

Б-742



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

5-91-384

**БОГОЛЮБСКИЙ
Игорь Львович**

УДК 539.1.01+539.2+
+515.16+517.9+
+519.6

**ИССЛЕДОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ
ЛОКАЛИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ
РЯДА НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**Специальности: 05.13.16 - применение вычислительной
техники, математического моделирования
и математических методов для научных
исследований**

01.01.03 - математическая физика

**Автореферат диссертации на соискание ученой
степени доктора физико-математических наук**

Дубна 1991

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор

Б.А.Иванов

доктор физико-математических наук,
доцент

А.В.Крянев

доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник

В.В.Яньков

Ведущая организация -

Институт теоретической физики АН УССР, Киев

Защита диссертации состоится 20 декабря 1991 г. на заседании специализированного Совета Д 047.01.04 при Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ, 141980, Дубна, Московской обл., ЛВТА ОИЯИ. ¹¹⁰³⁰

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан 19 ноября 1991 г.

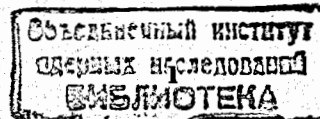
Ученый секретарь специализированного Совета
кандидат физико-математических наук

Иван З.М.Иванченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Последние десятилетия отмечены интенсивным исследованием сильнонелинейных процессов в различных областях науки: аэро- и гидродинамика, физика плазмы и конденсированного состояния, нелинейная оптика, биологические науки, классическая и квантовая теории фундаментальных полей. Для изучения существенно нелинейных эффектов потребовалось развитие адекватного математического аппарата, позволяющего выйти за рамки методов теории возмущений. Важным эвристическим методом исследования сложных нелинейных явлений стало математическое моделирование, возможности которого быстро расширились по мере роста быстродействия и памяти ЭВМ. В компьютерных экспериментах были обнаружены существенно нелинейные локализованные решения с конечной энергией - солитоны. Исследования солитонов сформировали одну из немногих междисциплинарных тем современной математической физики. Несмотря на впечатляющие результаты, полученные в теории солитонов методом обратной задачи рассеяния и родственными ему методами, важная роль компьютерных исследований сохраняется в общем случае нелинейных систем, не являющихся интегрируемыми. Особенно полезными оказываются численные методы при изучении неоднородных солитонов, поскольку в большинстве неоднородных моделей даже односолитонные решения не удается найти аналитически; если же в таких моделях отсутствует удобная подстановка, то численный поиск солитона часто оказывается нетривиальной задачей.

Большой теоретический интерес представляет поиск устойчивых двух- и трехмерных солитонов, как топологических, так и динамических, в различных моделях физики конденсированного состояния (гейзенберговские магнетики, исследование возможных механизмов сверхпроводимости, сверхтекучие фазы He^3). Широко известна используемая в ядерной физике и физике адронов модель Скинра и ее модификации, в которых барионам сопоставляются трехмерные солитоны с единичным „топологическим зарядом“. Позднее Виттен показал, что барионы появляются как трехмерные солитонные



связанные состояния N нерелятивистских кварков в $1/N$ -разложении квантовой хромодинамики. До настоящего времени сохраняет привлекательность идея рассматривать самолокализованные трехмерные полевые решения как классические аналоги „элементарных“ частиц микромира, каковыми могут оказаться электроны, мюон, τ -лептон, кварки и т.д. Новым направлением развития нелинейной математической физики стало изучение свойств как одномерных, так и неодномерных самолокализованных колебаний (бионов, пульсонов) в различных нелинейных моделях. Квантование солитонов и пульсонов позволяет получить спектры энергий, допускающие в трехмерном пространстве интерпретацию как спектры масс протяженных частиц; удается указать несколько различных механизмов генерации спектров масс локализованных решений. Исследование взаимодействия солитонов при столкновениях дает важную информацию о свойствах нелинейных систем (интегрируемость, процессы слияния и распада в системе локализованных решений, асимптотические состояния при $t \rightarrow \infty$). Изучение самолокализованных решений уравнения Клейна-Гордона с различными видами нелинейности, моделей магнетиков гейзенберговского типа (σ -моделей), синус-уравнения Гордона (SG) позволяет получать весьма общие и практически важные результаты, поскольку эти уравнения описывают широкий круг явлений различной физической природы.

Перечисленные выше актуальные задачи современной физики исследуются в диссертации в рамках трёх групп нелинейных математических моделей:

1) нестационарные лоренц-инвариантные уравнения для действительных и комплексных скалярных полей с различными видами нелинейности.

2) интегро-дифференциальные спектральные задачи для сферически-симметричного уравнения Шрёдингера с нелокальными взаимодействиями.

3) „сигма-модели“, в которых независимым переменным является N -компонентный вектор единичной длины, определяемый в D -мерном пространстве R^D ($N=3,4$; $D=2,3$).

Актуальность выбранного направления исследования определяется, во-первых, значительной общностью и важными приложениями

рассматриваемых нелинейных моделей, и, во-вторых, возможностью выяснения в процессе компьютерного и аналитического изучения конкретных моделей общих закономерностей, свойственных нелинейным системам.

Цель работы. В большинстве двух- и трехмерных нелинейных моделей изучить свойства солитонных решений теми же аналитическими методами, что и в одномерных интегрируемых системах, не удастся. Методической целью диссертации является разработка эффективных способов исследования с помощью ЭВМ нелинейных неодномерных задач, допускающих существование локализованных решений с конечной энергией. Получение новых, преимущественно двух- и трехмерных, частицеподобных решений актуальных задач нелинейной математической физики и исследование их свойств является конечной целью большинства работ, включенных в диссертацию. Изучается возникновение спектров масс неодномерных частицеподобных решений.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, двух приложений и списка цитированной литературы из 194 наименований. Полный объем диссертации 218 страниц, в работе 58 рисунков.

Научная новизна и практическая ценность работы. Работы с участием автора, обсуждаемые в диссертации, являются вкладом в развитие нового научного направления — исследования с помощью ЭВМ локализованных решений нелинейных задач современной математической физики. Основные научные результаты получены для частицеподобных решений нелинейных уравнений, описывающих широкий круг явлений различной природы в системах без подвода и диссипации энергии.

Предложен и реализован на ЭВМ новый способ решения спектральной задачи для сферически-симметричного уравнения Шрёдингера с нелокальными потенциальными взаимодействиями, моделирующими удержание нерелятивистских кварков внутри барионов. Для случая линейного потенциала попарного притяжения в системе N кварков, где $N \rightarrow \infty$, численно обнаружен новый результат: значение координатной одночастичной функции в центре симметрии не зависит от числа её узлов.

Построена новая модель магнетика гейзенберговского типа с попарными взаимодействиями спинов, расположенных в узлах кубической решётки, для которой впервые в классе трёхкомпонентных сигма-моделей вычислительными экспериментами продемонстрировано существование устойчивых стационарных трёхмерных солитонов. Дано определение решёточного аналога индекса Хопфа, позволившее вычислять эту важную характеристику даже для „существенно дискретных“ спиновых распределений.

Обнаружены и исследованы новые локализованные симметричные распределения скалярного поля $u(r,t)$, осциллирующие по времени (названные поэтому „пульсонами“) в D -мерном пространстве ($D=2,3$). При этом впервые :

1) описаны аналитически „лёгкие“ пульсоны (малой амплитуды) и численно изучена их динамика, $D=2,3$;

2) в вычислительных экспериментах в моделях с вырожденным вакуумом продемонстрировано формирование и изучена эволюция долгоживущих

а) „тяжёлых“ пульсонов (большой амплитуды), $D=2,3$, и

б) „сверхтяжёлых“ пульсонов уравнения синус-Гордон, $D=3$;

3) численно показана устойчивость неизлучающих пульсонов уравнения Клейна-Гордона с логарифмической нелинейностью, $D=3$.

Впервые выполнено квазиклассическое квантование частицеподобных пульсонных решений в трёхмерном координатном пространстве.

В диссертации разработаны и реализованы в виде программ эффективные вычислительные методики поиска и изучения свойств частицеподобных решений как в одномерных, так и в неодномерных нелинейных системах, которые могут быть в дальнейшем использованы при компьютерном исследовании нелинейного мира.

Практическая ценность работы определяется также тем, что новые научные результаты получены в рамках нелинейных уравнений, широко используемых при математическом моделировании в физике элементарных частиц и конденсированного состояния. Так, исследования топологических солитонов в трёх- и четырёхкомпонентных сигма-моделях представляют интерес для физики магнитных материалов, теории высокотемпературной сверхпроводимости, теории сверхтекучести He^3 в А- и В- фазах, а

также ядерной физики (модель Скирма).

Численное решение спектральной задачи для сферически-симметричного уравнения Шрёдингера с нелокальными взаимодействиями позволило получить информацию, которая представляется полезной не только для физики барионов (модель Виттена), но и для теории полярона в физике твёрдого тела. Найденные в работе собственные функции и энергии связанных состояний можно использовать как начальное приближение при решении аналогичных спектральных задач (например, непрерывным аналогом метода Ньютона) в тех случаях, когда одним из слагаемых потенциала попарного взаимодействия является кулоновский или линейно растущий с расстоянием потенциал.

Систематическое численное изучение динамики „двухмасштабных“ сферически-симметричных „пузырей“ было выполнено диссертантом в процессе исследования с помощью ЭВМ важнейших для современной физики моделей с вырожденным вакуумом, в которых реализуется спонтанное нарушение симметрии. Результаты этих вычислительных экспериментов, завершившихся обнаружением пульсонов и выделением характерных этапов их эволюции, вызвали активное обсуждение в научной литературе аналогичных процессов в протяжённых контактах Джозефсона.

Обоснованность результатов и выводов. В работах, отраженных в диссертации, используется „синергетический“ подход, объединяющий возможности аналитических и численных методов. При поиске локализованных барионоподобных решений в $1/N$ разложении квантовой хромодинамики задача сводится к одномерной краевой, численное решение которой получается с высокой точностью. Возможность сведения интегро-дифференциальной спектральной задачи к краевой задаче для дифференциальных уравнений опирается на доказанные в диссертации утверждения, имеющие конструктивный характер. Применение метода масштабных преобразований облегчает поиск неодномерных солитонов, позволяет избежать при этом численных артефактов. Численные исследования трёхмерных стационарных топологических солитонов подкрепляются в диссертации получением теоретической оценки гамильтониана снизу через величину топологического заряда, сохранение которого контролируется в ходе

вычислительного эксперимента. Для изучения динамики взаимодействия солитонов и исследования более общих нестационарных локализованных решений в диссертации применяются конечно-разностные схемы не ниже второго порядка точности как по времени, так и по пространственным координатам; в вычислительных экспериментах с высокой точностью сохраняются интегралы движения (энергия, заряд). Формирование долгоживущих сферически-симметричных пульсонов большой амплитуды показано вычислительными экспериментами с различными начальными данными.

Основные результаты, полученные в диссертации.

1. Показано, что решения интегро-дифференциальной спектральной задачи в модели барионов, сформулированной Виттеном в рамках $1/N$ разложения квантовой хромодинамики, могут быть получены в результате сведения этой задачи к нелинейным дифференциальным краевым задачам, если рассматриваются следующие потенциалы попарного межкваркового притяжения: а) кулоновский, $V_C = -g^2 r^{-1}$ (результат Виттена), б) линейно растущий, $V_L = g^2 \alpha^2 r$, в) сумма кулоновского и линейно растущего, $V_f = V_C + V_L = -g^2 r^{-1} (1 - \alpha^2 r^2)$. Разработаны алгоритмы численного решения и для всех перечисленных случаев впервые найдены частицеподобные решения-исходной задачи, определяющие одночастичные волновые функции основного и возбужденных сферически-симметричных состояний, вычислены соответствующие уровни энергии.

2. Построена трехмерная классическая решеточная модель магнетика гейзенберговского типа, характеризуемая конкурирующими ферромагнитными и антиферромагнитными взаимодействиями спинов, расположенных в узлах решетки, для которой показано существование в некоторой области параметров стационарных топологических солитонов. Разработан эффективный метод численной минимизации функционала энергии, использованный для получения солитонов с топологическим зарядом $N_f = 1$, где N_f - решеточный аналог индекса Хопфа. Разработана методика и создана программа вычисления для заданного распределения спинов значения N_f . В вычислительных экспериментах впервые получены устойчивые стационарные трехмерные солитоны в трехкомпонентной σ -модели.

3. На трехмерной кубической решетке получена разностная

аппроксимация интеграла энергии для стационарных непрерывных распределений в трехмерной модели Скирма и разработан эффективный алгоритм последовательной локальной минимизации энергии решеточных распределений. Создана программа вычисления на компьютере топологического заряда в решеточной модели Скирма. В результате выполнения методических расчетов найдено, каким необходимым требованиям должны удовлетворять кубические решетки, используемые для исследования взаимодействия топологических солитонов в модели Скирма в вычислительных экспериментах.

4. Методом масштабных преобразований доказано отсутствие стационарных двумерных солитонов в традиционных континуальных моделях анизотропных магнетиков Гейзенберга для анизотропии произвольного вида. В двух двумерных моделях Гейзенберга с легкоосной анизотропией, различающихся конкретной формой F_4 включенных в гамильтониан дополнительных стабилизирующих членов pF_4 , в широком диапазоне безразмерного параметра p : а) численно найдены стационарные солитоны с топологическим зарядом $Q=1$; б) для $m=2,3,4$ прямыми расчетами показано, что энергетически выгодным является образование связанного состояния m таких солитонов. Для скирмовского вида F_4 численно найдены зависимости энергии $N(\omega)$, числа магнонов $N(\omega)$ и характерного радиуса $R(\omega)$ нестационарных солитонов от частоты прецессии ω , соответствующие различным значениям параметра p .

5. Выполнено сравнительное исследование устойчивости одномерных (x,t) и сферически-симметричных (r,t) заряженных солитонов комплексного уравнения Клейна-Гордона с нелинейностью вида "ток \times ток". С помощью вычислительных экспериментов подтверждена общая тенденция сужения области устойчивости по частоте ω при переходе от одномерных солитонов к сферически-симметричным.

6. Разработана методика и выполнены вычислительные эксперименты по исследованию взаимодействия солитонов и пульсонов в рамках нелинейных уравнений Клейна-Гордона. Показано, что картина взаимодействия заряженных солитонов одинаковых амплитуд существенно зависит от соотношения знаков их зарядов, а для солитонов с одинаковыми зарядами и амплитудами - от начальной разности фаз этих солитонов. При нулевой разности фаз в систематических экспериментах в рамках уравнения Клейна-Гордона с

логарифмической нелинейностью (КГЛН) обнаружены четыре качественно различающихся варианта взаимодействия в зависимости от частоты ω и скорости v солитонов, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $v_1 = -v_2 = v$, причем отмечены как почти упругие, так и существенно неупругие (образование связанного состояния) взаимодействия солитонов при столкновениях.

7. Методом Боголюбова-Митропольского впервые найдены сферически-симметричные локализованные осциллирующие решения малой амплитуды („легкие” пульсоны) уравнений Клейна-Гордона с кубической нелинейностью (КГЗ), синус-Гордон (СГ), Клейна-Городона-Хиггса (КГХ).

8. При исследовании нелинейных моделей скалярного поля с вырожденным вакуумом (уравнения КГХ, СГ) в вычислительных экспериментах обнаружены не известные ранее трехмерные самолокализованные колебания поля большой амплитуды - долгоживущие слабоизлучающие пульсоны. Амплитуда осцилляций „тяжелых” сферически-симметричных пульсонов ограничена сверху расстоянием между ближайшими вакуумами (уравнения КГХ, СГ). В рамках многовакуумного уравнения СГ найдены „сверхтяжелые” сферически-симметричные пульсоны с амплитудой осцилляций от полутора до двух расстояний между соседними вакуумами, не имеющие бивибрирующих аналогов в одномерном (x, t) случае. Показана четко выраженная связь границ зон по амплитуде осцилляций пульсонов, в которых они являются самоформирующимися („устойчивыми”) или быстро разрушающимися („неустойчивыми”), с расположением точек максимума и минимума потенциальных рельефов рассматриваемых нелинейных моделей.

9. Продемонстрирована устойчивость нейтральных и заряженных сферически-симметричных пульсонов, являющихся точными решениями уравнения КГЛН. С помощью квантования по Бору-Зоммерфельду этих пульсонов получены дискретные спектры масс протяженных „частиц”, как незаряженных, так и имеющих элементарный заряд $Q=1$.

Публикация результатов. Основные научные результаты, включенные в диссертацию, опубликованы в работах, список которых приведен в конце автореферата.

Апробация работы. Научные результаты, изложенные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на научных семинарах ЛВТА и ЛФ ОИЯИ, факультета ВМК и механико-математического факультета МГУ, ИТЭФ, Института теоретической физики АН УССР, Общественном семинаре по теории солитонов и интегрируемых систем, Международном симпозиуме по физике высоких энергий (Кордобанг, 1986), Международном симпозиуме по избранным проблемам статистической механики (Дубна, 1987), Международной конференции „Численные методы и приложения” (София, 1988), Международной конференции по интегральным уравнениям и обратным задачам (Варна, 1989), Международных совещаниях по математическому моделированию и методам решения физических задач (Дубна, 1977, 1983), Международной конференции по численным методам (Мишкольц, 1990), Международной конференции „Математическое моделирование и прикладная математика” (Москва, 1990), Международном семинаре по нелинейным эволюционным уравнениям и динамическим системам, NEEDS-90 (Дубна, 1990), Всесоюзном семинаре по теории солитонов (Ленинград, 1979), Всесоюзных рабочих совещаниях „Теория солитонов и приложения” (1985, 1987, 1989), Всесоюзной конференции „Математическое моделирование : нелинейные проблемы и вычислительная математика” (Звенигород, 1988), Всесоюзном совещании по математическому моделированию в физике (Алма-Ата, 1986), а также неоднократно на научных сессиях отделения ядерной физики АН СССР.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении показывается важная роль численных методов при исследовании нелинейных задач современной математической физики и свойств их локализованных решений, дается обзор литературы по рассматриваемым в диссертации нелинейным моделям и обсуждается актуальность решенных в работе задач, содержится аннотация изложенных в каждой главе результатов.

ГЛАВА 1. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ БАРИОНОПОДОБНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ КВАРКОВ В $1/N$ -РАЗЛОЖЕНИИ КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКИ.

В §1 излагается общая постановка задачи исследования барионоподобных состояний в модели Виттена. Предполагается, что

все кварки в барионе одного аромата (примерами являются Δ^{++} , состоящая из трех u-кварков и Ω^- , составленный из трех s-кварков). В предположении $N \gg 1$ задача сводится к исследованию в приближении Хартри-Фока волновой функции (ВФ) N бозонов $\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$, представляемой в виде

$$\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \prod_{i=1}^N \varphi(\vec{x}_i), \quad (1)$$

где $\varphi(\vec{x})$ - одночастичная ВФ, $N[\varphi] = \int |\varphi|^2 d^3x = 1$.

Одночастичная ВФ $\varphi(\vec{x})$ и энергия E кварка в связанном состоянии должны находиться как решение интегро-дифференциальной спектральной задачи

$$-4\pi \nabla_{\vec{x}}^2 \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{x}) \int V(|\vec{x}-\vec{y}|) |\varphi(\vec{y})|^2 d^3y = E\varphi(\vec{x}), \quad N[\varphi] = 1, \quad (2)$$

где $V(r)$ - потенциал попарного притяжения кварков (используются безразмерные переменные). В диссертации рассматриваются потенциалы, имеющие следующий общий вид:

$$V_{\vec{r}}(r) = -(qr^{-1} - \alpha^2 r), \quad r = |\vec{x}-\vec{y}|, \quad \alpha = r_0^{-1}, \quad (3)$$

α, q - постоянные. В работе Виттена (Nucl. Phys., В 160(1979)57) для частного случая кулоновского потенциала (КП) $V(r)$ ($q=1, \alpha=0$) задача (2) сведена к поиску локализованных ($\varphi(\infty)=0$) нормированных решений ($N[\varphi]=1$) решений нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка

$$-\nabla_{\vec{x}}^2 (\varphi^{-1}(\vec{x}) \nabla_{\vec{x}}^2 \varphi(\vec{x})) + |\varphi(\vec{x})|^2 = 0. \quad (4)$$

В дальнейшем в этой главе исследуются сферически-симметричные решения $\varphi(r)$.

В §2 рассматривается задача (2), (3) в случае КП. Показывается, что решения $\varphi(r)$ уравнения (4) такие, что $\varphi(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ и $N[\varphi]=1$,

являются собственными функциями (СФ) задачи (2) для КП $V(r) = -r^{-1}$ вместе с собственными значениями (СЗ)

$$E_n = -4\pi [\varphi^{-1}(r) \nabla_r^2 \varphi(r)] \Big|_{r=0} + \int_0^\infty \varphi^2(r) r dr, \quad \nabla_r^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}. \quad (5)$$

Обнаружено полезное свойство решений уравнения (4): если $\eta(r)$ есть решение (4), то $\eta_b(r) = b\eta(b^{1/2}r)$ - также решение этого уравнения. Получено правило перехода от ненормированных решений $\eta(r)$ к нормированным $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = N^{-2}[\eta] \eta(rN^{-1}[\eta]). \quad (6)$$

Решения уравнения (4) находились численно при задании четырех дополнительных условий: $d\varphi/dr(0)=0, d^3\varphi/dr^3(0)=0, \varphi(\infty)=0, N[\varphi]=1$. Использовался метод стрельбы. Найдены первые 9 СФ $\varphi_n(r)$, $n=1, 2, \dots, 9$, причем $\varphi_n(r)$ имеет $k=n-1$ нулей, и соответствующие СЗ E_n . Количественные характеристики СФ и СЗ представлены в виде таблиц. Обнаружено, что абсолютная величина СЗ E_n уменьшается с ростом n быстрее, чем по закону $|E_n| \propto n^{-2}$.

В §3 формулируются нелинейные дифференциальные краевые задачи, возникающие при исследовании интегро-дифференциальных спектральных задач (2) для запирающих потенциалов вида (3) при $\alpha^2 \neq 0$. Сначала с помощью Леммы 1 §2 и соотношений $\nabla_{\vec{x}}^2 |\vec{x}-\vec{y}| = 2|\vec{x}-\vec{y}|^{-1}$ и $\nabla_{\vec{x}}^2 |\vec{x}-\vec{y}|^{-1} = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{y})$ задача (2), (3) сводится к нахождению локализованных нормированных решений уравнения

$$-2\pi \nabla_r^2 (\varphi^{-1} \nabla_r^2 \varphi) + \alpha^2 \int \varphi^2(|\vec{y}|) |\vec{x}-\vec{y}|^{-1} d^3y + 2\pi q \varphi^2 = 0. \quad (7)$$

Действуя на уравнение (7) оператором ∇_r^2 , получаем дифференциальное уравнение 6-го порядка

$$-\nabla_r^2 [\nabla_r^2 (\varphi^{-1}(r) \nabla_r^2 \varphi(r))] - 2\alpha^2 \varphi^2(r) + q \nabla_r^2 \varphi^2 = 0. \quad (8)$$

В §3 показано, что решения $\varphi(r)$ уравнения (8), такие, что $\varphi(\infty)=0, N[\varphi]=1$ и $\delta[\varphi]=0$, где

$$\delta[\varphi] = \frac{1}{2} \left[\nabla_r^2 (\varphi^{-1} \nabla_r^2 \varphi) - q\varphi^2 \right] \Big|_{r=0} (\alpha^2 \int_0^\infty \varphi^2(r) r dr)^{-1} - 1, \quad (9)$$

являются СФ задачи (2), (3) вместе с СЗ, определяемыми по формуле

$$E = 4\pi \left[-\varphi^{-1}(0) \nabla_r^2 \varphi(r) \Big|_{r=0} + \alpha^2 \int_0^\infty \varphi^2(r) r^3 dr - q \int_0^\infty \varphi^2(r) r dr \right]. \quad (10)$$

Для решения уравнения (9) нужно задать 6 дополнительных условий:

$$1) \varphi(\infty)=0, \quad 2) \delta[\varphi]=0, \quad 3) N[\varphi]=1, \quad (11)$$

$$4) \frac{d\varphi}{dr}(0)=0, \quad 5) \varphi^{(3)}(0)=0, \quad 6) \varphi^{(5)}(0)=0.$$

Ряд Тейлора для $\varphi(r)$ записывается в виде

$$\varphi(r) = a_0 + a_2 r^2 + a_4 r^4 + a_6 r^6 + \dots, \quad (12)$$

причем, подставляя (12) в (8), находим

$$a_6 = a_0 \left[26 \cdot a_2 a_4 a_0^{-2} - 6 a_2^3 a_0^{-3} - (\alpha^2 a_0^2 - 6 q a_0 a_2) / 60 \right] / 42. \quad (13)$$

В §4 рассматривается частный случай запирающего потенциала (3) с $q=0$ (линейный потенциал, ЛП). Уравнение (8) принимает вид:

$$\nabla_r^2 \left[\nabla_r^2 (\varphi^{-1} \nabla_r^2 \varphi) \right] + 2\alpha^2 \varphi^2 = 0. \quad (14)$$

Пусть $(\varphi(r, \alpha), E(\alpha))$ - решение исходной задачи (2), (3) при $q=0$, $\alpha^2 \neq 1$. Тогда справедливы формулы перехода

$$\varphi(r, \alpha) = \alpha \varphi(\alpha^{2/3} r, 1), \quad (15)$$

$$E(\alpha) = E(1) \alpha^{4/3} = E(1) (\alpha^2)^{2/3}, \quad (16)$$

поэтому достаточно исследовать решения уравнения (14) при $\alpha^2=1$.

В §4 показано, что нормированные решения $\varphi(r)$ могут быть получены из ненормированных $\eta(r)$ по формуле

$$\varphi(r) = N^{-1}[\eta] \cdot \eta(r N^{-1/3}[\eta]). \quad (17)$$

а также найдено, что соотношение

$$\delta[\varphi] = \frac{1}{2} \nabla_r^2 (\varphi^{-1} \nabla_r^2 \varphi) \Big|_{r=0} \left(\int_0^\infty \varphi^2(r) r dr \right)^{-1} - 1 = 0, \quad (18)$$

являющееся частным случаем (9) при $\alpha^2=1$, $q=0$, инвариантно относительно преобразований (17), что позволяет проверять (18), не переходя к нормированным решениям $\varphi(r)$. Далее излагается стратегия поиска численных решений уравнения (14) с условиями (11). Найдены первые 9 СФ $\varphi_n(r)$ и СЗ E_n , $n=1, 2, \dots, 9$, характеристики которых представлены в таблице. Численно обнаружен интересный результат: для задачи (2) с ЛП значения $\varphi_n(0)$ не зависят от номера n .

В §5 рассматривается наиболее важный для физики адронов и в то же время наиболее сложный для численного исследования случай запирающего "вороночного" потенциала (ВП) (3) с $q=1$, $\alpha^2 \neq 0$: в силу нелинейности задачи (2) ее решения для ВП не выражаются линейной комбинацией решений для КП и ЛП, кроме того, отсутствует возможность построения нормированных решений с помощью преобразований ненормированных решений вида (6) или (17). Поиск решений уравнения (8), удовлетворяющих условиям (11), (9), выполнялся с учетом количественных характеристик СФ, найденных в §§ 2 и 4 для КП и ЛП. Подбирались тройки параметров (a_0, a_2, a_4) , для которых численные решения, получаемые с учетом (12), (13), обладают требуемыми свойствами. Общая стратегия поиска решений такова: при фиксированных a_4 и a_2 выбираем a_0 , обеспечивающее выполнение условия $\varphi(\infty)=0$, далее, изменяя a_4 и a_2 , находим значения a_4^* , a_2^* и $a_0^*(a_4^*, a_2^*)$, для которых выполнены также условия $N[\varphi]=1$ и $\delta[\varphi]=0$. Анализируются вопросы существования и количества локализованных ненормированных решений уравнения (8) при $q=1$, имеющих различное число узлов, в окрестностях точек (a_4^*, a_2^*) на плоскости (a_4, a_2) .

Поиск решений выполнялся последовательно для увеличивающихся значений α^2 (метод эволюции по параметру α^2), что позволяло строить прогноз для величин (a_0, a_2, a_4) . Исследовались решения

$\varphi_n(\mathbf{r})$ с числом узлов $k=n-1=0,1,2$. Результаты расчетов СФ и СЗ представлены в таблицах. Зависимость энергии уровней $E_{fn}(\alpha^2)$ для ВП представлены на рисунках и сравниваются с зависимостями $E_{ln}(\alpha^2)$ для ЛП. Найдено, что при $\alpha^2 > 0.03$ с точностью, не меньшей 11% и увеличивающейся с ростом α^2 , для нахождения энергии основного состояния $E_{r1}(\alpha^2)$ можно использовать формулу $E_{r1}(\alpha^2) \approx E_{l1}(1)\alpha^{4/3}$. Показано, что с увеличением числа узлов k примерное равенство $E_{lk}(\alpha^2) \approx E_{rk}(\alpha^2)$ достигается с заданной точностью при все меньших значениях α^2 .

ГЛАВА 2. СТАЦИОНАРНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ В ТРЕХМЕРНЫХ σ -МОДЕЛЯХ

В §1 кратко обсуждаются вопросы существования динамических и стационарных трехмерных солитонов в трех- и четырехкомпонентных нелинейных σ -моделях.

В §2 излагаются результаты исследования трехмерных стационарных топологических солитонов в моделях магнетиков гейзенберговского типа. Этим локализованным решениям соответствуют отображения компактифицированного граничными условиями пространства $R_{\text{comp}}^3 \rightarrow S^2$, разбивающиеся на классы с различными значениями целочисленного индекса Хопфа N , что позволяет определить величину топологического заряда $Q=N$ солитонов. В §2 дается определение решеточного аналога индекса Хопфа N_l , позволившее для решеточных локализованных распределений разработать эффективный алгоритм вычисления топологического заряда $Q=N_l$. Этот алгоритм оказывается работоспособным и в тех случаях, когда трехкомпонентный единичный вектор $\vec{s}(\vec{x})$ резко изменяется на расстояниях порядка постоянной решетки a . При деформации решеточных распределений (в отличие от непрерывных) величина N_l может изменяться.

В §2 рассмотрена континуальная модель гейзенберговского магнетика с плотностью гамильтониана ($s^a s^a = 1$)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} \left[\alpha \left(\frac{\partial s^a}{\partial x_1} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial^2 s^b}{\partial x_m^2} \right)^2 \right],$$

(19)

$$\alpha, \beta > 0, \quad a, b, i, m = 1, 2, 3.$$

Показано, что существование стационарных солитонов не исключается в результате анализа методом масштабных преобразований; в отличие от модели (19) с $\beta=0$. Найдено, что на солитонных решениях должно быть выполнено $E_1=E_2$, где $E_k = \int \mathcal{H}_k d^3x$, $k=1,2$.

Далее в §2 получена оценка снизу для энергии непрерывных локализованных распределений в модели (19):

$$E = E_1 + E_2 \geq 3^{3/8} 4\pi (\alpha\beta)^{1/2} |N|^{3/4}. \quad (20)$$

Дискретизацией континуальной модели (19) получена решеточная модель (точность аппроксимации $O(a^2)$), для которой энергия системы спинов \vec{s}_n , расположенных в узлах кубической решетки, выражается суммой по всем ее узлам с номерами $M(\vec{n})$ и координатами $\vec{x}_n = n_m \vec{e}_m$, $m=1,2,3$, где \vec{e}_m - единичные векторы в положительных направлениях координатных осей:

$$E = \sum_n \left\{ (3\alpha + 21\beta) - \vec{s}_n \cdot \left[c_n \sum_{m=1}^3 \vec{s}_{n \pm \vec{e}_m} + c_{nn} \sum_{m=1}^3 \vec{s}_{n \pm 2\vec{e}_m} + c_{nd} \sum_{\substack{k,m \\ k < m}}^3 \vec{s}_{n \pm \vec{e}_k \pm \vec{e}_m} \right] \right\}, \quad (21)$$

причем

$$c_n = 0.5\alpha + 6\beta, \quad c_{nn} = -0.5\beta, \quad c_{nd} = -\beta, \quad (22)$$

что отражает наличие конкурирующих ферромагнитного ($c_n > 0$) и антиферромагнитного ($c_{nn} < 0, c_{nd} < 0$) взаимодействий спина \vec{s}_n со спинами в соседних узлах решетки.

На решетке задавались начальные конфигурации спинов с $N_l=1$, определяемые в узлах с координатами $x_m = n_m$, $m=1,2,3$, $n_m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ формулами

$$s^1 = 2(N_1 N_4 + N_2 N_3), \quad s^2 = 2(N_1 N_3 - N_2 N_4), \quad s^3 = (N_3^2 + N_4^2 - N_1^2 - N_2^2), \quad (23)$$

$$N_m = 2X_m (1+R^2)^{-1}, \quad N_4 = (1-R^2) (1+R^2)^{-1}, \quad R^2 = \sum_{m=1}^3 X_m^2, \quad X_m = \kappa x_m.$$

В §2 продемонстрирована эффективность метода последовательной локальной минимизации энергии E локализованных распределений спинов, определяемой суммой (21), для нахождения трехмерных топологических солитонов. Стационарные солитоны с топологическим зарядом $N_t=1$ были получены в рамках модели (21), (22) при выборе параметров $\alpha=2$, $\beta=10$ из начальных данных (23) с $\kappa=0.24$ и $\kappa=0.30$ в результате минимизации энергии E при сохранении в ходе вычислительного эксперимента величины $N_t=1$. В эксперименте при $\alpha=2$, $\beta=1.5$, $\kappa=0.30$ зафиксировано несохранение топологического заряда ($N_t=1 \rightarrow N_t=0$) в ходе процесса минимизации (проявление выраженной дискретности системы спинов). Тем самым показано отсутствие в решеточной модели (21), (22) стационарных трехмерных солитонов с $N_t=1$ при $\beta < \beta_{cr}(\alpha)$, в том числе при $\beta=0$.

Алгоритм последовательной локальной минимизации, аналогичный использованному в §2, удастся разработать и в более сложном случае четырехкомпонентной модели Скирма. Соответствующие формулы представлены в §3 этой главы.

В §3 также изложена методика вычисления топологического заряда Q_t в модели Скирма, использованная в вычислительных экспериментах на кубической решетке. Описаны результаты методических трёхмерных расчётов локализованных распределений поля с различными значениями топологического заряда Q_t , в том числе известных солитонов с $Q_t=1$ - "скирмионов".

ГЛАВА 3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ В ДВУМЕРНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ МОДЕЛЯХ ГЕЙЗЕНБЕРГА СО СТАБИЛИЗИРУЮЩИМИ ЧЛЕНАМИ

В §1 рассмотрены стационарные топологические солитоны в двумерных анизотропных моделях Гейзенберга с плотностью гамильтониана вида

$$\mathcal{H} = \alpha^2 (\partial_1 s^a)^2 + \beta^2 w_{an}(s^a) + \gamma^2 F_4(\partial_1 s^a) = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3, \quad (24)$$

где $w_{an} \geq 0$, $s^a s^a = 1$, $i=1,2$, $a=1,2,3$, $\partial_1 = \partial_{x_1} = \partial_x$, $\partial_2 = \partial_{x_2} = \partial_y$, α, β, γ -

постоянные, а неотрицательное слагаемое F_4 имеет четвертый порядок по пространственным производным.

Методом масштабных преобразований показано, что на солитонных решениях должно выполняться равенство $N_2 = N_3$ ($N_k = \int \mathcal{H}_k d^2x$, $k=1,2,3$). Поэтому существование стационарных солитонов невозможно при $\gamma=0$, $\beta \neq 0$, а также при $\beta=0$, $\gamma \neq 0$.

В дальнейшем рассматривается конкретный случай анизотропии "легкая ось", $w_{an} = \sin^2 \theta$, где θ - угол между единичным вектором \vec{e}_3 "легкой" оси и вектором спина \vec{s} ; сначала рассматривается скирмовский вид F_4 (см. §3 главы 2)

$$F_4 = F_5 = (\partial_1 s^a \partial_1 s^a)^2 - (\partial_1 s^a \partial_j s^a)^2, \quad i, j=1,2, \quad a=1,2,3, \quad F_5 \geq 0. \quad (25)$$

Показано отсутствие при $F_4 = F_5$ стационарных солитонов с топологическим зарядом $Q=0$, где Q - степень отображения $R_{comp}^2 \rightarrow S^2$:

$$Q = (8\pi)^{-1} \int \epsilon_{ik} \epsilon^{abc} s^a \partial_1 s^b \partial_k s^c d^2x, \quad i, k=1,2, \quad a, b, c=1,2,3. \quad (26)$$

Для рассматриваемых в §1 двумерных солитонов справедлива оценка $\alpha^{-2} N \geq 8\pi Q$, полученная в $D=2$ изотропной модели для масштабно-инвариантных солитонов Белавина-Полякова. Для отображений $s^a(x_i)$, задаваемых формулами ($x_d = \alpha^{-1} \beta x$, $y_d = \alpha^{-1} \beta y$ - безразмерные координаты)

$$s^1 = \sin \theta \cos \chi, \quad s^2 = \sin \theta \sin \chi, \quad s^3 = \cos \theta, \\ \chi = m\varphi, \quad \theta = \theta(r), \quad x_d = r \cdot \cos \varphi, \quad y_d = r \cdot \sin \varphi, \quad (27)$$

справедливо равенство $Q = m[\cos \theta(\infty) - \cos \theta(0)]/2$.

Показано, что для поиска солитонных решений с $Q=1$ в соответствии с теоремой Коулмена-Пале следует использовать подстановку (27) с $m=1$ и условиями $\theta(0)=\pi$, $\theta(\infty)=0$; при всех m эта подстановка определяет не зависящие от угла φ распределения \mathcal{H} :

$$\beta^{-2}H(r) = \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + (m^2 r^{-2} + 1) \sin^2 \theta + 2pm^2 r^{-2} \sin^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2, \quad (28)$$

где $p = \beta^2 \gamma^2 \alpha^{-4}$.

Локализованные распределения для радиальной функции $\theta(r)$, при $m=1$ определяющие солитоны, находились методом стрельбы как решение краевой задачи

$$\frac{d^2 \theta}{dr^2} + r^{-1} \left(\frac{d\theta}{dr} \right) - (m^2 r^{-2} + 1) \sin \theta \cos \theta + 2pm^2 r^{-2} \left[\sin^2 \theta \frac{d^2 \theta}{dr^2} + \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 - r^{-1} \sin^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dr} \right) \right], \quad \theta(0) = \pi, \quad \theta(\infty) = 0, \quad (29)$$

для различных значений p от $p=10^{-6}$ до $p=500$.

Аналогичные исследования были выполнены для $F_4 = (\partial_1 s^a \partial_1 s^a)^2$. Обнаружено, что основные результаты в двух моделях совпадают, а именно:

- 1) нетопологические ($Q=0$) стационарные солитоны не существуют,
- 2) при малых p характерные размеры локализованных распределений R_m пропорциональны p^{γ_m} для $m=1,2$, причем найденные численно значения γ_m близки к $1/4$ в обеих моделях.
- 3) зависимость $H(p)$ энергии солитонов с $Q=1$ при $p \ll 1$ аппроксимируется формулой $\alpha^{-2}H = 8\pi + Bp^k$, $k \approx 0.42$, $B = \text{const}$. (30)

- 4) для всех p энергии локализованных распределений $H(Q) = \int H[\theta_m(r)] d^2 x_d$, $m=Q$, удовлетворяют неравенству $H(Q=2) < 2H(Q=1)$, т.е. в моделях с различными $F_4 \geq 0$ энергетически выгодно образование связанного состояния двух солитонов с $Q=1$. Далее, при $p=1$ расчётами показано, что $H(Q=3) < 3H(Q=1)$ и $H(Q=4) < 4H(Q=1)$.

В §1 отмечается, что интеграл энергии легкоосной анизотропии H_2 , вычисляемый на солитонах Белавина-Полякова с $Q=1$, логарифмически расходится, что делает нетривиальным использование теории возмущений по параметру $p \ll 1$ для описания солитонов с $Q=1$ в моделях (24) с $w_{an} = \sin^2 \theta$.

В §2 представлены результаты численного исследования двумерных солитонов с $Q=1$ и ненулевой частотой ω однородной прецессии спинов

в модели с $w_{an} = \sin^2 \theta$ и $F_4 = F_5$. Динамические топологические солитоны найдены методом стрельбы для значений $p=10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 1$ при различных значениях $0 < \omega < 1$. Найдено, что для данного p солитоны существуют при значениях $0 \leq \omega_{max}(p)$; при $\omega = \omega_{max}(p)$ солитонное решение единственно, при $0 < \omega < \omega_{max}(p)$ существуют два локализованных решения - узкое и широкое; $\omega_{max}(p) \rightarrow 1$ при $p \rightarrow 0$, с ростом p $\omega_{max}(p)$ монотонно уменьшается, при $p=1$ $\omega_{max} \approx 0.29$. Полученные нами численные результаты при $p \ll 1$ хорошо согласуются с зависимостями, полученными ранее аналитически для динамических солитонов малого радиуса в обобщенной модели гейзенберговского магнетика (Иванов Б.А., Стефанович В.А., ЖЭТФ, 91 (1986) 638).

ГЛАВА 4. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ. ПУЛЬСОНЫ.

Во введении (§1) представлены общие соотношения для рассматриваемых в гл.4 нелинейных моделей. Отмечается сужение области устойчивости заряженных солитонов скалярного поля для уравнения Клейна-Гордона с самодействием $|\phi|^4$ при переходе от одномерного к трехмерному случаю.

В §2 выполнено сравнительное исследование солитонов комплексного поля в одномерном (x,t) и сферически-симметричном (r,t) вариантах модели с самодействием $J_\mu J^\mu$:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi - \phi^* \phi - J_\mu J^\mu, \quad J_\mu = \phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*, \quad \mu=0,1,\dots,D. \quad (31)$$

Найденные в одномерном случае солитоны

$$\phi_s(x,t) = [(1-\omega^2)^{1/2}/2\omega] \operatorname{sech} [x(1-\omega^2)^{1/2}] \exp(-i\omega t), \quad |\omega| < 1, \quad (32)$$

оказываются, как показали численные исследования, устойчивыми при всех $|\omega| < 1$. В отличие от них, сферически-симметричные солитоны

$$\phi_{s0}(r,t) = [(1-\omega^2)/8\omega^2]^{1/2} A_0 [r(1-\omega^2)^{1/2}] \exp(-i\omega t), \quad |\omega| < 1, \quad (33)$$

где $A_0(\xi)$ - безузловое решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{\partial A}{\partial \xi} - A + A^3 = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial \xi}(0) = 0, \quad A(\infty) = 0, \quad (34)$$

как показали вычислительные эксперименты, неустойчивы при всех $|\omega| < 1$.

В §3 изучены локализованные сферически-симметричные колебания малой амплитуды скалярного поля в рамках уравнений КГЗ, КГХ и СГ:

$$u_{tt} - \Delta u + u - u^3 = 0, \quad (35)$$

$$u_{tt} - \Delta u - u + u^3 = 0, \quad (36)$$

$$u_{tt} - \Delta u + \sin u = 0. \quad (37)$$

Решения $u(r, t)$, описывающие такие малоамплитудные пульсоны ("легкие" пульсоны), получены методом Боголюбова-Митропольского. Численные исследования показали, что в отличие от ранее исследованных самолокализованных (x, t) колебаний (Seeger A. et al. Zh. Phys., 134 (1953) 173; Косевич А.М., Ковалев А.С. ЖЭТФ, 67 (1974) 1793; Dashen R.F. et al. Phys. Rev. D11 (1975) 3424), сферически-симметричные легкие пульсоны, описываемые в случае уравнения (35) формулой

$$u = u_0 A(\epsilon r) A^{-1}(0) \cdot \cos [(1 - \epsilon^2)^{1/2} t] + O(u_0^3), \quad u_0 = 8^{1/2} \epsilon A(0), \quad (38)$$

не являются самоформирующимися ($A(\xi)$ - решения (34)).

В §3 изложены результаты вычислительных экспериментов, в которых изучались лобовые столкновения встречных малоамплитудных пульсонов уравнения (35). Тот факт, что в результате столкновения одномерных пульсонов их амплитуды и скорость остаются практически неизменными, объясняется "близостью" при $u_0^2 \ll 1$ уравнения (35) к вполне интегрируемому одномерному уравнению СГ.

В §4 представлены результаты численного исследования эволюции в рамках уравнения (36) начальных распределений поля в виде двухмасштабных сферически-симметричных кинков, $u(r) = \text{th}[(r - R_0) 2^{-1/2}]$, толщина которых порядка единицы, а $R_0 \gg 1$. При этом изучался вопрос: возможно ли существование долгоживущих двухмасштабных пульсирующих пузырей, периодически возвращающихся в

состояние, близкое к начальному. Расчеты показали, что такого возврата при большинстве рассмотренных R_0 не наблюдается, и за время порядка одного периода сжатия-расширения исходный пузырь разрушается, высвечивая большую часть начальной энергии; максимальное время жизни пузырей - не более нескольких периодов. Аналогичные результаты получены для начальных данных $u(r) = 4 \arctg \exp(r - R_0)$ в рамках уравнения (37).

На заключительной стадии этих экспериментов в рамках моделей с вырожденными вакуумами было зафиксировано формирование сферически-симметричных "тяжелых" долгоживущих пульсонов - не известных ранее одномасштабных полевых образований, амплитуда которых не менее половины расстояния между соседними вакуумами. В дальнейшем было прослежено (см. §4) формирование тяжелых пульсонов из других сферически-симметричных начальных данных; для обеих моделей, (36) и (37), отмечены три этапа в их эволюции: 1) относительно быстрое формирование, 2) длительная регулярная стадия, на которой происходит медленное уменьшение амплитуды колебаний пульсонов и слабое высвечивание их энергии и 3) интенсивное излучение энергии и более быстрое падение амплитуды осцилляций после достижения ее критических значений, соответствующих локальным максимумам потенциалов $U(u)$ рассматриваемых моделей (для уравнения КГХ $U = (u^2 - 1)^2 / 2$, для уравнения СГ $U = 2(1 - \cos u)$).

Наконец, в §4 в рамках уравнения СГ (37), соответствующего многовакуумному потенциалу $U(u)$, обнаружено существование "сверхтяжелых" долгоживущих сферически-симметричных пульсонов, не имеющих аналогов в одномерных (x, t) моделях: амплитуда сверхтяжелых пульсонов $c(t)$ превышает расстояние между соседними вакуумами, $3\pi < c(t) < 4\pi$. Прослежена "каскадная" эволюция сверхтяжелого пульсона, в результате которой формируется изученный ранее тяжелый пульсон. В §4 сравниваются количественные характеристики тяжелых и сверхтяжелых пульсонов.

ГЛАВА 5. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА С ЛОГАРИФИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ.

В §1 уравнение КГЛН в D-мерном пространстве,

$$u_{\tau\tau} - \Delta_{\xi\xi} u + m^2 u - l^{-2} u \ln(|u|^2 a^{D-1}) = 0, \quad (39)$$

преобразуется после введения безразмерных переменных

$$t = \tau l^{-1}, \quad \vec{x} = \xi l^{-1}, \quad u = l^{(1-D)/2} G \varphi, \quad (40)$$

$$G^2 = (l a^{-1})^{D-1} \exp [D + (l m)^2],$$

к виду

$$\varphi_{tt} - \Delta_{xx} \varphi - D \varphi - \ln(|\varphi|^2) \varphi = 0. \quad (41)$$

Уравнение (41) обладает при любом целочисленном $D \geq 1$ замечательными свойствами: оно имеет аналитические солитонные решения - гауссоны, а также более общие решения факторизованного вида:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \gamma(t) \exp[-i\psi(t)] \exp(-\vec{x}^2/2), \quad \text{Im } \gamma(t) = 0, \quad (42)$$

из которых наиболее интересными являются неизлучающие пульсоны, имеющие заряд

$$Q = 2\pi^{D/2} G^2 \gamma, \quad \gamma = \gamma^2 \psi_c = \text{const}. \quad (43)$$

Пульсонам соответствуют колебания $\gamma(t)$ материальной точки (MT) в потенциальном рельефе

$$U_\gamma(\gamma) = [\gamma^2 \gamma^{-2} + \gamma^2 (1 - \ln \gamma^2)]/2 \quad (44)$$

относительно солитонного положения равновесия $\gamma_c = \exp(-\omega^2/2)$.

В §1 описаны вычислительные эксперименты, результаты которых демонстрируют устойчивость как заряженных, так и нейтральных сферически-симметричных пульсонов. Таким образом, указан пример самоподдерживающегося неизлучающего трехмерного сгустка незаряженного скалярного поля с бесконечным временем жизни. В §1 предложена модификация модели (41), в которой плотность гамильтониана является положительно определенной и сохраняются

солитонные и пульсонные решения вида (42) с $|\varphi| < 1$.

Квазиклассическое квантование D-мерных нейтральных пульсонов было выполнено в §2 на основе аналога правила квантования Бора-Зоммерфельда для осциллирующих полевых систем ($\tau_2 - \tau_1 = T$, T - период пульсона):

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d^D \xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\tau} u_\tau = 2\pi N. \quad (45)$$

Для нахождения точек поворота $\gamma_0(N)$, соответствующих уровню с номером N, получено условие

$$N = 2G^2 \pi^{D/2-1} I(\gamma_0), \quad I(\gamma_0) = \int_0^{\gamma_0} (2[U_0(\gamma_0) - U_0(\gamma)])^{1/2} d\gamma. \quad (46)$$

Значения интеграла $I(\gamma_0)$, где $0 < \gamma_0 \leq 1$, а $U_0(\gamma)$ определено формулой (44) при $\gamma=0$, найдено численно для значений $\gamma_0 = k/100$, $k=1, 2, \dots, 100$. По зависимости $I(\gamma_0)$ построена инвариантная относительно выбора параметров модели кривая $U_0(I)$, определяющая $E G^{-2} l^{-D/2}$ как функцию от $N G^{-2} \pi^{1-D/2}/2$ (здесь E - энергия пульсона, а N рассматривается как непрерывная переменная). Обнаружено, что $d^2 U_0/dI^2 < 0$ при всех $\gamma_0 \in (0, 1)$ (т.е. уровни энергии сгущаются с ростом N); при малых I, несмотря на неаналитичность $U_0(\gamma)$ ($d^2 U_0/d\gamma^2 = \infty$ при $\gamma=0$) справедливо соотношение: $U_0 \approx \text{const} \cdot I$.

Наконец, в §2 выполнено "двойное" квантование заряженных D-мерных пульсонов, являющееся результатом одновременного выполнения условия квантования по Бору-Зоммерфельду для пульсонов комплексного скалярного поля

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d^D \xi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\tau} u_\tau + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\tau^*} u_\tau^* \right) = 2\pi N \quad (47)$$

и условия квантования заряда, $Q=1$. Для нахождения точек поворота в рельефе (44), $\gamma_r(N)$ и $\gamma_l(N)$, $U_\gamma(\gamma_r) = U_\gamma(\gamma_l)$, использовалось соотношение

$$N = (\pi)^{-1} \int_{y_0}^{y_1} [2U_\gamma(y_r) - y^2(1 - \ln y^2)] \{2([U_\gamma(y_r) - U_\gamma(y)])\}^{-1/2} dy \quad (48)$$

(предполагается, что $\gamma = (2\pi^{D/2} G^2)^{-1}$). При $y_r \rightarrow y_s(\omega)$, вычисляя интеграл (48) аналитически, находим: $N \rightarrow N_s(\omega) = \omega(\omega^2 - 1/2)^{-1/2}/2$. В общем случае задача квантования решалась численно (см. §1), в результате получен дискретный спектр масс пульсонов единичного заряда.

Изучение динамики взаимодействия солитонов в рамках уравнения КГЛН представляет особый интерес из-за наличия в этой модели, не являющейся вполне интегрируемой, точных неизлучающих пульсонных решений. В §3 изложены результаты систематических расчетов парных столкновений солитонов уравнения (41) с $D=1$ при задании начальных данных в виде движущихся навстречу друг другу солитонов

$$\varphi(x, t) = \sum_{p=1}^2 \exp(-\omega_p^2/2) \exp[-\gamma_p^2(x - x_{op} - v_p t)^2/2] \times \exp(-i\omega_p \gamma_p [t - v_p(x - x_{op})] + i\theta_p), \quad (49)$$

$$\gamma_p = (1 - v_p^2)^{-1/2}, \quad v_1 = -v_2 = v > 0, \quad x_{o2} = -x_{o1} = 3.5\gamma_p > 1, \quad \omega_p^2 > 0.5.$$

Первая серия экспериментов выполнена для солитонов с $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\theta_1 = \theta_2$. Показано, что при $\omega > 1.3$ и $v > 0.2$ после стадии перекрытия вновь возникают разбегающиеся частицеподобные образования, имеющие форму и скорости, близкие к начальным. При малых скоростях (например, $v = 0.06$, $\omega = 2$) образуется долгоживущее осциллирующее связанное состояние, из которого при $t \rightarrow \infty$ формируется неизлучающий пульсон вида (42). В §3 обнаружено также существование областей параметров (ω, v) , в которых как следствие неограниченности снизу плотности гамильтониана исследуемой модели происходит образование сингулярности поля, возникающей или сразу после перекрытия солитонов, или в результате эволюции формирующегося на промежуточной стадии короткоживущего связанного состояния. В §3 отмечается, что существование указанных четырех характерных

областей наблюдается и в экспериментах, проведенных в рамках уравнения (42) с $D=2$.

Далее в §3 показано, что картина взаимодействия солитонов одинаковых амплитуд меняется, если $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 \neq 0$ (так, при $\Delta\theta = \pi$ солитоны с любыми допустимыми ω и v упруго отталкиваются). При столкновениях солитонов с $\omega_1 = -\omega_2 = \omega$ ($Q_1 = -Q_2$) и $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$ распределение плотности энергии остается симметричным, а плотности заряда - антисимметричным при всех t ; образования связанного состояния с центром в точке x_0 не зафиксировано даже при $v = 0.02 \ll 1$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВКЛЮЧЕННЫЕ В ДИССЕРТАЦИЮ, ИЗЛОЖЕНЫ В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ :

1. Bogolubsky I.L. The mass spectrum in the baryon model in $1/N$ expansion of nonrelativistic QCD. JINR, E2-12864, Dubna, 1979.
2. Боголюбская А.А., Боголюбский И.Л. Исследование барионоподобных связанных состояний нерелятивистских кварков в приближении самосогласованного поля. - ТМФ, 1983, т.54, N2, с.258-267.
3. Боголюбский И.Л. Трехмерные топологические солитоны на решетке. ОИЯИ, P5-85-482, Дубна, 1985.
4. Боголюбский И.Л. Симметричные трехмерные топологические солитоны в решеточной модели магнетика. ОИЯИ, P5-85-588, Дубна, 1985.
5. Bogolubsky I.L. Three-dimensional topological solitons in the lattice model of a magnet with competing interactions. - Phys.Lett., 1988, v.A126, p. 511-514.
6. Боголюбский И.Л. Численный метод исследования топологических солитонов в модели Скирма. ОИЯИ, P5-87-354, Дубна, 1987.
7. Боголюбская А.А., Боголюбский И.Л. Двумерная модель анизотропного магнетика с устойчивыми топологическими солитонами. ОИЯИ, P5-87-761, Дубна, 1987.
8. Боголюбская А.А., Боголюбский И.Л. Исследование локализованных распределений с топологическим зарядом $Q_t = 2$ в двумерной модели анизотропного магнетика. ОИЯИ, P5-88-311, Дубна, 1988.

9. Bogolubskaya A.A., Bogolubsky I.L. Stationary topological solitons in the two-dimensional anisotropic Heisenberg model with a Skyrme term. - Phys.Lett., 1989, v.A136, p. 485-488.
10. Боголюбский И.Л. Сравнительный анализ устойчивости одномерных и сферически-симметричных солитонов скалярного поля с самодействием J_{μ}^{μ} - а) ТМФ, 1980, т.43, в.3, с.378-385; б) ОИЯИ, P2-80-796, Дубна, 1980.
11. а) Bogolubsky I.L. Oscillating particle-like solutions of nonlinear Klein-Gordon equation. JINR, E2-10129, Dubna, 1976; б) Боголюбский И.Л. Осциллирующие частицеподобные решения нелинейного уравнения Клейна-Гордона. - Письма в ЖЭТФ, 1976, т.24, в.10, с. 579-583.
12. а) Bogolubsky I.L., Makhankov V.G. On the pulsed soliton life-time in two classical relativistic theory models. JINR, E2-9695, Dubna, 1976. б) Боголюбский И.Л., Маханьков В.Г. О времени жизни пульсирующих солитонов в некоторых классических моделях. - Письма в ЖЭТФ, 1976, т.24, в.1, с.15-18.
13. а) Bogolubsky I.L., Makhankov V.G. Dynamics of heavy spherically symmetric pulsons. JINR, E2-10223, Dubna, 1976. б) Боголюбский И.Л., Маханьков В.Г. Динамика сферически-симметричных пульсонов большой амплитуды. - Письма в ЖЭТФ, 1977, т.25, в.2, с.120-123.
14. а) Боголюбский И.Л. Каскадная эволюция сферически-симметричных пульсонов в многовакуумных моделях теории поля. ОИЯИ, P2-10291, Дубна, 1976. б) Bogolubsky I.L. Cascade evolution of spherically-symmetric pulsons in multivacuum field theory models. - Phys.Lett, 1977, v. A61, N4, p. 205-206.
15. а) Боголюбский И.Л., Маханьков В.Г., Швачка А.Б. Динамика столкновений двумерных пульсонов в рамках ϕ^4 теории поля. ОИЯИ, P2-10473, Дубна, 1977. б) Bogolubsky I.L., Makhankov V.G., Shvachka A.B. Dynamics of the collisions of two space-dimensional pulsons in ϕ^4 field theory. - Phys.Lett. 1977, V.A63, N3, p.225-227.
16. Боголюбский И.Л., Маханьков В.Г. Динамика сферически-

симметричных пульсонов в нелинейных скалярных моделях теории поля. ОИЯИ, Д10, 11-11264, Дубна, 1978.

17. а) Bogolubsky I.L. The Bohr-Sommerfeld quantization of n-dimensional neutral and charged pulsons. JINR, E2-11628, Dubna, 1978; б) Боголюбский И.Л. Квантование по Бору-Зоммерфельду n-мерных нейтральных и заряженных пульсонов. - ЖЭТФ, 1979, т.76, в.2, с.422-430.
18. а) Маханьков В.Г., Боголюбский И.Л., Куммер Г., Швачка А.Б. Взаимодействие релятивистских гауссонов. ОИЯИ, P2-80-367, Дубна, 1980. б) Makhankov V.G., Bogolubsky I.L., Kummer G., Shvachka A.B. Interaction of Relativistic Gaussons. - Physica Scripta, 1981, v.23, p.767-773.
19. Bogolubskaya A.A., Bogolubsky I.L. On stationary topological solitons in a two-dimensional anisotropic Heisenberg model. - Lett.Math.Phys., 1990, v.19, p.171-177.
20. Bogolubskaya A.A., Bogolubsky I.L. Computer investigation of stationary topological solitons in two- and three- dimensional Heisenberg-type models. In: Proceedings of the International Conference on Numerical Methods and Applications, Sofia, 1988. Publishing House of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1989.
21. Bogolubskaya A.A., Bogolubsky I.L. Stationary topological solitons in non-one-dimensional sigma-models with stabilizing terms. In: Proceedings of the 4-th International Workshop "Solitons and Applications", Dubna, 1989. World Scientific, Singapore, 1990.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 августа 1991 года.