

2. Разработан новый конструктивный метод классификации эволюционных уравнений по признаку наличия псевдопотенциальных представлений. С помощью этого метода проклассифицированы эволюционные уравнения второго порядка вида $u_t = f(u)u_{xx} + \mathcal{F}(u, u_x)$. Тем самым построены все эволюционные уравнения, обладающие хотя бы одним псевдопотенциальным представлением и для каждого такого уравнения перечислены все псевдопотенциальные представления в терминах алгебр Ли.

3. Разработана новая эффективная алгоритмическая процедура для решения задачи факторизации свободной алгебры Ли по идеалу порожденному конечным набором образующих элементов и определяющих соотношений.

4. С целью эффективизации указанной алгоритмической процедуры доказаны две теоремы из области конечнопредставленных алгебр Ли: теорема о порождающих, которая сводит рост объема вычислений с $\mathcal{N}^3$ до $\mathcal{N}^2$ и теорема об элементах центра, которая позволяет эффективно организовать поиск элементов центра алгебры Ли.

5. Для ряда прикладных задач, связанных с методом построения псевдопотенциалов (эволюционные уравнения второго порядка, уравнение Кортевега-де

Фриза) полностью решена задача факторизации свободной алгебры Ли по идеалу, порожденному конечным набором образующих элементов и определяющих соотношений.

6. Получена новая точно решаемая система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая одномерную динамику диссипативных структур.

7. Предложен и продемонстрирован на примере уравнения Кортевега-де Фриза и ассоциированного с ним уравнения новый метод генерации точно решаемых нелинейных моделей.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:
– Международном рабочем совещании "Computer Algebra in Physical Research", Дубна, 1990.
– Международной конференции "Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems", Дубна, 1990.
– на научных семинарах ХГУ, МГУ, ФТИНТ НАН Украины, ХФТИ НАН Украины, ИК НАН Украины, ЛВТА ОИЯИ, ЛТФ ОИЯИ, ЛОМИ, университетов Лейпцига и Грейфсвальда (Германия), Исследовательском центре по информатике в Амстердаме (Голландия).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 научных работах, которые приведены в списке литературы.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения; содержит 76 страниц наборного текста, включая 4 таблицы и библиографический список литературы из 48 названий. Диссертация подготовлена средствами компьютерной системы LaTeX.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе I - Введении обосновывается актуальность и практическая важность проблематики диссертационной работы, кратко перечислены результаты по главам. **В главе II** исследуются вопросы связанные с процедурой Уолквиста – Истабрука и её обобщением до уровня конструктивной классификационной процедуры.

В разделе 2.1 на примере уравнения Бюргерса подробно рассмотрено понятие псевдопотенциалов НДУ и процедура Уолквиста – Истабрука вычисления этих псевдопотенциалов. Показано, как из абстрактной конструкции ($\hat{F}$ - $\hat{G}$ пары со значениями в абстрактной алгебре Ли) можно получать конкретные матричные совместные системы типа L - A -пары, или U - V -пары, путём построения матричного представления соответствующей алгебры Ли, или, путём построения представлений в алгебрах Ли векторных полей, строить псевдопотенциальные конструкции типа подстановки Коула - Хопфа для уравнения Бюргерса.

Замечено, что при последовательном применении этой методики, даже в случаее уранения Бюргерса: $u_t = u_{xx} + 2uu_x$, мы получаем псевдопотенциальное представление более общего вида, чем подстановка Коула - Хопфа:

$$y_x = \lambda_1 y + \lambda_2 y^2 + yu\ , \qquad y_t = yu_x + yu^2 + \lambda_2 y^2 u - \lambda_1^2 y - \lambda_1\lambda_2 y^2\ ,$$
где $y_{xt} = y_{tx}$ на всех решениях и только на решениях ур. Бюргерса. Действительно, из двух последних уравнений получаем для y уравнение Бюргерса:

$$y_t = y_{xx} - 2(\lambda_1 + \lambda_2 y)y_x\ ,$$

а не просто линейное ур. диффузии, как это следует из подстановки Коула - Хопфа.

Раздел 2.2 посвящён демонстрации новой конструктивной классификационной процедуры на примере эволюционных уравнений второго порядка.

Определение. Эволюционным уравнением n - го порядка будем называть дифференциальное уравнение в частных производных для скалярной функции $u = u(x,t)$ от двух независимых переменных x и t вида

$$u_t = \mathcal{F}(u, u_x, u_{xx}, \ldots, u^{(n)}). \tag{1}$$

Определение. Лиевской $\hat{F} - \hat{G}$ парой $(FGLie)$ k - го порядка для исходного уравнения (1) будем называть тройку $(\hat{F}, \hat{G}, L)$, где L - алгебра Ли над полем C, $\hat{F} = \hat{F}(u, u_x, \ldots, u^{(k)})$ и $\hat{G} = \hat{G}(u, u_x, \ldots, u^{(k+n-1)})$ такие функции со значениями в L, что условие

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{G}}{\partial x} + [\hat{G}, \hat{F}] = 0$$

тождественно выполняется на **всех** решениях и **только** на решениях исходного эволюционного уравнения (1). Здесь скобки $[;]$ обозначают коммутатор, т.е. обычное лиевское произведение, а под частными производными по x и t подразумевается дифференцирование только динамических переменных исходного ур. (1).

Определение. Универсальной лиевской $\hat{F} - \hat{G}$ парой $(UFGLie)$k–гопорядка для (1) будем называть такую $FGLie(\hat{F}, \hat{G}, L)$ k - го порядка, что для любой $FGLie(\hat{F}', \hat{G}', L')$ k - го порядка данного уравнения найдётся единственный гомоморфизм f из L в L' такой, что $\hat{F} \xrightarrow{f} \hat{F}'$ и $\hat{G} \xrightarrow{f} \hat{G}'$.

Формулировка классификационной задачи теперь будет выглядеть следующим образом: построить одновременно явный вид всех эволюционных уравнений второго порядка, с точностью до точечного преобразования $u = u(\tilde{u})$, обладающих $UFGLie$ нулевого порядка, и соответствующие $UFGLie$ нулевого порядка.

Далее для эволюционных ур. второго порядка, общего вида $u_t = f_1(u)u_{xx} + \mathcal{F}_2(u, u_x)$, подробно описана классификационная процедура, которая в конечном итоге приводит к следующим результатам:

Вариант I

$$u_t = (f_1 u_x)_x + f_3 u_x + a_0 \int f_3 du - a_0^2 \int f_1 du + a_1 u + a_2\ ,$$

$$\hat{F} = \hat{X}_1 + u\hat{X}_2\ , \quad \hat{G} = (f_1 u_x + \int f_3 du - a_0 \int f_1 du)\hat{X}_2 + \hat{X}_3\ .$$

Определяющие соотношения:

$$[\hat{X}_2, \hat{X}_1] = -a_0\hat{X}_2, \quad [\hat{X}_3, \hat{X}_1] = -a_2\hat{X}_2, \quad [\hat{X}_3, \hat{X}_2] = -a_1\hat{X}_2.$$
Здесь a_0, a_1, a_2 - произвольные константы; f_1, f_2 - произвольные функции от u. Алгебра Ли совпадает с определяющими соотношениями.

Вариант II

$u_t = (f_1 u_x)_x + \{(b_1 + b_2 u) f_1 + b_3 + b_2 \int f_1 du\} u_x + (b_5 + b_6 u) \int f_1 du + b_7 u + b_8,$

$\hat{F} = \hat{X}_1 + u\hat{X}_2, \hat{G} = \{f_1 u_x + (b_1 + b_2 u) \int f_1 du + b_3 u + b_4\} \hat{X}_2 + \int f_1 du [\hat{X}_2, \hat{X}_1] + \hat{X}_3.$

Определяющие соотношения:

$$[[\hat{X}_2, \hat{X}_1], \hat{X}_1] + b_1[\hat{X}_2, \hat{X}_1] + b_5 \hat{X}_2 = 0, \quad [[\hat{X}_2, \hat{X}_1], \hat{X}_2] + b_2[\hat{X}_2, \hat{X}_1] + b_6 \hat{X}_2 = 0,$$
$$[\hat{X}_3, \hat{X}_2] + b_3[\hat{X}_2, \hat{X}_1] + b_7 \hat{X}_2 = 0, \quad [\hat{X}_3, \hat{X}_1] + b_4[\hat{X}_2, \hat{X}_1] + b_8 \hat{X}_2 = 0 .$$

Здесь и во всех остальных *Вариантах* путём факторизации, т.е. проверки тождеств Якоби для всех базисных элементов, получаем различные решения.

Первое решение.

При $b_2 = b_6 = 0$ (остальные b_i - произвольные константы).
Базисные элементы алгебры Ли: $\hat{X}_1, \ \hat{X}_2, \ \hat{X}_3, \ \hat{X}_4 = [\hat{X}_2, \hat{X}_1]$.
Таблица умножения базисных элементов:

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \hat{X}_4, \quad [\hat{X}_1, \hat{X}_3] = b_8 \hat{X}_2 - b_4 \hat{X}_4, \quad [\hat{X}_1, \hat{X}_4] = -b_5 \hat{X}_2 + b_1 \hat{X}_4,$$
$$[\hat{X}_2, \hat{X}_3] = b_7 \hat{X}_2 - b_3 \hat{X}_4, \quad [\hat{X}_2, \hat{X}_4] = 0, \quad [\hat{X}_3, \hat{X}_4] = -b_3 b_5 \hat{X}_2 + (b_3 b_1 - b_7) \hat{X}_4.$$

Второе решение.

При $b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = 0$ (остальные b_i - произвольные константы).
Базисные элементы алгебры Ли: $\hat{X}_1, \ \hat{X}_2, \ \hat{X}_3, \ \hat{X}_4 = [\hat{X}_2, \hat{X}_1]$;
Таблица умножения базисных элементов:

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \hat{X}_4, \quad [\hat{X}_2, \hat{X}_3] = -b_3 \hat{X}_4, \quad [\hat{X}_1, \hat{X}_3] = -b_4 \hat{X}_4,$$
$$[\hat{X}_2, \hat{X}_4] = b_2 \hat{X}_4, \quad [\hat{X}_1, \hat{X}_4] = b_1 \hat{X}_4, \quad [\hat{X}_3, \hat{X}_4] = (b_3 b_1 - b_2 b_4) \hat{X}_4 .$$

Вариант III

$$u_t = u_{xx} + (c_1 + c_2 u) u_x + c_3 + c_4 u + c_5 u^2 .$$
$$\hat{F} = \hat{X}_1 + u\hat{X}_2, \ \hat{G} = (u_x + c_1 u + \frac{1}{2} c_2 u^2) \hat{X}_2 + u[\hat{X}_2, \hat{X}_1] + \hat{X}_3.$$

Определяющие соотношения:

$$[[\hat{X}_2, \hat{X}_1], \hat{X}_1] + c_1[\hat{X}_2, \hat{X}_1] + [\hat{X}_3, \hat{X}_2] + c_4 \hat{X}_2 = 0,$$
$$[[\hat{X}_2, \hat{X}_1], \hat{X}_2] + \frac{1}{2} c_2 [\hat{X}_2, \hat{X}_1] + c_5 \hat{X}_2 = 0, \ [\hat{X}_3, \hat{X}_1] + c_3 \hat{X}_2 = 0 .$$

Первое решение.

При $c_2 = c_5 = 0$ (остальные c_i - произвольные константы).
Базисные элементы алгебры Ли: $\hat{X}_1 \ , \ \hat{X}_3 \ , \ \hat{Y}_k \equiv ad^k \hat{X}_1(\hat{X}_2) \ , \ \{k\}_0^\infty$;
Таблица умножения базисных элементов:

$$[\hat{X}_1, \hat{Y}_k] = \hat{Y}_{k+1}, [\hat{X}_3, \hat{Y}_k] = -\hat{Y}_{k+2} + c_1 \hat{Y}_{k+1} - c_4 \hat{Y}_k, [\hat{X}_1, \hat{X}_3] = c_3 \hat{Y}_0, [\hat{Y}_k, \hat{X}_n] = 0, \{n\}_0^\infty.$$

Второе решение.

При $c_4 = c_5 = 0$ (остальные c_i - произвольные константы).
Базисные элементы алгебры Ли: $\hat{X}_1, \ \hat{X}_3, \ \hat{Y}_k \equiv ad^k \hat{X}_1(\hat{X}_2), \ \{k\}_0^\infty$;
Таблица умножения базисных элементов:

$$[\hat{X}_1, \hat{Y}_k] = \hat{Y}_{k+1}, \quad [\hat{X}_1, \hat{X}_3] = c_3 \hat{Y}_0, \quad [\hat{Y}_0, \hat{Y}_l] = \frac{1}{2} c_2 \hat{Y}_l, \quad [\hat{Y}_0, \hat{X}_3] = \hat{Y}_2 - c_1 \hat{Y}_0,$$
$$[\hat{Y}_m, \hat{Y}_l] = 0, \quad [\hat{X}_3, \hat{Y}_l] = -\hat{Y}_{l+2} + c_1 \hat{Y}_{l+1} - \frac{1}{2}(l-1) c_2 c_3 \hat{Y}_{l-1}, \quad \{m\}_0^\infty, \quad \{l\}_0^\infty$$

Вариант IV

$$u_t = (\frac{1}{u^2} u_x)_x + (p_1 \frac{1}{u^2} + p_2) u_x + p_3 \frac{1}{u} + p_4 + p_5 u \ ,$$
$$\hat{F} = \hat{X}_1 + u\hat{X}_2 \ , \ \hat{G} = (\frac{1}{u^2} u_x - p_1 \frac{1}{u} + p_2 u) \hat{X}_2 - \frac{1}{u}[\hat{X}_2, \hat{X}_1] + \hat{X}_3 \ .$$

Определяющие соотношения:

$$[[\hat{X}_2, \hat{X}_1], \hat{X}_1] + p_1[\hat{X}_2, \hat{X}_1] - p_3 \hat{X}_2 = 0,$$
$$[[\hat{X}_2, \hat{X}_1], \hat{X}_2] + [\hat{X}_1, \hat{X}_3] + p_4 \hat{X}_2 = 0,$$
$$p_2[\hat{X}_2, \hat{X}_1] + [\hat{X}_3, \hat{X}_2] + p_5 \hat{X}_2 = 0.$$

Первое решение.

При $p_4 = 0$ (остальные p_i - произвольные константы).
Базисные элементы алгебры Ли:

$$\hat{X}_1, \ \hat{X}_2, \ \hat{X}_3, \ \hat{X}_4 \equiv [\hat{X}_2, \hat{X}_1], \ \hat{X}_5 \equiv [\hat{X}_2, [\hat{X}_2, \hat{X}_1]];$$

Таблица умножения базисных элементов:

$$[\hat{X}_2, \hat{X}_1] = \hat{X}_4, \quad [\hat{X}_2, \hat{X}_3] = p_2 \hat{X}_4 + p_5 \hat{X}_2, \quad [\hat{X}_2, \hat{X}_4] = \hat{X}_5, \ [\hat{X}_2, \hat{X}_5] = 0,$$
$$[\hat{X}_1, \hat{X}_3] = \hat{X}_5, \quad [\hat{X}_1, \hat{X}_4] = p_1 \hat{X}_4 - p_3 \hat{X}_2, \quad [\hat{X}_1, \hat{X}_5] = p_1 \hat{X}_5, \quad [\hat{X}_4, \hat{X}_5] = 0,$$
$$[\hat{X}_3, \hat{X}_5] = (p_1 p_2 - 2p_5) \hat{X}_5, \quad [\hat{X}_3, \hat{X}_4] = (p_1 p_2 - p_5) \hat{X}_4 - p_2 p_3 \hat{X}_2.$$

Второе решение.

При $p_3 = p_4 = 0$ (остальные p_i - произвольные константы).
Базисные элементы алгебры Ли: $\hat{X}_1, \ \hat{X}_3, \ \hat{Y}_k \equiv ad^k \hat{X}_2(\hat{X}_1), \ \{k\}_0^\infty$.
Таблица умножения базисных элементов:

$$[\hat{X}_2, \hat{X}_3] = p_2 \hat{Y}_1 + p_5 \hat{X}_2, \quad [\hat{X}_2, \hat{Y}_k] = \hat{Y}_{k+1}, \quad [\hat{Y}_0, \hat{Y}_l] = p_1 \hat{Y}_l, [\hat{Y}_0, \hat{X}_3] = \hat{Y}_2,$$
$$[\hat{Y}_m, \hat{Y}_l] = 0, \quad [\hat{X}_3, \hat{Y}_n] = -\hat{Y}_{n+2} + (np_5 - p_1 p_2) \hat{Y}_n, \quad \{n\}_1^\infty, \{m\}_1^\infty, \{l\}_1^\infty$$

Третье решение.

При $p_1 = p_3 = p_5 = 0$ (остальные c_i - произвольные константы).
Базисные элементы алгебры Ли: $\hat{X}_1,\ \hat{X}_3,\ \hat{Y}_k \equiv ad^k \hat{X}_1(\hat{X}_2),\ \{k\}_0^\infty$.
Таблица умножения базисных элементов:

$$[\hat{X}_2, \hat{Y}_k] = \hat{Y}_{k+1},\ \ [\hat{X}_2, \hat{X}_3] = p_2\hat{Y}_1,\ \ [\hat{Y}_0, \hat{X}_3] = \hat{Y}_2 + p_4\hat{X}_2,\ \ [\hat{Y}_1, \hat{X}_3] = \hat{Y}_3,$$
$$[\hat{X}_3, \hat{Y}_l] = -\hat{Y}_{l+2} - \frac{1}{2}(l-2)p_2p_4\hat{Y}_{l-1},\ \ [\hat{Y}_1, \hat{Y}_l] = \frac{1}{2}p_2\hat{Y}_l,$$
$$[\hat{Y}_l, \hat{Y}_0] = \frac{1}{2}(l-2)\hat{Y}_{l-1},\ \ [\hat{Y}_1, \hat{Y}_0] = 0,\ \ [\hat{Y}_n, \hat{Y}_l] = 0,\ \ \{n\}_2^\infty,\ \{l\}_2^\infty\ .$$

В пункте 2.2.3 , с целью лучшего понимания материала изложенного в главе 3, подробно описан начальный этап процедуры факторизации на примере определяющих соотношений из *Варианта III*.

Глава III посвящена строгому описанию алгоритмов для работы с конечнопредставленными алгебрами Ли и демонстрации применения этих алгоритмов к задачам факторизации свободной алгебры Ли по идеалу заданному набором определяющих соотношений и порождающих элементов, связанным с уравнениями Кортевега - де Фриза и уравнениями для одномерной ленгмюровской турбулентности посредством процедуры Уолквиста - Истабрука.

В разделе 3.1 (*пункты 3.1.1 - 3.1.3*) приведены основные понятия и определения из теории свободных алгебр Ли.

В пункте 3.1.4 приведено доказательство новой теоремы, которая играет принципиальную роль в эффективизации алгоритма.
Пусть $R(X)$ - базис свободной алгебры Ли $L(X)$ и $u, v \in R(x), u < v, w = [u, v]$.

Определение. Будем называть лиевский моном w *правильной парой*, если $w = [u, v] \in R(X)$. А в том случае, если $w = [u, v],\ v = [v_1, v_2],\ u < v$ и $u < v_1$, то w мы будем называть *неправильной парой*.

Поскольку основная масса вычислений в представленном в данной работе алгоритме связана с вычислением тождеств Якоби, в частности и для того, что бы выразить неправильную пару через базисные элементы, т.е. определить структурные константы $L(X)$, чрезвычайно важной оказывается следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\tilde{L}$ - свободная K-алгебра с условием

$$\forall u \in \tilde{L}:\ [u, u] = 0$$

и пусть $\exists a, b \in \tilde{L}$ такие, что

$$\forall u, v \in \tilde{L}:\ J(a, u, v) = J(b, u, v) = 0\ ,$$

где

$$\forall u, v, w \in \tilde{L}:\ J(u, v, w) \equiv [u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]]\ .$$

Тогда

$$J(p(a, b), u, v) = 0\ ,$$

где $p(a, b)$ - произвольный лиевский полином от a, b над полем K.

Следствие. Если в свободной алгебре $\tilde{L}(X)$

$$\forall x_i \in X\ \wedge\ \forall u, v \in \tilde{L}:\ J(x_i, u, v) = 0\ ,$$

то

$$\forall u, v, w \in \tilde{L}:\ J(u, v, w) = 0\ ,$$

т.е. $\tilde{L}$ - свободная алгебра Ли.

В разделе 3.2 дано описание основной проблемы рассматриваемой в данной диссертации и, на примере уравнения Кортевега - де Фриза, вводится понятие *генетического кода* алгебры Ли.

Пусть $L(X)$ - свободная алгебра Ли над полем K, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ - конечный набор порождающих элементов в $L(X)$ и $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ - конечный набор лиевских полиномов от X, т.е. $p_i = p_i(X) \in L(X),\ i = \{1, \dots, m\}$.

Определение. Если L - алгебра Ли порожденная набором элементов X, которые удовлетворяют полиномиальным уравнениям (*определяющим соотношениям*) $p_i(X) = 0\ \ (i = \{1, \dots m\})$, тогда L называется *конечнопорожденной и конечноопределенной* или *конечнопредставленной* алгеброй Ли.

Проблема. Задан конечный набор порождающих элементов X и определяющих соотношений P - необходимо построить алгебру Ли L такую, что $X \subseteq L$ при условии $p_i(X) = 0,\ p_i \in P$. Другими словами, мы должны найти решения полиномиальных уравнений от некоммутирующих переменных в классе алгебр Ли.

Такая проблема является наиболее принципиальной частью конструктивного анализа точной интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных по методу Уолквиста-Истабрука. Так, например, для уравнения КдФ: $u_t = u_{xxx} - 3uu_x$, посредством процедуры Уолквиста - Истабрука, получаем:

$$\hat{F} = \hat{X}_1 + u\hat{X}_2 + u^2\hat{X}_3$$
$$\hat{G} = \hat{X}_4 + u[[\hat{X}_2, \hat{X}_1], \hat{X}_1] + \frac{1}{2}u^2[[\hat{X}_2, \hat{X}_1], \hat{X}_2] - \frac{3}{2}u^2\hat{X}_2 -$$
$$-2u^3\hat{X}_3 - u_x^2\hat{X}_3 + u_x[\hat{X}_2, \hat{X}_1] + u_{xx}(\hat{X}_2 + 2u\hat{X}_3).$$

и определяющие соотношения:

$$[[[\hat{X}_1, \hat{X}_2], \hat{X}_2], \hat{X}_2] = 0,\ \ -\frac{3}{2}[\hat{X}_1, \hat{X}_2] + \frac{3}{2}[[[\hat{X}_1, \hat{X}_2], \hat{X}_1], \hat{X}_2] + [\hat{X}_3, \hat{X}_4] = 0,$$
$$[[[\hat{X}_1, \hat{X}_2], \hat{X}_1], \hat{X}_1] + [\hat{X}_2, \hat{X}_4] = 0,\ \ [\hat{X}_1, \hat{X}_4] = [\hat{X}_1, \hat{X}_3] = [\hat{X}_2, \hat{X}_3] = 0$$

Перед построением алгебры Ли, имеет смысл упростить данные определяющие соотношения, основываясь на следующей теореме.

Теорема 2. Пусть L алгебра Ли. Если $z, u, v \in L$ и $[z, u] = [z, v] = 0$, то $[z, P(u, v)] = 0$ где P произвольный лиевский полином от u, v.

Следствие. Если некоторый элемент $z \in L$ из алгебры L коммутирует со всеми порождающими, то z принадлежит центру L $(z \in Z(L))$.

Относительно небольшие по объёму вычисления, основанные на теореме 2, приводят нас к следующему виду определяющих соотношений для уравнения КдФ:

$$[[[\hat{X}_1, \hat{X}_2], \hat{X}_2], \hat{X}_2] = 0,\ \ [[[\hat{X}_1, \hat{X}_2], \hat{X}_1], \hat{X}_2] - [\hat{X}_1, \hat{X}_2] = 0,$$
$$[[[\hat{X}_1, \hat{X}_2], \hat{X}_1], \hat{X}_1] + [\hat{X}_2, \hat{X}_4] = 0,\ \ [\hat{X}_1, \hat{X}_4] = 0. \qquad (2)$$

Чтобы использовать алгоритм описанный в следующем разделе, начальные данные (набор порождающих элементов и определяющих соотношений) должны быть:

- градуированы по весу, который выбирается заранее, как это описано в разделе 3.1, что в свою очередь индуцирует градуированное упорядочение на всех остальных базисных мономах и соотношениях;

- взаимно редуцированы и дополненный всеми базисными элементами и соотношениями, которые получены в результате проверки всех тождеств Якоби для троек базисных элементов с суммарным весом не превышающим максимальный вес среди порождающих элементов и определяющих соотношений.

Определение. Таким образом градуированный, упорядоченный и расширенный набор порождающих элементов и определяющих соотношений будем называть *генетическим кодом* алгебры Ли, которую предполагается построить.

Специальный вспомогательный алгоритм позволяет проводить все эти операции. Результат работы этого алгоритма можно увидеть на следующем примере.

Генетический код алгебры Ли уравненя Кортевега-де Фриза, заданной соотношениями (2), может быть представлен в виде таблицы:

Вес	No.базисного элемента	Генетический код
1	1	X_1
	2	X_2
2	3	$[X_1, X_2]$
3	4	$[X_1, [X_1, X_2]]$
	5	$[X_2, [X_1, X_2]]$
	6	X_4
4	7	$[X_1, [X_1, [X_1, X_2]]]$
		$[X_2, [X_1, [X_1, X_2]]] = [X_1, X_2]$
		$[X_1, [X_2, [X_1, X_2]]] = [X_1, X_2]$
		$[X_2, [X_2, [X_1, X_2]]] = 0$
		$[X_1, X_4] = 0$
		$[X_2, X_4] = -[X_1, [X_1, [X_1, X_2]]]$

В разделе 3.3 приведено подробное строгое описание основных модулей алгоритма вычисления алгебраических следствий определяющих соотношений. Результаты работы этого алгоритма проиллюстрированы на двух примерах.

Пункт 3.3.1 (Основные структуры).

Пусть R - множество базисных мономов конструируемой алгебры Ли L. Градуировка задает разбиение $R = \cup_l R^l = \cup_l (X^l \cup S^l)$, где X и S - множества порождающих и базисных элементов, соответственно. Линейное упорядочение на R, задается биективным отображением $f: \ R \longrightarrow \tilde{R}$, где $\tilde{R}$ - некоторое линейно упорядоченное множество, например множество натуральных чисел N. Естественно, что при этом $\tilde{R} = \cup_l \tilde{R}^l = \cup_l (\tilde{X}^l \cup \tilde{S}^l)$ и

$$f^{-1}(\tilde{r}) = \begin{cases} x \in X, & if \quad \tilde{r} \in \tilde{X}, \\ (r_i, r_j) \in S, & if \quad \tilde{r} \in \tilde{S}, \end{cases}$$

Набор $\tilde{R}$ можно рассматривать как нумерацию R.

Определение. Правильная пара называется *связанной парой*, если она может быть выражена через линейную комбинацию базисных элементов с помощью тождеств Якоби и *свободной парой* , в противном случае. Естественно, что все неправильные пары так же являются связанными парами.

Следует отметить, что проверка тождеств Якоби для троек более высокого веса может порождать дополнительные связи для мономов более низкого веса, которые ранее рассматривались как базисные элементы. Мы будем называть такие связи *возвратными полиномами*, поскольку появление таких связей приводит к необходимости начать вычислительный процесс с более низкого веса соответствующего равного весу возвратной фразы. В описании алгоритма такие возвратные полиномы собраны в специальном наборе P. Пусть $B = \cup_l B^l$ набор связанных пар. Это означает, что $b \in B \quad iff \quad b = \sum_i \alpha_i r_i, \quad \alpha_i \in K, r_i \in R$ Обозначим через h отображение $h: \ B \longrightarrow Span(R, K)$ и введем вспомогательный набор H, содержащий все промежуточные правильные пары. В последующих вычислениях те пары которые оказываются связанными перемещаются из H в B.

Далее описан алгоритм вычисления R^n по известным $R^k \, (k < n)$.

Пункт 3.3.2 (Основной алгоритм).

Input: $\cup_{k<n} R^k, \quad \cup_{k<n} \tilde{R}^k, \quad \cup_{k<n} B^k, \quad \cup_{k<n} h(B^k)$;

Output: $R^n, \quad S^n, \quad B^n, \quad h(B^n), \quad P^n$;

$H^n = \emptyset, \quad S^n = \emptyset, \quad B^n = \emptyset, \quad h(B^n) = \emptyset, \quad P^n = \emptyset$;

for each $x_i \in X$ **such that** $w(x_i) < n$ **do**
$l := n - w(x_i)$;
for each $x_q \in X^l$ **do** % слова длины 2
if $\tilde{x}_i < \tilde{x}_q$ **then** $H^n := \{(x_i, x_q)\} \cup H^n$
else if $\tilde{x}_i > \tilde{x}_q$ **then** $H^n := \{(x_q, x_i)\} \cup H^n$;
end;
for each $r_q = (r_{1q}, r_{2q}) \in S^l$ **do** % тройки с двумя одинаковыми порождающими
if $\tilde{x}_i = \tilde{r}_{1q}$ **or** $\tilde{x}_i = \tilde{r}_{2q}$ **then**
if $\tilde{x}_i < \tilde{r}_q$ **then** $H^n := \{(x_i, r_q)\} \cup H^n$
else $H^n := \{(r_q, x_i)\} \cup H^n$
else
if $\tilde{x}_i < \tilde{r}_{1q}$ **or** $(\tilde{r}_{1q} < \tilde{x}_i < \tilde{r}_{2q}$ **and** $r_{1q} \in S)$
or $(\tilde{x}_i > \tilde{r}_{2q}$ **and** $r_{1q}, r_{2q} \in S)$
then Jacobi(x_1, r_{1q}, r_{2q}); % J вычисляет JH, JB, JhB, JP
$H^n := H^n \cup JH; \quad B^n := B^n \cup JB; \quad h(B^n) := h(B^n) \cup JhB$;
replace JB **in** $h(B^n)$ **by** JhB;
$P^n := P^n \cup JP)$;
end;
for each $r_q \in B^l$ **do**
if $\tilde{x}_i < \tilde{r}_{1q}$ **or** $(\tilde{r}_{1q} < \tilde{x}_i < \tilde{r}_{2q}$ **and** $r_{1q} \in S)$
or $(\tilde{x}_i > \tilde{r}_{2q}$ **and** $r_{1q}, r_{2q} \in S)$

```
            then Jacobi(x_1, r_1q, r_2q);
            H^n := H^n ∪ JH;   B^n := B^n ∪ JB;   h(B^n) := h(B^n) ∪ JhB;
            replace JB in h(B^n) by JhB;
            P^n := P^n ∪ JP);
    end;
end;
S^n := H^n \ B^n;  S̃^n = f(S^n);
for each r_q ∈ S^n replace r_q in h(B^n) by r̃_q.
```

В пункте 3.3.3 описан подалгоритм проверки тождеств Якоби.

Описанный алгоритм является усовершенствованной версией алгоритма представленного в работе [4]. Главное усовершенствование основанно на использовании теоремы 1. Это позволяет резко уменьшить рост числа проверок тождеств Якоби при большом числе N базисных элементов. А именно, когда $(N \to \infty)$ при фиксированном числе порождающих n возможно следующее уменьшение числа тождеств Якоби подлежащих проверке:

$$\binom{N}{3} \Longrightarrow n \cdot \binom{N}{2}.$$

В пункте 3.3.4 приведено полное решение определяющих соотношений для уравнения Кортевега-де Фриза.

Базисные элементы и их коммутаторы веса 5

No.	Базисные элементы и алгебраические соотношения веса 5
8	$[X_1,[X_1,[X_1,[X_1,X_2]]]]$
9	$[X_2,[X_1,[X_1,[X_1,X_2]]]]$
	$[[X_1,X_2],[X_1,[X_1,X_2]]] = -[X_2,[X_1,[X_1,[X_1,X_2]]]] + [X_1,[X_1,X_2]]$
	$[[X_1,X_2],[X_2,[X_1,X_2]]] = -[X_2,[X_1,X_2]]$
	$[[X_1,X_2],X_4] = -[X_1,[X_1,[X_1,[X_1,X_2]]]]$

Дальнейшие вычисления до элементов веса 20 позволяют *угадать* рекуррентные формулы полностью определяющие структуру бесконечномерной алгебры Ли. А убедиться в том, что это действительно решение задачи (2) можно путем проверки конечного числа тождеств Якоби.

Базис алгебры Ли: $X_1, \quad ad^k X_1(X_2) = Y_k, \quad [Y_0, Y_{2k+1}] = Z_k, \quad X_3, \quad \{k\}_0^\infty$.

Алгебра Ли:

$$[X_1,Y_k] = Y_{k+1},\ [X_1,X_4] = 0,\ [X_1,Z_k] = Y_{2k+1},\ [Y_0,Z_q] = 0\ ,$$
$$[Y_0,Y_{2k+1}] = Z_k,\ [Y_0,Y_{2n}] = Y_{2n-1},\ [Y_n,Y_p] = 0,\quad (n+p=2m),$$
$$[Y_n,Y_p] = (-1)^n Z_m + (-1)^p Y_{2m},\ (n+p=2m+1),$$
$$[Y_{2n+1},Z_q] = -Z_{q+n}, [Y_k,X_4] = -Y_{k+3},\ [Y_{2p},Z_q] = -Y_{2q+2p-1},$$
$$[Z_q,Z_k] = 0,\ [X_4,Z_k] = Y_{2k+3}, \{k\}_0^\infty,\ \{m\}_1^\infty,\ \{n\}_1^\infty,\ \{p\}_1^\infty,\ \{q\}_0^\infty.$$

Здесь имеется 6 различных типов базисных элементов X_1, X_4, Y_0, Y_{2n}, Y_{2k+1}, Z_q . Поэтому достаточно проверить 38 тождеств Якоби для всех этих типов базисных элементов.

В пункте 3.3.5 отмечается наличие возвратных полиномов в вычислительном процессе. Заметим, что здесь мы получаем *возвратные полиномы*, которые возникают во всех рядах четного веса начиная с веса 10. Причем возврат каждый раз осуществляется на четыре весовых уровня назад. Например первая возвратная фраза появляющаяся при вычислении 10 - го весового уровня имеет вид

$$[X_2,[X_1,[X_1,[X_1,[X_1,X_2]]]]] = [X_1,[X_1,[X_1,X_2]]]\ .$$

Поскольку вес лидирующего монома в этой фразе равен 6, мы вынуждены начать вычисления с ряда 6 с учетом этой возвратной фразы.

В пункте 3.3.6 описан приём построения частных решений определяющих соотношений. Приведен пример одного из таких частных решений для определяющих соотношений уравнения КдФ.

В разделе 3.4 приведен ещё один пример работы алгоритма с определяющими соотношениями, полученными посредством процедуры Уолквиста - Истабрука для системы уравнений описывающих одномерную ленгмюровскую турбулентность в плазме возбуждённой сильным электромагнитным полем.

Определяющие соотношения:

$$[\hat x_1,\hat x_2] = [\hat x_1,\hat x_3] = [\hat x_1,\hat x_4] = [\hat x_2,\hat x_4] = [\hat x_3,\hat x_4] = [\hat x_5,\hat x_4] = [\hat x_5,\hat x_6] = 0,$$
$$[\hat x_1,[\hat x_1,\hat x_6]] = [\hat x_1,[\hat x_1,\hat x_5]] = [\hat x_1,[\hat x_2,\hat x_5]] = [\hat x_1,[\hat x_3,\hat x_5]] = 0,$$
$$[\hat x_4,[\hat x_1,\hat x_6]] = [\hat x_2,[\hat x_1,\hat x_6]] = [\hat x_3,[\hat x_1,\hat x_6]] = [\hat x_2,[\hat x_2,\hat x_3]] = [\hat x_3,[\hat x_3,\hat x_2]] = 0,$$
$$[\hat x_5,[\hat x_5,\hat x_1]] - [\hat x_6,[\hat x_6,\hat x_1]] = 0,\quad [[\hat x_1,\hat x_6],[\hat x_1,\hat x_5]] = 0,$$
$$[\hat x_2,[\hat x_3,\hat x_5]] + [\hat x_3,[\hat x_2,\hat x_5]] = 0,\quad [\hat x_2,[\hat x_2,\hat x_5]] - [\hat x_3,[\hat x_3,\hat x_5]] = 0,$$
$$2[\hat x_2,\hat x_6] + [\hat x_5,[\hat x_5,\hat x_3]] = 0,\quad 2[\hat x_3,\hat x_6] + [\hat x_5,[\hat x_2,\hat x_5]] = 0,$$
$$[[\hat x_1,\hat x_6],[\hat x_2,\hat x_5]] + 2\hat x_2 = 0,\quad [[\hat x_1,\hat x_6],[\hat x_3,\hat x_5]] + 2\hat x_3 = 0,$$
$$2[\hat x_4,\hat x_6] + [\hat x_5,[\hat x_2,\hat x_3]] + 4[\hat x_5,[\hat x_1,\hat x_5]] = 0$$

для шести порождающих $\{\hat x_i\}(1 \le i \le 6)$.

Алгебра Ли (полное решение): $\hat x_2 = \hat x_3 = 0$, и ненулевые базисные элементы

$$e_1 = \hat x_1,\ e_2 = \hat x_4,\ e_3 = \hat x_5,\ e_4 = \hat x_6,\ e_5 = [\hat x_1,\hat x_5],\ e_6 = [\hat x_1,\hat x_6],$$
$$e_7 = [\hat x_4,\hat x_6],\ e_8 = [\hat x_5,[\hat x_1,\hat x_6]],\ e_9 = [\hat x_6,[\hat x_4,\hat x_6]].$$

Таблица ненулевых коммутаторов:

$$[e_1,e_3] = e_5,\ [e_1,e_4] = e_6,\ [e_2,e_4] = e_7, [e_3,e_5] = -1/2\, e_7,\ [e_3,e_6] = e_8,$$
$$[e_3,e_8] = -1/2\, e_9,\ [e_4,e_5] = e_8,\ [e_4,e_6] = -1/2\, e_7,\ [e_4,e_7] = e_9.$$

Время работы алгоритма реализованного на языке Reduce для последней задачи составляет примерно два часа на компьютере AT/386, 25Mhz в среде MS-DOS.

В главе IV собраны новые НДУ для которых, методом Уолквиста - Истабрука удалось найти конструктивные псевдопотенциальные представления.

В разделе 4.1 для уравнения Ландау - Лифшица с двуосной анизотропией

$$m_{i,t} = \varepsilon_{ikl} m_k (m_{l,xx} + \beta_{lp} m_p), \qquad (3)$$

где β_{ik} - постоянная симметричная матрица размерности 3×3, определяемая симметрией кристалла и геометрией задачи (направлением распространения возмущения в среде); m_i и m_k - компоненты вектора плотности магнитного момента $\vec{m}$ в декартовых координатах, с условием $(\vec{m})^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1$; ε_{ikl} - полностью антисимметричный тензор третьего ранга с условием $\varepsilon_{123} = 1$, методом Уолквиста - Истабрука построена общая схема псевдопотенциальных структур:

$$\hat{F} = m_i \hat{X}_i + \hat{X}_4, \quad \hat{G} = \varepsilon_{ikl} m_i m_{k,x} \hat{X}_l + \tfrac{1}{2} \varepsilon_{ikl} m_i [\hat{X}_k, \hat{X}_l] + \hat{X}_5$$

с определяющими соотношениями:

$$[[\hat{X}_2, \hat{X}_3], \hat{X}_1] = \beta_{13} \hat{X}_2 - \beta_{12} \hat{X}_3 \ ,$$

$$[[\hat{X}_3, \hat{X}_1], \hat{X}_2] = \beta_{12} \hat{X}_3 - \beta_{23} \hat{X}_1 \ ,$$

$$[[\hat{X}_1, \hat{X}_2], \hat{X}_3] = \beta_{23} \hat{X}_1 - \beta_{13} \hat{X}_2$$

$$[[\hat{X}_2, \hat{X}_3], \hat{X}_2] + [[\hat{X}_3, \hat{X}_1], \hat{X}_1] = \beta_{23} \hat{X}_2 - \beta_{22} \hat{X}_3 + \beta_{11} \hat{X}_3 - \beta_{13} \hat{X}_1 \ ,$$

$$[[\hat{X}_3, \hat{X}_1], \hat{X}_3] + [[\hat{X}_1, \hat{X}_2], \hat{X}_2] = \beta_{13} \hat{X}_3 - \beta_{33} \hat{X}_1 + \beta_{22} \hat{X}_1 - \beta_{12} \hat{X}_2 \ ,$$

$$[[\hat{X}_1, \hat{X}_2], \hat{X}_1] + [[\hat{X}_2, \hat{X}_3], \hat{X}_3] = \beta_{12} \hat{X}_1 - \beta_{11} \hat{X}_2 + \beta_{33} \hat{X}_2 - \beta_{23} \hat{X}_3 \ ,$$

$$[\hat{X}_4, \hat{X}_i] = 0 \ , \quad [\hat{X}_4, \hat{X}_5] = 0 \ , \quad [\hat{X}_5, \hat{X}_i] = \varepsilon_{ikl} [[\hat{X}_k, \hat{X}_l], \hat{X}_4].$$

Доказано, что при произвольном β_{lp} данные определяющие соотношения всегда имеют нетривиальные решения со значениями в алгебре Ли группы $SL(2, C)$. Для уравнения Ландау - Лифшица с одноосной анизотропией, т.е. при $\beta_{ik} = \frac{1}{2} \beta n_i n_k$, $(\vec{n})^2 = 1$, найдено несколько частных решений этих определяющих соотношений на базе которых построены конструктивные, в плане построения широких классов решений исходного уранения Ландау - Лифшица, псевдопотенциальные представления.

В разделе 4.2 построена новая точнорешаемая диссипативная система НДУ

$$u_t = u_{xx} - 2(u+v)u_x + (a-1)uv_x + (1-a)(u^2 v + uv^2) + b_1 u_x + (b_3 - b_1)uv,$$
$$v_t = av_{xx} - 2(u+v)v_x - (a-1)vu_x - (1-a)(u^2 v + uv^2) + b_3 u_x + (b_1 - b_3)uv,$$

для которой псевдопотенциальные представление является аналогом лианеризующей подстановки Коула - Хопфа. А именно, замена переменных

$$u = -\frac{\psi_{1,x}}{\psi_1 + \psi_2} \ , \qquad v = -\frac{\psi_{2,x}}{\psi_1 + \psi_2} \ .$$

приводит к двум независимым линейным уравнениям:

$$\psi_{1,t} = \psi_{1,xx} + b_1 \psi_{1,x} \ , \qquad \psi_{2,t} = a\psi_{2,xx} + b_3 \psi_{2,x} \ .$$

Приведен ряд интересных решений исходной нелиненйной системы.

В разделе 4.3 описан метод, обратный методу Уолквиста - Истабрука, который позволяет на базе известных генетических кодов алгебр Ли строить новые точно интегрируемые модели. Этот метод продемонстрирован на примере генетического кода уравнения КдФ. А именно, построено новое нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных:

$$u_t = -\frac{1}{2}(\frac{1}{u^2})_{xxx} + ((f_1(t) + f_2(t))u + \frac{3}{2u})_x,$$

которое обладает псевдопотенциальной структурой общего вида с той же системой порождающих элементов и определяющих соотношений, что и для уранения КдФ.

В **главе V - Заключении** перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

Результаты, вошедшие в диссертацию, опубликованы в работах:

1. Боровик А.Е., Робук В.Н., Линейные псевдопотенциалы и законы сохранения для уравнения Ландау - Лифшица, описывающего нелинейную динамику ферромагнетика с одноосной анизотропией., *ТМФ*, т. 46, N 3, 1981.

2. Робук В.Н. - О классификации эволюционных уравнений второго порядка, в сб. *Операторные пространства и функциональный анализ* под ред. В.А.Марченко, Наукова думка, Киев, 1987, стр. 58-66.

3. Боровик А.Е., Попков В.Ю., Робук В.Н. - Образование нелинейных структур в точно решаемых диссипативных системах. *ДАН СССР*, 1989, т.305, N 4, стр. 841 - 843.

4. Akselrod I.R., Gerdt V.P., Kovtun V.E. and Robuk V.N. - Construction of a Lie Algebra by a Subset of Generators and Commutation Relations, In: *Computer Algebra in Physical Research*, Shirkov D.V., Rostovtsev V.A. and Gerdt V.P. (eds.), World Scientific Publ.Co., Singapore, 1991, pp.306-312.

5. Gerdt V.P., Kovtun V.E. and Robuk V.N. - Genetic Codes of Lie Algebras and Nonlinear Evolution Equations, In: *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems*, V.G.Makhankov V.G. and Pashaev O.K.(eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1991, pp.124-126.

6. Gerdt V.P., Robuk V.N. and Severyanov V.M. - On Construction of Finitely Presented Lie Algebras. *JINR E5-94-302*, Dubna, 1994, (Направлено в Журнал вычислительной математики и математической физики).

Рукопись поступила в издательский отдел
30 октября 1995 года.