ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

5-95-363

На правах рукописи
УДК 519.688
519.957

БЛИНКОВ
Юрий Анатольевич

ИНВОЛЮТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность: 05.13.16 — применение
вычислительной техники, математического моделирования
и математических методов в научных исследованиях

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 1995

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук — **В.П.Гердт**

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, профессор — **М.Г.Дмитриев**

Кандидат физико-математических наук — **Е.В.Панкратьев**

Ведущая организация:
Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва.

Защита диссертации состоится "___"___________ 1995 г. в _____ час. на заседании диссертационного совета Д 047.01.04 при Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "___"___________ 1995 года

Ученый секретарь диссертационного совета — Ивас — З.М.Иванченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Компьютерная алгебра является областью информатики, направленной на автоматизацию процесса решения математических задач путем преобразования математических выражений. Ранее в отечественной литературе она получила название аналитических вычислений (преобразований). Первое название отражает то положение, что алгоритмы преобразования математических выражения носят, преимущественно, алгебраический характер. Компьютерная алгебра, как область информатики, включающая в себя системные, алгоритмические и прикладные аспекты, обладает целым рядом специфических особенностей.

Для эффективной реализации компьютерно-алгебраическими вычислений весьма часто требуется разработка новых алгоритмических и математических методов, даже при наличии самого современного и производительного оборудования, оснащенного новейшим программным обеспечением. Методы информатики и программирования, используемые в компьютерной алгебре, также выходят за рамки тех, которые типичны для численных методов. Абстрактные типы данных, объектно-ориентированное программирование, другие передовые методы приобретают здесь особую значимость.

Одной из наиболее характерных особенностей типов данных, на которых базируется компьютерная алгебра, является понятие их канонического вида. Это отражает глубокую алгебраическую природу используемых объектов, решая задачу единственности их представления для эквивалентных объектов. Проблема нахождения канонического представления оказывается также тесно связанной с понятием упрощения выражений. Канонический вид выражений, несмотря на затраты для его получения, иногда весьма значительные, позволяет значительно повысить эффективность алгоритмов, по сравнению с алгоритмами, базирующимися на неоднозначном представлении одного и того же объекта. К сожалению, это возможно не для всех алгебраических выражений с которыми работает современная компьютерная алгебра. Так например, невозможно, в общем случае, распознать равенство нулю трансцендентных выражений.

Как правило, во всех системах компьютерной алгебры реализована, так называемая, длинная арифметика. Она использует рациональные дроби представленные в каноническом виде, т.е. при сокращенных на наибольший общий делитель числителе и знаменателе. Аналогично, при вычислениях с полиномами и рациональными выражениями также используется каноническое представление. Иногда, когда используемые выражения допускают элемент, играющий роль нулевого, вводят понятие нормального упрощения. Два объекта являются эквивалентными, если их разность обращается в ноль. Другими словами, нормальное упрощение влечет за собой существование канонического вида.

Одними из наиболее важных математических объектов, с точки зрения приложений, являются полиномы и дифференциальные уравнения. Если проблема канонического представления для одного полинома или одного дифференциального уравнения решается введением упорядочения и приведением подобных, то для систем положение неизмеримо усложняется. Это связано с тем, что мы можем складывать, умножать и дифференцировать уравнения, получая таким образом, новые уравнения и добавлять их к системе. Если при полученная система включает первоначальную в качестве подсистемы, то мы, очевидно, действовали эквивалентным способом, т.е. не потеряли и не добавили решения, которые допускает первоначальная система. Ярким примером канонического представления является базис Гребнера для полиномиального случая и его дифференциального аналог для систем дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП).

Каноническое представление может быть также полученно приведением системы к инволютивному виду. История этого вопроса возвращает нас к работам французских математиков Рикье (1910) и Жане (1920), которые заложили основы инволютивного подхода к анализу ДУЧП. Современная математическая трактовка ДУЧП с точки зрения инволютивности может была дана в работах Поммаре.

Целью диссертационной работы является разработка инволютивных алгоритмов для исследования систем нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений с их последующей реализацией в системе REDUCE, а также сравнение инволютивного подхода с активно используемым в настоящее время методом базисов Гребнера.

Научная новизна. Впервые введено общее понятие инволютивного деления мономов, позволяющее самосогласованным образом производить разбиение переменных на мультипликативные и немультипликативные и организовать работу инволютивного алгоритма.

Детально исследованы свойства инволютивного деления. Показано, в частности, что если деление обладает свойством конечности, то это обеспечивает окончание инволютивных алгоритмов построения полиномиальных базисов для любого множества полиномов и для любого допустимого упорядочения мономов.

На основе инволютивного деления введено понятие инволютивной полиномиальной редукции и инволютивной нормальной формы. Для последней доказаны ее линейность и однозначность, что дает определенные вычислительные преимущества по сравнению с обычной нормальной формой, используемой в технике базисов Гребнера.

Используя понятие частичной инволютивности сформулированы аналоги критериев Бухбергера для инволютивных алгоритмов, что позволило оптимизировать наиболее трудоемкую вычислительную часть, связанную с полиномиальной редукцией.

Разработан комплекс программ в системе компьютерной алгебры REDUCE 3.5 для построения инволютивных базисов Поммаре для полиномиальных идеалов и преобразования систем линейных дифференциальных уравнений к инволютивной форме.

С помощью разработанных алгоритмов и программ впервые проинтегрированы определяющие уравнения для классических симметрий нелинейного нестационарного трансзвукового уравнения газовой динамики.

Практическая ценность. Приведение средствами компьютерной алгебры к некоторому каноническому виду помогает извлекать ценную информацию о системе уравнений и ряде свойств ее решений даже без явного нахождения последних. Это позволяет, в частности, производить:

- проверку совместности уравнений;
- вычисление размерности пространства решений;
- исключение некоторого подмножества переменных;
- редукцию системы к конечному числу "более простых" подсистем;
- перевод в другую форму, более подходящую для численного анализа и решения.

Для дифференциальных уравнений этот список может быть расширен:

- анализом симметрий;
- распознаванием специальных внутренних алгебраических свойств, таких, например, как интегрируемость ДУЧП методом обратной задачи рассеяния.

Одной из важных прикладных задач является нахождение симметрий нелинейных дифференциальных уравнений. Наиболее трудоемким по объему вычислений является преобразование определяющих линейных ДУЧП для генераторов симметрии к стандартной инволютивной форме. Это не только дает возможность значительно упростить задачу интегрирования определяющих уравнений, но также позволяет определить размерность группы симметрий и даже найти ее алгебру Ли без явного интегрирования.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Впервые введено понятие инволютивной нормальной формы для деления Поммаре. Для нее доказаны линейность и однозначность. Последнее свойство выполнено для любого множества полиномов, по которому определяется инволютивная нормальная форма, тогда как для нормальной формы по обычному делению это свойство имеет место только для базисов Гребнера.

2. На основе инволютивной нормальной формы по делению Поммаре разработан ряд алгоритмов для построения инволютивных полиномиальных и дифференциальных базисов Поммаре. Доказана конечность этих алгоритмов для нульмерных полиномиальных идеалов. Предложена их оптимизация, позволяющая избежать вычисления повторных продолжений. Показано, что инволютивный базис Поммаре является расширенным базисом Гребнера. При этом он имеет структуру более удобную для получения информации о размерности пространства решений.

3. Для описания с единой точки зрения различных инволютивных алгоритмов впервые введено общее понятие инволютивного деления мономов, позволяющее

разделить независимые переменные на мультипликативные и немультипликативные. Важными частными случаями общего разделения переменных являются разделения Томаса, Жане и Поммаре, используемые для алгебраического анализа систем дифференциальных уравнений. Изучены основные свойства инволютивного деления, в том числе свойство конечности, обеспечивающее окончание алгоритмов построения инволютивных полиномиальных базисов.

4. На основе инволютивного деления введено понятие инволютивной нормальной формы и частичной инволютивности. Последнее позволило ввести в инволютивных алгоритмах аналоги критериев Бухбергера, используемых при построения базисов Гребнера с целью пропуска необязательных редукций. Доказано окончание инволютивного алгоритма для любого конечного инволютивного деления.

5. Инволютивные алгоритмы реализованы в виде пакета в системе REDUCE для построения инволютивных базисов Поммаре полиномиальных идеалов и преобразования систем линейных дифференциальных уравнений к инволютивной форме. На ряде полиномиальных систем показан значительный выигрыш по сравнению со стандартным пакетом построения базисов Гребнера.

6. С помощью инволютивной техники проинтегрированы определяющие уравнения для классических симметрий нелинейного нестационарного трансзвукового уравнения газовой Линя-Рейснера-Тзяна для плоского и впервые для осесимметричного случая.

Апробация работы.
Основные результаты работы докладывались на:
– международном симпозиуме "International IMACS Symposium on Symbolic Computation: New Trends and Developments", Лиль, 1993;
– международном симпозиуме "Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition", Линц, 1993;
– международной конференции "Interval and Computer-Algebraic Methods in Science and Engineering", Санкт-Петербург, 1994;
– международном совещании "Rhein Workshop on Computer Algebra", Карлсруэ, 1994;
– международном совещании "New Computer Techologics in Control Systems", Переславль-Залесский, 1994;
– международном совещании "PoSSo Software Workshop", Париж, 1995.
– на научных семинарах СГУ, МГУ, ЛВТА ОИЯИ, ИК АН Украины, университетов Гренобля, Кана, Лейпцига, Лиля, Лиможа, Исследовательского научного Центра им. Конрада Цузэ в Берлине.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 8 научных работах, которые приведены в списке литературы.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения; содержит 75 страниц наборного текста, включая 5 таблиц и библиографический список литературы из 51 названия.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе - Введении обосновывается актуальность и практическая важность проблематики диссертационной работы, кратко перечислены результаты по главам.

Во второй главе обсуждаются вопросы приведения к каноническому виду множеств мономов. Свойства этих множеств являются общими для систем полиномов и ДУЧП.

В *разделе 2.1* рассматривается вопрос приведения к каноническому виду для деления мономов по полной степени (обычное деление). В данном случае каноническим является автoредуцированное множество мономов.

Определение 1 *Множество U называется авторедуцированным если оно не содержит элементы, которые кратны другим элементам U.*

В *разделе 2.2* вводится новое понятие инволютивного деления, обобщающее деления Томаса, Жане, Поммаре, и на его основе строятся инволютивные множества мономов.

Определение 2 *Будем говорить, что на множестве U определено инволютивное деление на M и записывать $u|_I w$ для инволютивного делителя $u \in U$ монома $w \in M$, если верны следующие утверждения:*

(i). *из $u|_I w$ следует $u|w$.*

(ii). *$u|_I u$ для любого $u \in U$.*

(iii). *Если $u|_I w$ и $v|_I w$ для $u, v \in U$ и $w \in M$ то $u|_I v$ или $v|_I u$.*

(iv). *Если $u|_I v$ и $v|_I w$ для $u, v \in U$ и $w \in M$ то $u|_I w$ (транзитивность).*

(v). *$u|_I uv$ и $u|_I uw$, если и только если $u|_I u(vw)$ (непрерывность).*

Заметим, что обычное деление мономов удовлетворяет условию (iii) только в случае одной независимой переменной. Так, например, уже в случае двух переменных: $x|(xy)$ и $y|(xy)$, но $\neg x|y$ и $\neg y|x$. Определенное выше инволютивное деление позволяет ввести соответствующие правила умножения.

Определение 3 *Если $u|_I(w = uv)$, то моном v будем называть мультипликативным для u, и, соответственно, записывать $w = u \times v$. Если же u является делителем w, но не инволютивным, то будем записывать $w = u \cdot v$, а v называть немультипликативным для u.*

Это определение, вместе со свойством непрерывности (v) инволютивного деления для каждого $u \in U$, разделяет множество переменных $x = M(u, U) \cup NM(u, U)$ на два непересекающихся подмножества ($M \cap NM = \emptyset$) мультипликативных $M(u, U)$ и немультипликативных $NM(u, U)$ переменных. Рассмотрим мономиальное множество U. Введение на нем инволютивного деления, удовлетворяющего $(iii)-(iv)$, возможно с помощью определения подмножеств мультипликативных и немультипликативных переменных. Ясно, что другие условия построения инволютивного деления становятся избыточными.

Следующие примеры инволютивных делений были введены Жане, Томасом и Поммаре для анализа алгебраических дифференциальных уравнений.

Определение 4 *Деление Томаса. Пусть U — конечное множество и*

$$h_i = max\{deg_i(u) \mid u \in U\}.$$

Переменная x_i является мультипликативной для $u \in U$, если $deg_i(u) = h_i$, и немультипликативной в противном случае.

Определение 5 *Деление Жане. Пусть множество U конечно и все мономы $u \in U$ разбиты на группы $[d_1, \ldots, d_i]$, где $d_i = deg_i(u)$. Тогда x_i будет мультипликативной для члена группы $u \in [d_1, \ldots, d_{i-1}]$, если ее степень $deg_i(u) = h_i$. Здесь $h_1 = \max\{deg_1(u) \mid u \in U\}$ и*

$$h_i = \max\{deg_i(v) \mid v \in [d_1, \ldots, d_{i-1}]\} \quad (i > 1).$$

Если $deg_i(u) < h_i$, то x_i является немультипликативной.

Определение 6 *Деление Поммаре. Для монома $x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}$ с $i_k > 0$ переменные x_j при $j \geq k$ являются мультипликативными и, наоборот, x_j при $j < k$ немультипликативными.*

Заметим, что

- Деление Томаса не зависит от упорядочения переменных x_i. Наоборот, деления Жане и Поммаре, по их определению, основаны на упорядочении переменных $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n$.
- Разбиение переменных на мультипликативные и немультипликативные в случае делений Томаса и Жане зависит, вообще говоря, от структуры всего множества мономов U. Напротив, деление Поммаре целиком определяется рассматриваемым мономом безотносительно к другим элементам U. определено.

Для обозначения перечисленных делений будем использовать сокращения T, J, P.

Предложение 7 *Мономиальные деления Томаса, Жане и Поммаре инволютивны.*

Определение 8 *Множество U называется авторедуцированным по инволютивному делению (обозначается $AutoReduce_I(U) = U$), если оно не содержит элементы, которые имеют инволютивного делителя среди других элементов U.*

Введенное определение авторедуцированного множества по инволютивному делению не является каноническим представлением множества, в отличие от Определения 1. Это будет ясно из дальнейшего изложения.

Пример 9 $U = \{xy, y^2, z\}$ $(x \succ y \succ z)$.

мономы	Томас		Жане		Поммаре	
	M_T	NM_T	M_J	NM_J	M_P	NM_P
xy	x	y, z	x, y, z	—	y, z	x
y^2	y	x, z	y, z	x	y, z	x
z	z	x, y	z	x, y	z	x, y

Определение 10 *Множество U называется инволютивным, если для любого $w \in M$, умноженного на какой-нибудь элемент $u \in U$, существует инволютивный делитель $v \in U$, вообще говоря, отличный от u. Другими словами*

$$(\forall u \in U)\ (\forall w \in M)\ (\exists v \in U)\ [\ v|_I(uw)\ ].$$

Определение 11 *Для конечного множества U инволютивное деление называется конечным для множества U, если существует конечное инволютивное множество $\bar{U}$, такое что $U \subseteq \bar{U}$. Множество $\bar{U}$ называется инволютивным замыканием U. Инволютивное деление называется конечным, если существует конечное инволютивное замыкание для любого конечного множества.*

Предложение 12 *Деления Томаса и Жане конечны.*

Теорема 13 *Авторедуцированное инволютивное замыкание конечного множества единственно.*

Заметим, что для случая инволютивного деления только такой достаточно сложный объект, как авторедуцированное инволютивное замыкание, является каноническим представлением согласно Теореме 13. Тогда как для случая обычного деления им является просто авторедуцированное множество.

Пример 14 *(продолжение Примера 9). Авторедуцированное инволютивное замыкание множества $U = (xy, y^2, z)$ $(x \succ y \succ z)$ для делений Томаса, Жане и Поммаре имеет вид*

$$\begin{aligned}
\bar{U}_T &= \{xy, y^2, z, xz, yz, xy^2, xyz, y^2x, xy^2z\},\\
\bar{U}_J &= \{xy, y^2, z, xz, yz\},\\
\bar{U}_P &= \{xy, y^2, z, xz, yz, x^2y, x^2z, \ldots, x^ky, \ldots, x^mz, \ldots\},
\end{aligned}$$

где $k, m \in N$. Этот пример показывает, что деление Поммаре не является конечным. Однако, деление Поммаре конечно для U, но в другом порядке переменных $z \succ y \succ x$, для которого $\bar{U}_P = U$.

Приведенный выше пример показывает, что не для любого инволютивного деления существует каноническое представление конечного множества мономов.

В *разделе 2.3* для характеристики пространства решений систем полиномов и ДУЧП используются понятия полинома Гильберта, характеров Картана, сила (жесткость) дифференциальных уравнений по Эйнштейну, методы построения которых основаны на полученных канонических представлениях.

Третья глава посвящена вопросам исследования систем полиномов.

В *разделе 3.1* содержится описание основ техники базисов Гребнера, в том числе, свойства этих базисов, которые используются в тексте диссертации а также соответствующие алгоритмы.

В *разделе 3.2* на основе рассмотренного во второй главе инволютивного деления вводятся важные понятия инволютивной редукции и инволютивной нормальной формы. Доказываются их основные свойства. При этом для каждого заданного полинома разделение переменных на мультипликативные и не мультипликативные осуществляется по лидирующему терму (моному), который, в свою очередь, определяется выбранным упорядочением мономов.

Следствие 15 *Если множество F авторедуцированно, то инволютивная нормальная форма, для произвольных полиномов p_1, p_2 и p, обладает свойствами:*

(i). Единственность: если $h_1 = NF_I(p,F)$ и $h_2 = NF_I(p,F)$ то $h_1 = h_2$.

(ii). Линейность: $NF_I(p_1+p_2,F) = NF_I(p_1,F) + NF_I(p_2,F)$.

В этом же разделе формулируются условия инволютивности, которые дают основу для алгоритмического построения инволютивных базисов.

Определение 16 *Умножение полинома f на моном u называется продолжением f. Продолжение называется мультипликативным, если u является мультипликативным термом для $lt(f)$, и немультипликативным, в противном случае.*

Определение 17 *Авторедуцированное множество F называется инволютивным, если*

$$(\forall f \in F)\ (\forall u \in M)\ [\ NF_I(fu,F) = 0\ ].$$

Теорема 18 *Множество F инволютивно тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия инволютивности*

$$(\forall f \in F)\ (\forall x_i \in NM(f,F))\ \ [\ NF_I(f \cdot x_i, F) = 0\ ].$$

Далее исследуются вопросы эффективности полученных алгоритмов, основанные на введении критериев редуцируемости к нулю инволютивной нормальной формы.

Определение 19 *Множество полиномов F будем называть частично инволютивным до $v \in M$ если*

$$(\forall f \in F)\ (\forall u \in M)\ (lm(f)\cdot u \preceq v)\ \ [\ NF_I(fu,F) = 0\ ].$$

Следствие 20 *Множество полиномов F частично инволютивно до монома v, тогда и только тогда, когда*

$$(\forall f \in F)\ (\forall x \in NM(f,F))\ (lm(f)\cdot x \preceq v)\ \ [\ NF_I(f\cdot x,F) = 0\ ].$$

Это следствие позволяет ввести аналоги критериев Бухбергера для инволютивной нормальной формы, которые значительно повышают эффективность вычислений.

Затем доказывается, что инволютивный базис является передуцированным базисом Гребнера. Ниже приводится одна из версий инволютивного алгоритма. Здесь через $lt(f)$ обозначается лидирующий терм полинома f для заданного упорядочения $\succ$.

Алгоритм InvolutiveBasis:

Input: F — множество полиномов
Output: G — инволютивный базис для $Ideal(F)$
begin
  $G := AutoReduce_I(F)$
  $P := \emptyset$
  while $\{(lt(g),x) \mid g \in G, x \in NM(g)\} \setminus P \neq \emptyset$ **do**
    choose (g,x) **such that**
      $g \in G,\ x \in NM(g,G),\ (lt(g),x) \notin P$
      and $lt(g)\cdot x$ - minimal $\succ$
    $P := P \cup \{(lt(g),x)\}$
    $h := NF_I(g\cdot x, G)$
    if $h \neq 0$ **then**
      $G := AutoReduce_I(G \cup \{h\})$
  end
end

Пример 21 *Циклические корни 4-го порядка.*

NM_J	NM_P	*Начальное множество полиномов*
x_2, x_3, x_4	—	$x_1+x_2+x_3+x_4$
x_3, x_4	x_1	$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$
x_4	x_1, x_2	$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_1+x_4x_1x_2$
—	x_1, x_2, x_3	$x_1x_2x_3x_4-1$

Здесь выбранно упорядочение: сначала по полной степени, а затем обратное лексикографическое с порядком переменных $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$. В таблице приведены немультипликативные переменные для каждого полинома системы. Применение алгоритма *InvolutiveBasis* дает следующий вид инволютивных базисов по делениям Жане и Поммаре

NM_J	NM_P	Базисы Жане и Поммаре
—	—	$x_1+x_2+x_3+x_4$
x_1	x_1	$x_2^2+2x_2x_4+x_4^2$
x_1, x_2	x_1, x_2	$x_2x_3^2+x_3^2x_4-x_2x_4^2-x_4^3$
x_1, x_2, x_3	x_1, x_2, x_3	$x_2x_3x_4^2+x_3^2x_4^2-x_2x_4^3+x_3x_4^3-x_4^4-1$
x_1, x_2, x_3	x_1, x_2, x_3	$x_2x_4^4+x_4^5-x_2-x_4$
x_1, x_2	x_1, x_2, x_3	$x_3^3x_4^2+x_3^2x_4^3-x_3-x_4$
x_1, x_2, x_3	x_1, x_2, x_3	$x_3^2x_4^4+x_2x_3-x_2x_4+x_3x_4-2x_4^2$
	x_1, x_2, x_3	$x_3^4x_4^2+x_2x_3-x_3^2-x_2x_4+x_3x_4-x_4^2$
		....
	x_1, x_2, x_3	$x_3^k(x_3^4x_4^2+x_2x_3-x_3^2-x_2x_4+x_3x_4-x_4^2)$
		....

Базис в случае инволютивного деления Жане содержит семь полиномов и совпадает с базисом Гребнера, тогда как в случае Поммаре он бесконечен и имеет показанные продолжения шестого полинома по его немультипликативной переменной x_3. Видно, что в случае одномерного идеала базис по инволютивному делению Поммаре может быть бесконечен.

В четвертой главе рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений.

Раздел 4.1 содержит развитие идей построения базиса Гребнера для дифференциального случая.

В разделе 4.2 Вводится понятие инволютивной нормальной формы для случая дифференциального инволютивного базиса и приведен алгоритм его построения в линейном случае. Проводятся аналогии относительно алгебраических свойств дифференциальных уравнений и полиномов. Прежде всего, это следующее соответствие между дифференциальными термами и мономами

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}u_j}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \Longleftrightarrow x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},$$

которое позволяет, в частности, вводить упорядочение дифференциальных термов по аналогии с обычными мономами. Мономы, соответствующие различным зависимым переменным u_j, рассматриваются как принадлежащие к разным множествам мономов.

Соответственно, мультипликативные и немультипликативные переменные для дифференциальных термов определяются по их мономиальным аналогам.

Определение 22 *Мультипликативные и немультипликативные переменные дифференциального полинома и, соответственно, мультипликативные и немультипликативные продолжения определяются по его лидирующему терму (моному).*

Это дает возможность провести полную аналогию между полиномиальными уравнениями и линейными однородными дифференциальными системами с одной зависимой переменной и постоянными коэффициентами. Более того, преобразование от полиномиальной к дифференциальной системе при приведении к инволютивному виду сохраняет взаимно-однозначное соответствие между дифференциальными термами и мономами. В этом специальном случае, следовательно, построение дифференциального инволютивного базиса или базиса Гребнера может осуществляться посредством их алгебраических аналогов. Описываются алгоритмические различия в построении алгебраических и дифференциальных инволютивных базисов.

Приводится описание алгоритма *DiffInvolutiveBasis* для систем линейных дифференциальных уравнений. Подчеркиваются преимущества инволютивных базисов перед редуцированными дифференциальными базисами Гребнера как канонической формы для линейных ДУЧП. Дифференциальное отображение нульмерной полиномиальной системы имеет общее решение точно зависящее от количества произвольных констант, дающего число корней системы с учетом их кратности. Размерность полиномиального идеала совпадает с числом произвольных функций в общем решении соответствующих ДУЧП.

Инволютивная форма линейных ДУЧП может называться канонической не только потому, что это - дифференциальный базис Гребнера, но также благодаря факту, что инволютивные системы особенно удобны для выбора начальных условий, которые обеспечивают существование единственного и локально голоморфного решения. Кроме того, можно вычислять такие списки начальных условий, которые находятся во взаимно-однозначном соответствии с произвольными константами или функциями в общем решении.

В пятой главе обсуждаются вопросы реализации описанных в предыдущих главах инволютивных алгоритмов.

В *разделе 5.1* описываются пакет INVBASE, реализующий полиномиальные инволютивные алгоритмы для деления Поммаре. и приводятся примеры использования пакета для вычисления полиномиальных инволютивных базисов. Демонстрируется преимущество пакета INVBASE по сравнению со стандартным пакетом GROEBNER системы REDUCE реализующем алгоритм Бухбергера для построения базисов Гребнера. Разность в быстродействии варьируется от 2-х до 20 раз, причем разница во времени счета возрастает с ростом сложности примера.

Во всех вычислениях с пакетами INVBASE и GROEBNER использовано упорядочение мономов по полной степени, а при равных полных степенях по обратному лексикографическому порядку (DegRevLex). Расчеты проводились на компьютере AT/386 с 8 Mb RAM и частотой 25 MHz под управлением MS-DOS. Ниже представлены результаты вычислений для следующих примеров:

Пример (I)

$$x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2+x_1x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0,$$
$$x_1^2x_2^2x_3+x_1x_2^2x_3^2+x_1^2x_2x_3+x_1x_2x_3+x_2x_3+x_1+x_3=0,$$
$$x_1^2x_2^2x_3^2+x_1^2x_2^2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_3+x_3+1=0.$$

Пример (II)

$$
\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0,\\
&x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1=0,\\
&x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+x_4x_5x_1+x_5x_1x_2=0,\\
&x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+x_3x_4x_5x_1+x_4x_5x_1x_2+x_5x_1x_2x_3=0,\\
&x_1x_2x_3x_4x_5-1=0.
\end{aligned}
$$

Пример (III)

$$
\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0,\\
&x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1=0,\\
&x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+x_4x_5x_1+x_5x_1x_2=0,\\
&x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+x_3x_4x_5x_1+x_4x_5x_1x_2+x_5x_1x_2x_3=0,\\
&x_1x_2x_3x_4x_5-1=0.
\end{aligned}
$$

Пример (IV)

$$
\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0,\\
&x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_6+x_6x_1=0,\\
&x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+x_4x_5x_6+x_5x_6x_1+x_6x_1x_2=0,\\
&x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+x_3x_4x_5x_6+\\
&x_4x_5x_6x_1+x_5x_6x_1x_2+x_6x_1x_2x_3=0,\\
&x_1x_2x_3x_4x_5+x_2x_3x_4x_5x_6+x_3x_4x_5x_6x_1+\\
&x_4x_5x_6x_1x_2+x_5x_6x_1x_2x_3+x_6x_1x_2x_3x_4=0,\\
&x_1x_2x_3x_4x_5x_6-1=0.
\end{aligned}
$$

В приводимой ниже таблице использованы обозначения:

- T_1 - время счета инволютивного базиса, затраченное пакетом INVBASE
- T_2 - время вычисления редуцированного базиса Гребнера, затраченное пакетом GROEBNER
- N_1 - число элементов инволютивного базиса
- N_2 - число элементов редуцированного базиса Гребнера

(пример) порядок переменных	T_1(sec.)	T_2(sec.)	N_1	N_2
(I) $x_1 \succ x_2 \succ x_3$	16	33	15	15
(II) $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5$	11	8	23	20
(II) $x_1 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_4$	9	7	23	20
(III) $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5$	149	341	31	25
(III) $x_1 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_4$	1948	3050	32	24
(III) $x_4 \succ x_1 \succ x_5 \succ x_2 \succ x_3$	87	1190	32	23
(III) $x_1 \succ x_5 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$	94	2410	25	24
(IV) $x_1 \succ x_2 \succ x_6 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5$	7657	>140000	46	—
(IV) $x_5 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_6 \succ x_2 \succ x_1$	3795	77400	46	45

Вычислительные эксперименты показывают довольно высокую степень устойчивости числа вычислительных операций по инволютивным алгоритмам при изменении упорядочения переменных.

Приведенная ниже таблица показывает времена счета с помощью пакета INVBASE при различных порядках переменных для системы (IV) на рабочей станции IBM RS/6000-550 с частотой 41 Мгц.

порядок переменных	время (sec.)
$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_6$	1085
$x_5 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_6 \succ x_2 \succ x_1$	694
$x_1 \succ x_2 \succ x_6 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5$	869
$x_6 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_1$	446
$x_3 \succ x_1 \succ x_5 \succ x_6 \succ x_2 \succ x_4$	233
$x_6 \succ x_5 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4$	662
$x_4 \succ x_6 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_3$	543
$x_2 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_6 \succ x_6$	729

Приведенные времена говорят о значительно более высокой устойчивости инволютивного алгоритма, по сравнению с алгоритмом Бухбергера при изменении порядка переменных. В случае алгоритма Бухбергера времена счета различаются на порядки.

В *разделе 5.2* содержится описание пакета DINVBASE, реализующего на языке REDUCE алгоритм *DiffInvolutiveBasis* для приведения систем линейных ДУЧП к инволютивному виду. Здесь же на примере линейной системы ДУЧП из трех уравнений третьего порядка и с тремя независимыми переменными демонстрируются вычислительные преимущества работы по вышеописанной аналогии с полиномиальными уравнениями вместо прямого счета дифференциального редуцированного базиса Гребнера.

В *разделе 5.3* в качестве приложения разработанных алгоритмов и пакетов решается задача нахождения симметрий для нелинейного трансзвукового уравнения газовой динамики Линя–Рейснера–Тзяна

$$2u_{xt}+u_xu_{xx}-u_{yy}-w\frac{u_y}{y}=0,$$

для плоского $w = 0$ и осесимметричного $w = 1$ случаев. Условие того, что $f(t, x, y, u, u_t, u_x, u_y)$ является производящей функцией инфинитезимальных симметрий уравнения дается следующей системой из 12 линейных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
& f_{u_t u_t} = 0, \quad f_{u_t u_x} = 0, \quad f_{u_t u_y} = 0, \quad f_{u_x u_x} = 0, \quad f_{u_x u_y} = 0, \quad f_{u_y u_y} = 0, \\
& 2(f_{tx} + u_t\, f_{xu} + u_x\, f_{tu} + u_t\, u_x\, f_{uu}) + u_x\, (f_{xx} + 2\, u_x\, f_{xu} + 2\, u_x\, u_x\, f_{uu}) - \\
& (f_{yy} + 2\, u_y\, f_{yu} + u_y\, u_y\, f_{uu}) + w\, \frac{u_y}{y}(2\, f_{yu_y} + 2\, u_y\, f_{uu_y} + f_u) \\
& -\frac{w}{y}(f_y + u_y\, f_u) - w\, \frac{u_y}{y^2}\, f_{u_y} = 0, \quad f_{xu_t} + u_x\, f_{uu_t} = 0, \\
& 2\, (f_u + \ f_{xu_x} + f_{tu_t} + u_t\, f_{uu_t} + u_x\, f_{uu_x}) + u_x\, (2\, f_{xu_t} + 2\, u_x\, f_{uu_t}) - \\
& 2\, (2\, f_{yu_y} + 2\, u_y\, f_{uu_y} + f_u) = 0, \quad (f_{xu_y} + u_x\, fuu_y) - (f_{yu_t} + u_y\, f_{uu_t}) = 0, \\
& 2\, (f_{tu_x} + u_t\, f_{uu_t}) + (f_x + u_x\, f_u) + u_x\, (f_u + 2\, f_{xu_x} + 2\, u_x\, f_{uu_x}) - \\
& u_x\, (2\, f_{yu_y} + 2\, u_y\, f_{uu_y} + f_u) = 0, \\
& f_{tu_y} + u_t\, f_{uu_y}) + u_x\, (f_{xu_y} + u_x\, f_{uu_y}) - f_{yu_x} - u_y\, f_{uu_x} = 0.
\end{aligned}
$$

При $w = 1$ инволютивный базис с упорядочением переменных

$$u_t \succ u_x \succ u_y \succ u \succ x \succ y \succ t$$

вычисленный с помощью пакета DINVBASE, состоит из 25 уравнений:

$$
\begin{array}{lll}
\text{класс} & u_t & f_{u_t u_t} = 0, \\
\text{класс} & u_x & f_{u_t u_x} = 0, \\
 & & f_{u_x u_x} = 0, \\
\text{класс} & u_y & f_{u_t u_y} = 0, \\
 & & f_{u_x u_y} = 0, \\
 & & f_{u_y u_y} = 0, \\
\text{класс} & u & f_{u_t u} = 0, \\
 & & f_{u_x u} = 0, \\
 & & f_{u_y u} = 0, \\
 & & f_{uu} = 0, \\
\text{класс} & x & f_{u_y x} = 0, \\
 & & f_{u_x x} + \dfrac{1}{3}\, f_u = 0, \\
 & & f_{xx} = 0, \\
 & & f_{ux} = 0, \\
 & & f_{u_t x} = 0, \\
\text{класс} & y & f_{yy} - \dfrac{1}{y^2}\, (2\, y^2\, f_{xt} - f_{u_y} - y\, f_y) = 0, \\
 & & f_{u_x y} = 0, \\
 & & f_{u_y y} = 0, \\
 & & f_{uy} = 0, \\
 & & f_{u_t y} = 0, \\
 & & f_{xy} = 0, \\
\text{класс} & t & f_{u_t t} - \dfrac{1}{3}\, f_u = 0, \\
 & & f_{u_x t} + \dfrac{1}{6}\, (u_x\, f_u + 3\, f_x) = 0, \\
 & & f_{u_y t} = 0, \\
 & & f_{ut} = 0.
\end{array}
$$

Характеры Картана для этого варианта системы говорят о том, что в решении будет три произвольные функции от младшей, в смысле упорядочения, переменной t:

$$\alpha_2^1 = 3, \ \alpha_2^2 = 0, \ \alpha_2^3 = 0, \ \alpha_2^4 = 0, \ \alpha_2^5 = 0, \ \alpha_2^6 = 0, \ \alpha_2^7 = 0.$$

Поскольку система преобразована к каноническому виду полученный инволютивный базис легко интегрируется, приводя к следующему общему решению

$$f = \sum_{i=1}^{7} f_i,$$

где

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 2axu_x + ayu_y - 4au, \\
f_2 &= 5bu_t + bxu_x + 3byu_y + 3bu, \\
f_3 &= 5ct^2u_t + c(2xy + 3y^2)u_x + 6ctyu_y + 6ctu - 2cx^2, \\
f_4 &= \gamma u_x - 2\gamma' x - 2\gamma'' y^2, \\
f_5 &= du_t, \\
f_6 &= \ln y, \\
f_7 &= \tau.
\end{aligned}
$$

Здесь a, b, c, d — произвольные постоянные, а γ, σ, τ — произвольные функции t. В осесимметричном случае решение получено впервые.

В *заключении* перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

Результаты, вошедшие в диссертацию, опубликованы в работах:

1. Блинков Ю.А., Чернов И.А. "Редукция нестационарного трансзвукового уравнения к квазистационарному", Аэродинамика, Саратов, 1988, вып. 11 (14), 110-131.

2. Zharkov A.Yu. and Blinkov Yu.A. (1993). Involutive Approach to Solving Systems of Algebraic Equations. In: *Proceedings of "SC 93", International IMACS Symposium on Symbolic Computation: New Trends and Developments*, Jacob, G., Oussous, N.E., Steiberg S. (eds.), Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, Lille, pp.11-16.

3. Жарков А.Ю., Блинков Ю.А. *Инволютивные системы алгебраических уравнений.*, Программирование, 1994, 1, 53-56.

4. Zharkov A.Yu. and Blinkov Yu.A. Algorithm for Constructing Involutive Bases of Polynomial Ideal. International Conference on Interval and Computer-Algebraic Methods in Science and Engineering. Interval'94. March 7-10, 1994. St-Petersburg, Russia. 258-260.

5. Zharkov A.Yu. and Blinkov Yu.A. INVBASE: A Package for Computing Involutive Bases. Proceeding of the Rhein Workshop on Computer Algebra (Karlsruhe, Germany, March 22-24, 1994). J. Calmet (Ed.), Institute of Algorithms and Cognitive Systems, University of Karlsruhe, 1994, 179-181.

6. Zharkov A.Yu. and Blinkov Yu.A. Algorithm for Reducing Systems of PDEs to Involutive Form. Proceeding of the International Workshop New Computer Techologics in Control Systems. (Pereslavl-Zalessky, July 11-15, 1994), Program Systems Institute, Pereslavl-Zalessky, 1994, 90-92.

7. Zharkov A.Yu. and Blinkov Yu.A. - Involutive Bases of Zero-Dimensional Ideals, *Preprint JINR* E5-94-318 (Dubna, 1994). Submitted to J. Symb. Comp.

8. Gerdt V.P. and Blinkov Yu.A. - Involutive Polynomial Bases. Publication IT-95-271, Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille. Lille, 1995.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 августа 1995 года.