ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

5-95-155

На правах рукописи
УДК 531.19

ИВАШКЕВИЧ
Евгений Васильевич

СТРУКТУРНЫЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АБЕЛЕВОЙ МОДЕЛИ САМООРГАНИЗОВАННОЙ КРИТИЧНОСТИ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 1995

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник В.Б. Приезжев

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник С.Л. Гинзбург
доктор физико-математических наук,
профессор В.И. Оселедец

Ведущая организация:
Вычислительный центр РАН

Защита диссертации состоится мая 1995 г. в часов на заседании специализированного совета К047.01.01 при Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований по адресу: Московская обл. г. Дубна.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан апреля 1995 г.

Ученый секретарь
специализированного совета К047.01.01
доктор физико-математических наук А.Е. Дорохов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В 1987 г. П.Бак, Ч.Танг и К.Визенфельд предложили теорию самоорганизованной критичности для объяснения поведения больших динамических систем. Согласно этой теории, многие динамические системы естественным образом эволюционируют к определенному критическому состоянию, в котором они теряет характерные масштабы как длины, так и времени, т.е. их корреляционный радиус становится равным бесконечности, а корреляционные функции имеют степенные асимптотики. Это критическое состояние не зависит от начального состояния системы, и, в отличие от обычных критических явлений, не требуется никакой точной подгонки параметров, чтобы достичь его. В этом состоянии малое событие вызывает цепную реакцию, которая может повлиять на любое число элементов системы. Как следует из теории критичности малые события обусловлены том же механизмом, что и крупные. Более того, сложные динамические системы никогда не достигают равновесия, а эволюционируют от одного метастабильного состояния к другому.

В последние семь лет эксперименты и модельные расчеты показали, что многие динамические системы, стоящие в центре исследований в геологии, экономике, биологии и метеорологии, обнаруживают признаки самоорганизованной критичности. Как полагают, это явление также должно лежать в основе описания критических явлений, связанных с диссипативным транспортом в открытых системах, таких, например, как фликкер-шум в проводнике.

Начиная с пионерских работ П.Бака с соавторами, было предложено огромное количество различных компьютерных моделей для описания самоорганизованной критичности. Это прежде всего модели песка (sandpile models), модели землетрясений, модели лесных пожаров, модели критического [...] [...]ечных СКВИДах и гранулированных сверхпроводниках, знаменитая игра "Жизнь", предложенная Конвеем в 1970 г., и многие другие.

Абелева модель самоорганизованной критичности, хотя и является простейшей из возможных, но, по-видимому, схватывает все основные стороны этого явления. Поэтому попытка аналитического рассмотрения этой модели и сравнение с богатым численным и экспериментальным материалом представляется весьма актуальной.

Цель работы. Целью настоящей диссертации является развитие уже существующих и создание новых аналитических методов исследования абелевой модели самоорганизованной критичности.

Научная новизна и практическая ценность.

Разработанные в диссертации методы могут быть использованы для исследования широкого класса моделей самоорганизованной критичности. Полученные в диссертации результаты позволяют понять основные свойства различных вариантов абелевой модели самоорганизованной критичности и могут служить основой для дальнейших исследований в этом направлении. Предложенные в диссертации понятия прямой и обратной волн осыпания являются основой для более глубокого понимания динамического поведения этих моделей.

На защиту выдвигаются следующие результаты.

- разработан новый метод вычисления граничных корреляционных функций, основанный на представлении конфигураций модели через покрывающие деревья на решетке;

- на основе предложенного метода вычислены вероятности высот на границе и парные корреляционные функции как для задачи Неймана, так и для задачи Дирихле;

- на основе предположения о применимости конформной теории поля к непрерывному пределу этой модели показано, что объемные корреляторы должны подчиняться тому же степенному закону что и

граничные;

- изучены поправки конечного размера для распределений единичных высот и показано их полное согласие с предсказаниями конформной теории поля, что оправдывает выводы, сделанные в предыдущем пункте;

- вычислены точно граничные индексы лавин как для двумерной абелевой модели самоорганизованной критичности, так и для её многомерных аналогов, причем вычисления эти основаны на том наблюдении, что динамика модели естественно представляется в виде последовательных шагов, названных в диссертации волнами осыпаний;

- получены оценки аналогичных объемных индексов, хорошо согласующиеся с результатами компьютерного моделирования методом Монте-Карло.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на: International Conference on Dynamical Systems and Chaos, Tokyo, May 1994; XI-th International Congress of Mathematical Physics, Paris, July 1994; International Congress of Mathematicians, Zürich, august 1994; International seminar "Strongly Correlated Systems", Dubna, September 1994; 34-th Schladming Winter School on Theoretical Physics, Austria, March 1995; Семинаре кафедры "Теория вероятности" МГУ, Москва; Семинаре отдела "Статистическая механика" Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, Дубна.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-6].

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения и заключения. Общий объем диссертации 81 страницы машинописного текста, включая 12 рисунков и список литературы из 61 наименования.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы, дается краткий обзор развития основных проблем, затронутых в диссертации, а также описаны структура диссертации и ее основные результаты.

В первой главе *"Вероятности высот и корреляционные функции"* дается определение абелевой модели самоорганизованной критичности и ставится основная проблема вычисления её корреляционных функций. Естественная формулировка модели самоорганизации дается в терминах целочисленной функции высот z_i принимающей значения на квадратной решетке $\mathcal{L}$. Физически z_i может быть истолкована как высота столбика песка в точке i, а правило изменения этой переменной как правило осыпания песка. Случайное добавление песка в систему вызывает её эволюцию во времени. Песчинки добавляются в случайно выбранные узлы решетки и добавление песчинки увеличивает высоту в этом узле на единицу. Если эта высота превышает некоторое критическое значение Δ_{ii}, то эта точка осыпается; в результате её высота уменьшается на Δ_{ii}, а высоты каждого из её ближайших соседей j увеличиваются на $-\Delta_{ij}$. Здесь Δ это матрица дискретного Лапласиана решетки $\mathcal{L}$, со следующими элементами

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 4 & , \quad i=j \\ -1 & , \quad |i-j|=1 \\ 0 & , \quad \text{otherwise} \end{cases} . \tag{1}$$

где символ $|i-j|$ обозначает расстояние между точками i и j.

Для того, чтобы сформулировать правила осыпания на границе $\partial\mathcal{L}$ решетки, мы ставим две стандартные граничные задачи для Лапласиана на конечной решетке $\mathcal{L}$.

1. *Задача Дирихле.* Открытые граничные условия, когда $\Delta_{ii} = 4$ для $i \in \partial\mathcal{L}$, и, следовательно, песчинки могут покидать систему через границу.
2. *Задача Неймана.* Закрытые граничные условия, когда $\Delta_{ii} = 3$ для $i \in \partial\mathcal{L}$, и песчинки не могут покидать систему через $\partial\mathcal{L}$.

Если все границы закрыты, то никакое устойчивое состояние системы, конечно же, невозможно. Следовательно мы предполагаем, что хотя бы одна граница решетки является открытой.

Состояния, в которых ни одна высота не превышает критическую, называются устойчивыми состояниями. Их число, как нетрудно видеть, равно 4^{N^2}, где N - размер решетки. В процессе своей стохастической эволюции эта модель проходит по множеству устойчивых конфигураций, но в конце концов замыкается в некотором его подмножестве (аттракторе), которое уже не может покинуть. Этот процесс называется самоорганизацией, а множество состояний аттрактора - рекуррентными состояниями или состояниями самоорганизованной критичности (СОК). Как было показано Д.Дхаром все эти состояния в процессе дальнейшей эволюции модели возникают с равной вероятностью, а их число дается следующей простой формулой

$$\mathcal{N}_R = \det\Delta \tag{2}$$

Как известно, число покрывающих деревьев на этой решетке, согласно матричной теореме Кирхгофа, дается точно таким же выражением. Вскоре С.Н.Мажумдар и Д.Дхар доказали взаимно однозначное соответствие между деревьями на графе и СОК состояниями этой модели. Теорема Кирхгофа представляет собой эффективное средство для исследования статических характеристик абелевой модели, более того эта теорема обнаруживает также близкое её родство с другими точно решаемыми моделями статистической механики такими как модель Поттса, модель димеров и т.д.

Пространственная структура состояний самоорганизованной критичности полностью характеризуется корреляционными функциями: вероятностью $\mathcal{P}_a$, $a \in \{1,2,3,4\}$ обнаружить высоту $z_i = a$ в данной точке решетки i, двухточечной корреляционной функцией $\mathcal{P}_{ab}(r)$ для любых точек $i, j \in \mathcal{L}$ с высотами a и b соответственно, расположенными на расстоянии r, и т.д.

Для единичной высоты объемные вероятности и парные корреляционные функции были вычислены С.Н.Мажумдаром и Д.Дхаром. Для того, чтобы вычислить все остальные вероятности высот, В.Б.Приезжев недавно разработал довольно сложную технику, основанную на перечислении θ-графов. Он обнаружил, что несмотря на локальный характер переменных (высот) в модели самоорганизации, их представление посредством деревьев существенно нелокально, за исключением простейшего случая единичной высоты. К сожалению, метод перечисления θ - графов чрезвычайно трудно (а может быть и невозможно) непосредственно обобщить для вычисления асимптотики парного коррелятора.

Известно, однако, что конформная теория поля обеспечивает тесную связь между граничными и объемными свойствами двумерных моделей. Поэтому, решив граничную задачу, мы можем надеяться получить соответствующую информацию и об объемных корреляциях в модели. Именно этому подходу к изучению корреляционных функций посвящена первая глава диссертации.

Основная идея метода вычисления граничных корреляторов сводится к следующему. Сначала, следуя идее В.Б.Приезжева, мы находим представление высот на границе через нелокальные древесные диаграммы. Затем, при помощи теоремы Кирхгофа мы вычисляем некоторые локальные диаграммы. Оказывается, что они могут быть разложены в суммы как раз тех нелокальных диаграмм, которые встречаются

в определении вероятностей высот. Получающаяся в результате система линейных уравнений оказывается полной и позволяет вычислить все нелокальные диаграммы и, тем самым, найти все корреляционные функции. При этом оказалось, что все граничные парные корреляторы имеют одну и ту же экспоненту $x_{\|} = 2$. Следовательно, они должны описываться в скейлинговом пределе одним и тем же флуктуирующим полем, т.е. все высоты должны быть связаны с одним и тем же конформным полем в соответствующей конформной теории поля. Теперь ясно, что для того, чтобы описать поведение всех объемных корреляторов, достаточно детально изучить только один из них. Как уже упоминалось С.Н.Мажумдар и Д.Дхар выполнили эту работу для коррелятора единичных высот, и его асимптотика также оказалась r^{-4}.

Отсюда мы можем заключить, что не только граничные, но и все объемные корреляторы имеют такую же асимптотику. Интересно заметить, что в 0-компонентной модели Поттса, все конфигурации которой также находятся во взаимно однозначном соответствии с покрывающими деревьями, коррелятор энергия-энергия также имеет экспоненту $x = 2$ на основе этого можно предположить, что оператор энергии в 0-компонентной модели Поттса соответствует высоте в абелевой модели самоорганизации.

Во второй главе *"Конечно-размерный анализ"* мы фактически проверяем сделанное в предыдущей главе предположение о применимости конформной теории поля к этой задаче. Для этого мы вычисляем конечно-размерные поправки к вероятности обнаружения единичной высоты и к соответствующим корреляционным функциям на полосе шириной L для трех типов граничных условий: открытых, закрытых и периодических. Значение граничного показателя $x_{\|}$, согласно предсказаниям конформной теории поля, должно быть связано с амплитудой A обратной корреляционной длины $\xi^{-1} = A/L$, которая соответствует экспоненциальному убыванию асимптотики парного коррелятора вдоль бесконечно длинной полосы ширины L. А именно, амплитуда и показатель должны быть связаны соотношением

$$A = \begin{cases} \pi x_{\parallel} \ , & \text{открытые гран. условия} \\ 2\pi x \ , & \text{периодические гран. условия} \end{cases} \tag{3}$$

В этой главе нами получены следующие результаты: В случае бесконечно длинной полосы ширины L, убывание парного коррелятора $\mathcal{P}_{11}(r)$ вдоль центральной линии полосы происходит по закону

$$\mathcal{P}_{11}(r;L) = -\mathcal{P}_1^2(L/2)\frac{\pi^4}{L^4}e^{-2\pi r/L} + \cdots \ , \tag{4}$$

как в случае открытых, так и в случае закрытых граничных условий. Здесь конечно-размерная поправка к вероятности единичной высоты в середине полосы $\mathcal{P}_1(L/2)$ равна:

$$\mathcal{P}_1(L/2) = \mathcal{P}_1(\infty)(1 \pm \frac{\pi^2}{4L^2} + \cdots) \ . \tag{5}$$

Верхний знак соответствует открытым, а нижний закрытым граничным условиям

Для периодических граничных условий найденный нами парный коррелятор имеет следующий вид:

$$\mathcal{P}_{11}(r;L) = -\mathcal{P}_1^2(L/2)\frac{8\pi^4}{L^4}e^{-4\pi r/L} + \cdots \ , \tag{6}$$

где

$$\mathcal{P}_1(L/2) = \mathcal{P}_1(\infty)(1 - \frac{4\pi^5}{15(\pi-2)L^4} + \cdots) \ . \tag{7}$$

Эти результаты прекрасно согласуются с предсказаниями конформной теории поля. Действительно, как было получено в предыдущей главе граничный критический индекс равен $x_{\parallel} = 2$, а из (4) мы имеем $A = 2\pi$, в согласии с соотношением (3). Для периодических граничных

условий уравнение (6) дает $A = 4\pi$, а объемный индекс для коррелятора единичных высот, вычисленный С.Н.Мажумдаром и Д.Дхаром равен $x = 2$, что опять же согласуется с соотношением (3).

В третей главе *"Динамические критические индексы"* мы изучаем динамику лавин в абелевой модели самоорганизации. Свойство абелевости модели допускает произвольный порядок осыпания неустойчивых точек в процессе схода лавины. Мы выбираем специальный, но наиболее естественный способ среди всех возможных. А именно, добавляя частицу в данную точку с максимальной высотой, мы осыпаем её только один раз и не даем ей осыпаться второй раз пока все другие точки не станут устойчивыми. Оказывается, что все остальные точки решетки при этом не могут осыпаться более чем один раз. Осыпавшиеся точки мы назвали первой волной осыпаний. После этого мы осыпаем выбранную нами точку второй раз, снова предохраняя её от последующих осыпаний. Таким образом мы строим вторую, третью и.т.д. волны осыпаний. Когда исходная точка станет устойчивой, процесс остановится. Таким образом мы получаем представление динамики лавины в виде последовательности волн однократных осыпаний.

При этом нетрудно заметить, что процесс осыпания каждой волны в точности совпадает с процедурой построения покрывающего дерева по данной конфигурации, что естественно приводит к графическому представлению волн осыпаний как двукорневых деревьев на решетке. Эти деревья состоят из двух не связанных между собой кластеров, причем первый включает в себя точки, осыпавшиеся в результате схода волны, а второй все остальные точки решетки.

С другой стороны, двукорневые деревья дают естественное представление решеточной гриновской функции G_{ij}. Мы доказали, что G_{ij} строго пропорционально числу двукорневых деревьев таких, что точки i и j принадлежат одному кластеру. Таким образом, картина волн осыпаний дает теоретико-графическое объяснение простого но глубокого результата Д.Дхара что G_{ij} равно ожидаемому числу осыпаний в точке j при условии что лавина была инициирована добавлением частицы в точке i.

Параллельное рассмотрение волн осыпаний, двукорневых деревьев и гриновской функции позволяет прояснить многие особенности процесса осыпания. В частности, можно построить простую процедуру восстановления предыдущей волны из последующих и, вообще, исходной устойчивой конфигурации по конечной.

Используя известные асимптотики функции Грина легко найти вероятностное распределение размеров волн, которое ведет себя как $1/s$ при больших s. Этот степенной закон, вообще говоря, не может быть непосредственно связан с асимптотикой распределения лавин. Однако при рассмотрении лавин, инициированных на границе решетки, ситуация меняется радикально. В этом случае лавина, как нетрудно понять, состоит только из одной волны. Поэтому распределения волн и лавин в этом случае совпадают. Мы рассматриваем наиболее общий случай, когда два луча границы образуют угол α. Из теории функций комплексного переменного известно, что гриновская функция оператора Лапласа в области, ограниченной углом α имеет вид

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}(z^{-\frac{\pi}{\alpha}}) \qquad (8)$$

где $z = x + iy$, (x,y) прямоугольные координаты на решетке. Такой характер асимптотики гриновской функции приводит к следующему распределению граничных лавин

$$\mathcal{D}(s) \sim s^{-1-\frac{\pi}{2\alpha}} \qquad (9)$$

что дает индекс $\tau_s = 1 + \frac{\pi}{2\alpha}$.

Эти результаты были проверены нами с помощью численных экспериментов методом Монте-Карло. Мы рассмотрели решетки размера

вплоть до 100 с углами $\alpha = \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ при статистике вплоть до 10^6 лавин.

Таблица 1.- Граничные показатели для углов кратных $\pi/2$.

α	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
τ_s	1.9	1.51	1.32	1.21
exact	2	3/2	4/3	5/4

Таблица 1 показывает, что данные, полученные нами численно, находятся в хорошем согласии с нашими теоретическими предсказаниями.

Особый интерес представляет угол 2π. В этом случае лавина начинается с вершины разреза на плоскости. Можно предположить, что влияние разреза не должно приводить к сильному искажению геометрии лавины по сравнению с её распространением в объеме решетки. Поэтому можно ожидать, что критические индексы в обеих этих случаях должна быть близки. Действительно, разница между численным результатом С. Манны $\tau_s = 1.22$ и полученным нами показателем $\tau_s = 5/4$ для угла $\alpha = 2\pi$ не превышает 3%.

В приложении точно вычислены некоторые корреляторы в модели ветвящихся полимеров. Конформная теория поля с зарядом $c = -2$ предсказывает критические индексы для этой модели, одновременно допуская наличие логарифмических поправок к степенному закону убывания корреляционных функций. В то же время, результаты, полученные на основе ренормгрупповых соображений и техники кулоновского газа, дают чисто степенной характер асимптотик. В этой части работы нам удалось, используя теорему Кирхгофа, точно вычислить некоторые корреляторы в этой модели и объяснить причины возникновения логарифмических поправок.

В заключении кратко сформулированы полученные в диссертации результаты, которые и выносятся на защиту.

Литература

[1] Brankov J G, Ivashkevich E V and Priezzhev V B *J. Phys. I France* **3** (1993) 1729

[2] Ivashkevich E V *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** (1994) 3643

[3] Ivashkevich E V, Ktitarev D V and Priezzhev V B *Physica* **209A** (1994) 347

[4] Ivashkevich E V, Ktitarev D V and Priezzhev V B *J. Phys. A:Math. Gen* **27** (1994) L585

[5] Ivashkevich E V, Ktitarev D V and Priezzhev V B *Proceedings of Tokyo International Conference on Dynamical Systems and Chaos* (World Scientific,1994)

[6] Ивашкевич Е В, "О корреляционных функциях в модели ветвящихся полимеров", *Препринт ОИЯИ* **Р5-95-12**, Дубна, 1995.

Рукопись поступила в издательский отдел 7 апреля 1995 года.