ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 517.957

5-90-171

КОСТОВ
Николай Асенов

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Специальность: 01.04.02 - теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1990

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Обьединенного института ядерных исследований

Научные руководители:

доктор физико-математических наук профессор — А. Я. СПАСОВ

кандидат физико-математических наук старший научный сотрудник — В. П. ГЕРДТ

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук профессор — Е. Д. БЕЛОКОЛОС

доктор физико-математических наук профессор — В. Б. МАТВЕЕВ

Ведущая организация:

Институт математики Академии наук УССР, Киев

Автореферат разослан " 19 " марта 1990 г.

Защита состоится " 4 " апреля 1990 г. на заседании специализированного совета К047.01.01 Лаборатории теоретической физики Обьединенного института ядерных исследований, Дубна, Московской области.

С диссертацией можно познакомиться в библиотеке Обьединенного института ядерных исследований.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук — А. Е. ДОРОХОВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Исследование систем взаимодействующих нелинейных волн занимает одно из ведущих мест в нелинейной теории волн. Практически во всех областях физики, таких как физика твердого тела, физика плазмы, нелинейная оптика, гидродинамика, с их помощью удалось существенно расширить представления о возможных нелинейных эффектах в диспергирующих средах.

Существенное продвижение в теории нелинейных волн связано с появлением в конце 60-тых годов метода обратной задачи рассеяния. В 1974 г.,благодаря пионерской работе С. П. Новикова, в развитие этого метода возникло новое направление-теория конечнозонного интегрирования. Ее основы были заложены в цикле работ С. П. Новикова, Б. А. Дубровина, В. Б. Матвеева А. Р. Итса, И. М. Кричевера и П. Лакса. В частности методом конечнозонного интегрирования было найдено выражение конечнозонных решений через g-мерную θ-функцию Римана, которая связывается с римановой поверхностью рода g. Такое представление позволило единым образом рассматривать различные типы нелинейных волн (солитоны, кноидальные волны, бикноидальные волны,рациональные солитоны, топологические солитоны и др.).В результате развития теории была осознана важность и необходимость классификации возможных типов нелинейных волн в разных моделях математической физики. Эта теория имеет важное применение для получения единым образом квазипериодических, периодических, эллиптических, солитонных, рациональных решений широкого класса нелинейных эволюционных уравнений. Она позволяет классифицировать нелинейные волны для физически важных уравнений математической физики. В связи с решением этой проблемы классификации решений С. П. Новиковым и Б. А. Дубровиным была выдвинута программа эффективизации решений нелинейных уравнений.

С другой стороны, в последние годы наблюдается быстрое развитие компьютерной алгебры, сравнительно новой области применения компьютеров в задачах математической физики и других областях. Резкое возрастание задач, требующих выполнения громоздких преобразований в символьном виде, требуют разработки специфических методов для их решения. Методы компьютерной алгебры позволяют получать новые результаты, принципиально недостижимые другими методами. Одним из актуальных направлений этих методов является исследование нелинейных уравнений математической физики, в частности, теории взаимодействующих нелинейных волн.

Цель работы:
исследовать конкретные интегрируемые модели взаимодействующих волн; найти новые, вполне интегрируемые системы такого типа; построить для них квазипериодические решения; применить методы компьютерной алгебры в этих исследованиях.

Научная новизна и практическая ценность работы:

С помощью предложенного в диссертации нового понятия дополнительных динамических систем (см. далее Теорему 1, определение 2) для динамических систем, связанных с одномерным уравнением Шредингера, впервые удалось проинтегрировать физически важные динамические системы: например, систему Гарнье, уравнения, описывающие анизотропный гармонический осциллятор в квадратичном потенциале, уравнения Хартри-Фока для фермионов с δ-потенциалом и др. На основе этого подхода удалось доказать существование нового класса потенциалов (гиперэллиптический, где ∞ является точкой ветвления) для нестационарного операто-

ра Шредингера и построить эффективные в смысле Новикова-Дубровина решения для векторного нелинейного уравнения Шредингера. Эти решения описывают явления различной природы в теории ϕ^4, теории нелинейных волн в плазме, теории волн на воде, нелинейные волны в молекулярных цепях. Результаты исследования, проведенного в диссертации, могут служить для более глубокого понимания физической сути этих явлений.

Для защиты выдвигаются следующие основные результаты, полученные в диссертации.

1. Применяется вариант метода усреднения Боголюбова-Крылова-Митропольского для исследования четырехволнового взаимодействия в модели ϕ^4 и трехволнового взаимодействия в плазменном столбе. Впервые получена система уравнений в частных производных, котороя описывает трехволновое взаимодействие высокочастотных поверхностных волн в плазменном столбе с учетом поверхностных зарядов и подвижной границы.

2. Получены новые вполне интегрируемые динамические системы типа уравнений самозахвата в молекулярных цепях.

3. Для нестационарного уравнения Шредингера впервые найден новый класс гиперэллиптических конечнозонных решений и решений, связанных с гиперэллиптическими накрытиями над тором.

4. Введено понятие дополнительных динамических систем (см. далее Теорему 1, определение 2). Приведены физически важные конкретные примеры таких систем и найден общий вид их квазипериодических решений.

5. Разработаны оригинальные алгоритмы и реализованы конкретные програмы на языке системы аналитических вычислений REDUCE для решения следующих задач:

А. изучение гравитационных волн на воде,

B. построение рядов Пьюизо методом диаграмм Ньютона,

C. построение функций Бейкера-Ахиезера, ассоциированных с накрытиями над тором для уравнений класса Альфана.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на:

-семинарах в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации и Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

-международной конференции по поверхностным волнам в плазме Благоевград, 1981,

-международной конференции по поверхностным волнам в плазме и в твердом теле, Дубровник, 1985,

-международном совещании по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1985,

-европейской конференции по компьютерной алгебре EUROCAL'87, Лейпциг, 1987.

-II Школе по нелинейным уравнениям, Варна, 1987,

-международной конференции "Компьютеры и математика", Массачузетс (США),1989,

-международном совещании "Солитоны и приложения", Дубна, 1989,

-IV международной рабочей группе по нелинейным и турбулентным процессам в физике, Киев, 1989.

Публикации. По результатам исследований, составившим основу диссертации, опубликовано 12 работ.

Объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы. Она содержит 125 страниц машинописного текста. Список литературы состоит из 135 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит краткий обзор литературы, постановку и актуальность задач, рассмотренных в диссертации, а также краткое содержание по главам.

Первая глава.

В первом параграфе рассматривается общая формулировка нелинейных эволюционных уравнений типа взаимодействующих волн на однородных и симметрических пространствах. Обсуждается их физическая интерпретация. Этот параграф имеет вводный характер.

Наиболее подробно изученным типом взаимодействующих нелинейных волн является система из трех волн, пространственно - временная эволюция которых описывается системой нелинейных уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_{g1}\frac{\partial}{\partial x}\right) q_1 = i\lambda_1\, q_2^{*}\, q_3,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_{g2}\frac{\partial}{\partial x}\right) q_2 = i\lambda_2\, q_1^{*}\, q_3, \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_{g3}\frac{\partial}{\partial x}\right) q_3 = i\lambda_3\, q_1\, q_2,$$

где V_{gi} $(i=1,2,3)$-групповые скорости, q_i - амплитуды волн, λ_i $(i=1,2,3)$-коэффициенты связи. Нелинейные эволюционные уравнения типа (1) в случае слабой нелинейности могут быть получены на основе общего метода усреднения Боголюбова-Митропольского или метода многих масштабов, представляющего собой фактически одну из многочисленных модификаций метода Боголюбова-Митропольского. Обобщением систем типа (1) является задача n-волн, которая в представлении Захарова-Шабата имеет вид

$$[\, i\partial_t + A\,\lambda - U\,,\, i\partial_x + B\,\lambda - U\,] = 0 \qquad (2)$$

при условиях редукции $U_A^{*}=-JU_AJ$, $U_B^{*}=-JU_BJ$, где A,B постоянные вещественные диагональные матрицы порядка n , U_A, U_B - nxn матрицы с нулевыми диагональными элементами, λ-спектральный параметр, J-диагональная матрица с диагональными элементами, равными ±1. При n=3 система (2) описывает различные типы взаимодействия трех волн, в том числе (1). Первые примеры таких уравнений были найдены В.Е. Захаровым и С.В. Манаковым.

Во втором параграфе применяется вариант общего метода усреднения Боголюбова-Митропольского для получения уравнений, описывающих резонансное и нерезонансное взаимодействие нелинейных волн в слабонелинейных средах с малой дисперсией. Нелинейность считается слабой, если обусловленное ею изменение амплитуды волны является медленным по сравнению с быстрыми гармоническими колебаниями. Для иллюстрации идей вывода мы используем четырехволновое взаимодействие в модели ϕ^4, где выкладки проще. На более сложном примере нерезонансного взаимодействия трех высокочастотных поверхностных волн в плазменном столбе с учетом поверхностных зарядов и подвижной границы дается вывод уравнений связанных мод (1).

Третий параграф посвящен построению лаксовых представлений для конкретных моделей типа нелинейных взаимодействующих волн. Новым результатом здесь является построение и анализ двух новых вполне интегрируемых систем. Одна из них в случае двух степеней свободы изоморфна непериодической цепочке Тоды, другая содержит в качестве редукций уравнения самозахвата.

Вторая глава содержит построение конечнозонных решений для физически важных нелинейных эволюционных уравнений. Вскрывается их связь со стационарными задачами, т.е. с динамическими вполне интегрируемыми по Лиувиллю системами.

Одним из основных типов эволюционных уравнений, описывающих нелинейное взаимодействие волн, является векторное нелинейное уравнение Шредингера

$$i\partial_t q_j + \partial_{xx} q_j + \Big(\sum_{i=1}^{g} |q_i|^2\Big) q_j = 0. \qquad (3)$$

Стандартным образом в методе обратной задачи рассеяния этому уравнению сопоставляется иерархия нелинейных уравнений, которые в компактном виде можно представить в виде условий нулевой кривизны (представление Захарова-Шабата):

$$[\partial_x - U, \partial_t - V^{(N)}] = 0, \qquad (4)$$

где $V^{(N)} = V_0\lambda^N + V_1\lambda^{N-1} + \dots V_N$, $U(x,t,\lambda), V^{(N)}(x,t,\lambda)$ -nxn матрицы, λ-спектральный параметр. Следующее определение, которое впервые было дано С.П. Новиковым , позволяет нам эффективно связать теорию построения частных решений (конечнозонных решений) для уравнений типа (4) с теорией интегрируемых динамических систем:

Определение 1. Будем называть конечнозонными решениями уравнения (2) такие решения, для которых существует полиномиальная по λ матричная функция $L(x,t,\lambda)$ такая, что

$$L_t=[V^{(i)},L],\ i=1,\dots,N,\ L_x=[U,L], \qquad (5)$$
$$L=L_0\lambda^N + L_1\lambda^{N-1}+\dots L_N.$$

На основе анализа последнего определения в диссертации доказано, что второй изоспектральный класс N=2 определяет новый вид решений, а именно, гиперэллиптический класс, где ∞ является точкой ветвления. Это позволило проинтегрировать в явном виде второе уравнение в (5), N=2, которое в случае векторного нелинейного уравнения Шредингера является одномерной системой Хартри-Фока для фермионов в δ-потенциале.

В последние годы был достигнут значительный прогресс в описании спектра одномерного уравнения Шредингера

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - u(x)\right)\Psi = \lambda \Psi, \qquad (6)$$

включая описание и построение квазипериодических потенциалов по по двум спектрам. В этом случае спектром оператора $L = \frac{d^2}{dx^2} - u(x)$ является гиперэллиптическая риманова поверхность К: $\mu^2=\prod_{i=0}^{2g}(\lambda - \lambda_i)$. Важные вполне интегрируемые динамические системы являются связанными с уравнением (6) в случае конечнозонного потенциала. Связанные уравнения Неймана, уравнения Неймана, уравнения Россотахиуса являются примерами этого типа. Приведем некоторые физически важные динамические системы:

i) связанные уравнения Неймана

$$\frac{d^2}{dx^2} x_i + \left(\sum_{j=0}^{g} b_j x_j y_j + \frac{d}{dx} x_j \frac{d}{dx} y_j\right)x_i = b_i x_i, \qquad i,j=0,\dots,g$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y_i + \left(\sum_{j=0}^{g} b_j x_j y_j + \frac{d}{dx} x_j \frac{d}{dx} y_j\right)y_i = b_i y_i. \qquad (7)$$

где x_i, y_i удовлетворяют условию $\sum_{i=0}^{g} x_i y_i = 1$. Уравнение Неймана мы получаем редукцией $x_i = y_i$. Эта система описывает движение несвязанных осцилляторов $\frac{d^2}{dx^2} x_i = b_i x_i$ на сфере $\sum_{i=0}^{g} x_i^2 = 1$ под действием силы $\sum_{i=0}^{g} b_i x_i^2 + (\frac{d}{dx} x_i)^2$. Пусть $x_i = r_i \exp(\theta_i)$, $y_i = r_i \exp(-\theta_i)$, $c_i = r_i^2 \theta_i$ $i=0,\dots,g$, тогда при помощи процедуры исключения Дейфта уравнения трансформируются в систему Россохатиуса II

$$\frac{d^2}{dx^2} r_i = b_i r_i - \left(\sum_{j=0}^{g} b_j r_j^2 + r_j{}^2 - c_j^2/r_j^2\right) r_i - c_i^2/r_i^3 \qquad (8)$$

(ii) Система Гарнье

$$\frac{d^2}{dx^2} x_i = \left(\sum_{j=1}^{g} 2x_j y_j + a_i\right)x_i, \qquad (9)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y_i = \left(\sum_{j=1}^{g} 2x_j y_j + a_i\right)y_i,$$

где $a_1 < a_2 \dots < a_g$ -фиксированные вещественные числа. g-мерный анизотропный гармонический осциллятор в радиальном квартичном потенциале получаем при $x_i = y_i$. Существует другая интересная динамическая система, которую мы назовем системой Россохатиуса I. В нашем контексте эту систему получим при помощи процедуры исключения Дейфта. Пусть $x_i = r_i \exp(\theta_i)$, $y_i = r_i \exp(-\theta_i)$, $c_i = r_i^2 \theta_i$, $i=1,\dots,g$, тогда система Гарнье трансформируется в систему Россохатиуса I

$$\frac{d^2}{dx^2} r_i = 2\left(\sum_{j=1}^{g} r_j^2\right) r_i + a_i r_i - c_i/r_i^3. \qquad (10)$$

Стационарные векторные уравнения Шредингера получаем редукцией $x_i^* = y_i$

$$\frac{d^2}{dx^2} x_i = \left(2\sum_{j=1}^{g} |x_j|^2 + a_i\right) x_i \qquad (11)$$

Эта система совпадает с одномерной системой Хартри-Фока для фермионов в δ-потенциале.

В третьем параграфе доказана следующая

Теорема 1. Пусть $u(x)$-вещественный гладкий конечнозонный потенциал, ассоциированный с невырожденной гиперэллиптической кривой рода g и $p_1,\dots,p_g$; $q_1,\dots,q_g$ - два дивизора степени g и $g+1$ соответственно. Обозначим через $\Psi(x,p_1),\dots,\Psi(x,p_g)$ и $\Psi(x,q_0),\dots,\Psi(x,q_g)$. собственные функции (функции Бейкера-Ахиезера) одномерного уравнения Шредингера

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - u(x)\right)\Psi = \lambda\Psi \tag{12}$$

и через $\lambda(p_1),\dots,\lambda(p_g)$ и $\lambda(q_0),\dots,\lambda(q_g)$ - соотвествующие собственные числа. Тогда справедливы равенства

$$\text{(ii)}\quad u(x)=2\sum_{i=1}^{g}\lambda(p_i)\Psi(x,p_i)\Psi^{\tau}(x,p_i)e_i^{-2}+2\sum_{i=1}^{g}\lambda(p_i)-\sum_{i=0}^{2g}\lambda_i,$$

$$e_i^{-2}=\prod_{j=1}^{g}(a_i-\mu_j(0))/\prod_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{g}(a_i-a_j),\quad i=1,\dots,g,$$

$$\lambda(p_i)=a_i \tag{13}$$

$$\text{(ii)}\quad u(x)=2\sum_{i=0}^{g}\lambda(q_i)\Psi(x,q_i)\Psi^{\tau}(x,q_i)\tilde{e}_i^{-2}-2\sum_{i=0}^{g}\lambda(q_i)+\sum_{i=0}^{2g}\lambda_i,$$

$$\tilde{e}_i^{-2}=\prod_{j=1}^{g}(b_i-\mu_j(0))/\prod_{\substack{i\neq j\\ i=0}}^{g}(b_i-b_j),\quad i=0,\dots,g,$$

$$\sum_{i=0}^{g}\tilde{e}_i^{-2}\Psi(x,q_i)\Psi^{\tau}(x,q_i)=1,\qquad \lambda(q_i)=b_i,$$

где $\mu_i(0)$-полюса функции $\Psi(x,p)$ на римановой поверхности $w^2=R(\lambda)=\prod_{i=0}^{2g}(\lambda-\lambda_i)$, $\Psi^{\tau}(x,p)=\Psi(x,\tau p)$, τ-гиперэллиптическая инволюция . Соотвествующие уравнений на собственные значения являются системой Гарнье и системой связанных уравнений Неймана.

Определение 2. Назовем динамические системы, определенные в теореме 1 дополнительными системами.

Свойство дополнительности динамических систем естественным образом можно обобщить для оператора Дирака, для обобщенного оператора Захарова-Шабата.

Третья глава посвящена изучению нелинейных уравнений, которые обладают представлением Захарова-Шабата, с помощью систем аналитических вычислений.

В первом параграфе предложен общий алгоритм для исследования этих нелинейных уравнений, который включает в себя как некоторые хорошо известные алгоритмы: например, Блисса-Коутса, Бухбергера и др., так и ряд новых алгоритмов, позволяющих:

i) строить частные, физически важные решения для уравнений типа Захарова-Шабата,

ii) генерировать физически важные решения для обыкновенных дифференциальных уравнений класса Альфана,

iii) строить интегрируемые семейства коммутирующих операторов в соотвествии с теории Бурхнала-Чаунди.

Во втором параграфе обсуждается реализация метода Боголюбова- Крылова-Митропольского на языках систем аналитических вычислений в общем плане и на конкретном примере расспространения нелинейных волн на воде.

В параграфе 3 исследуется спектральная кривая

$$\det(L(\lambda) - \mu I)=0. \tag{14}$$

методом диаграмм Ньютона. Предложен алгоритм и реализация этого алгоритма на языке аналитических вычислений REDUCE 3.2. Характерные времена счета продемонстрированы на конкретных примерах из теории особенностей алгебраических кривых.

В параграфе 4 предлагается полностью алгоритмизованный подход к проблеме построения собственных функций и спектральной кривой для уравнений коэффициентами которых являются эллиптические функции. В качестве примеров рассматриваются двухзонные потенциалы Ламе и Требиха-Вердье, а также четырехзонный потенциал Ламе и трехзонный потенциал уравнения Альфана.

Пятый параграф посвящен применению методов компьютерной алгебры для решения некоторых систем нелинейных алгебраических уравнений, возникающих при классификации интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений.

В заключении кратко обсуждаются основные результаты работы.

РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

1. Kostov N.A., Shivarova A., Zhelyazkov I. Coupling Equations of Nonresonant Interaction of Two High-Frequency Surface Waves in Plasmas, Blagoevgrad'81, Sofia, Sofia University, 1983, p.337-341.
2. Kostov N., Shivarova A., Coupled-mode equations for non-resonant interaction of high-frequency surface waves, Plasma Physics, 1983, v.25, No.8, p.891-900.
3. Lingren T., Stenflo L., Kostov N., Zhelyazkov I., Three-wave interaction in a cold plasma column, J. Plasma Physics, 1985, v.34, No.3, p.427-434.
4. Kostov N., Zhelyazkov I., Three-wave interaction of surface in a thin cold plasma column, Surface waves in plasmas and solids, ed. S. Vukovic, ICSW-85, Singapure, World Scientific 1986, p.584-587.
5. Kostov N.A., Quasi-periodic solutions of the integrable systems related to the Hill's equation, JINR,1988, E5-88-261,11p. Lett. in Math.Phys.,1989, v.17, p.95-108.
6. Kostov N.A., Enolskii V.Z., Ordinary differential equations and the coverings of the torus, Preprint of the Technical University of Denmark, 1989, 53p.
7. Inosemtsev V.I., Kostov N.A., New integrable systems of interacting nonlinear waves, JINR, 1988, E5-88-622, 10p.
8. Gerdt V.P., Kostov N.A., Kostova Z.T., Computer algebra and computation of puiseux expansions of algebraic functions, Lecture Notes in Computer Sciences, v.278, ed. J.H.Davenport, Eurocal'87, Springer, 1989, p.206-207.
9. Gerdt V.P., Kostov N.A., Shvachka A.B., Investigation of nonliner water waves using computer algebra system REDUCE-2 JINR, 1983, E11-83-750, 8p.
10. Gerdt V.P., N.A. Kostov, A.Ya. Spasov, Investigation of four-wave interaction in ϕ^4 model using computer algebra in. Solitons and Applications Proc.of the 4 th. International Workshop Dubna, USSR, 1989, ed. by V.G.Makhankov, V.K. Fedyanin, O.K. Pashaev (JINR,Dubna), Singapure, World Sci., 1990, 121-127.
11. Gerdt V.P.,Kostov N.A. ,Zharkov A. Yu., Nonlinear evolution equations and solutions of algebraic systems: the imortance of computer algebra, JINR, 1989, E11-89-624, 16p.
12. Gerdt V.P., Kostov N.A., Computer algebra in the theory of ordinary differential equations of Halphen type, in. Computers and Mathematics, ed. E. Kaltofen, S.M. Watt, Springer, New Work, 1989, 178-288.

Рукопись поступила в издательский отдел 11 марта 1990 года.