

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

X-727

УДК 519.677

5-88-134

ХОЛМУРОДОВ
Холмирзо Тагойкулович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДИНАМИКИ СОЛИТОНОВ В МОДЕЛЯХ БОЗЕ-ГАЗА**

Специальность: 05.13.16 -
применение вычислительной техники,
математического моделирования
и математических методов в научных исследованиях
Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 1988

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Научные руководители:
член-корреспондент АН Тадж ССР
профессор

Ф.Х.ХАКИМОВ

кандидат физико-математических наук
старший научный сотрудник

О.К.ПАШАЕВ

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
профессор

Е.П.ЖИДКОВ

кандидат физико-математических наук
научный сотрудник

Е.М.МАСЛОВ

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Институт металлофизики АН УССР, Киев.

Защита диссертации состоится "___" _____ 1988 года на заседании Специализированного совета Д047.01.04 Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна, Московской области.

Автореферат разослан "___" _____ 1988 года.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук

Иванченко
З.М.ИВАНЧЕНКО

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Богатые возможности, открывшиеся перед физикой конденсированного состояния в последние годы, тесно связаны с изучением нелинейных возбуждений солитонного типа. Они встречаются в таких областях, как сверхпроводимость и магнетизм, сверхтекучесть квантовых жидкостей, в квазиодномерных системах типа полиацетилена с новыми механизмами проводимости и многих других. Практическая реализация в виде новых технологий, открытие новых типов сверхпроводников, а также обогащение теоретических концепций фундаментальной физики выдвигают исследования нелинейных эффектов в актуальнейшую область современной физики.

Задачами первостепенной важности в исследовании нелинейных возбуждений являются вопросы нелинейного спектрального преобразования произвольного начального импульса, генерируемого в системе. Какие моды могут быть возбуждены при его распаде и как они зависят от параметров начального импульса, какие фундаментальные моды ответственны за поведение системы в той или иной области изменения параметров и как при этом происходит перестройка динамического режима с образованием новых когерентных структур в духе синергетики? В недиссипативных системах, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, устойчивым когерентным образованиям такого типа соответствуют решения в виде локализованных уединенных волн или солитонов. Поэтому исследование динамики солитонов с целью определения областей их генерации или их отсутствия вообще дает прямой ответ на вопрос о порядке или хаосе в системе.

Прогресс в изучении нелинейных явлений неразрывно связан с применением синергетического подхода, включающего в себя синтез аналитических и численных методов исследования. Если в одномерных интегрируемых системах исследование удается провести аналитически в рамках известного метода обратной задачи рассеяния (включающего решение задачи Коши для данной нелинейной модели, линейную задачу, теорию возмущений и т.д.), то в неинтегрируемых и неодномерных системах в настоящее время только применение методов вычислительной синергетики позволяет получить желаемый ответ.

Среди многочисленных моделей физики конденсированных сред универсальными свойствами обладают модели неидеального бозе-газа, описываемые в квазиклассическом приближении, либо в методе самосогласованного поля уравнением Шредингера с полиномиальной нелинейностью. Поэтому исследование динамики солитонов в этих моделях представляет одну из наиболее актуальных задач современной нелинейной математической физики.

Цель работы – совместное аналитическое и численное исследование динамики солитонов в моделях бозе-газа с полиномиальной нелинейностью.

Научная новизна. Впервые установлено существование порога образования солитонов при распаде импульсов "нулевой площади" для уравнения Кортевега-де Вриза. Найден порог образования "темных" солитонов при дифракции солитона в нелинейной дефокусирующей среде.

Исследована устойчивость солитонных решений нового типа $U(2)$ нелинейного уравнения Шредингера.

Изучена эволюция солитоноподобных возмущений ("пузырей") неидеального бозе-газа в пространствах с числом измерений $d = 1, 2, 3$ и найдена область устойчивости движущихся пузырей.

Практическая ценность. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при анализе нелинейных структур в физике конденсированного состояния. Изученный пороговый характер образования солитонов может быть использован при описании структурных фазовых переходов в конденсированных средах, при исследовании и применении нелинейных электрических цепей, а также при разработке новых механизмов записи и передачи информации в волоконных световодах. Результаты по динамике "пузырей в конденсате" имеют важное значение для анализа сверхтекучих бозе-жидкостей и сверхпроводящих высокотемпературных соединений.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано девять работ. Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на семинарах ЛВТА и ЛТФ ОИЯИ, ТГУ им.В.И.Ленина (Душанбе), на XXIII научной конференции факультета физико-математических и естественных наук Университета дружбы народов им. П.Лумумбы (Москва, 1987г.) на III Всесоюзном совещании "Теория солитонов и приложения" (Пушкино, 1987 г.), на Международном семинаре по нелинейным и турбулентным процессам в физике (Киев, 1987 г.), на IV Международном симпозиуме по избранным проблемам статистической механики (Дубна, 1987г.)

Объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 124 наименований: она содержит 27 рисунков и 14 таблиц. Каждая глава снабжена аннотацией. Общий объем диссертации 108 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается значение вопросов, рассмотренных в диссертации, кратко излагается содержание работы и полученные результаты.

В главе I изучена динамика солитонов в некоторых физических системах, описываемых уравнением Кортевега-де Вриза (КдВ), нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) и векторным $U(2)$ НУШ, где процесс образования солитонов имеет пороговый характер.

В § I-2 исследован процесс образования солитонов при распаде "монокроматического" импульса в рамках уравнения КдВ:

$$U_t + 6UU_x + U_{xxx} = 0. \quad (1)$$

В первом параграфе, используя линейное представление уравнения КдВ, задачу сводим к нахождению дискретных уровней энергии в прямоугольном потенциале $U(x)$ "нулевой площади" для уравнения Шредингера:

$$-\Psi_{xx} + U(x)\Psi = E\Psi.$$

Получено следующее трансцендентное уравнение на собственные значения E :

$$|E| = (U - |E|) \cdot \left\{ \frac{f(E) \operatorname{ctg}[(U - |E|)^{1/2} \cdot a] + 1}{\operatorname{ctg}[(U - |E|)^{1/2} \cdot a] - f(E)} \right\}^2, \quad (2)$$

где a – ширина ямы, $f(E)$ – функция E .

Проведен численный анализ уравнения (2) и установлен порог образования дискретного уровня энергии.

В § 2 численным моделированием уравнения КдВ изучен распад импульсов "нулевой площади" на солитоны.

Для синусоидального импульса

$$U(x, 0) = \tilde{U}_0 \sin kx \quad (3)$$

трансцендентное уравнение (2) дает следующие условия:

- а) $\tilde{U}_0 \geq 0.392 k^2$ – рождение солитона (область I на рис. I);
- б) $\tilde{U}_0 < 0.159 k^2$ – отсутствие солитона (область III на рис. I).

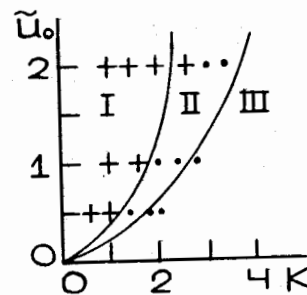


Рис. I.

Разрешенная (I) и запрещенная (II) области образования солитонов из начального импульса (3).

Приведенные на рис. I результаты численных экспериментов – крестики и точки соответственно означают образование и отсутствие солитонов.

Для гауссова импульса

$$U(x, 0) = \tilde{U}_0 x \cdot e^{-k^2 x^2} \quad (4)$$

соответственно имеем следующие условия:

- а) $\tilde{u}_0 \gg 2.8k^3$ - рождение солитона (область I на рис.2);
 б) $\tilde{u}_0 < 0.9k^3$ - отсутствие солитона (область III на рис.2).

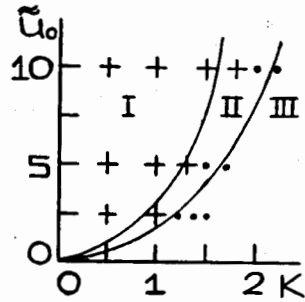


Рис.2.

Разрешенная (I) и запрещенная (III) области образования солитонов из начального импульса (4).

Крестиками и точками на рис.2 обозначены результаты численных экспериментов.

В § 3 исследована задача об образовании "темных" солитонов в рамках НУШ:

$$i u_t + u_{xx} - 2(|u|^2 - 1)u = 0. \quad (5)$$

Используя линейное представление НУШ, задачу сводим к дифракции модулированных монохроматических волн (солитонов) в нелинейной дефокусирующей среде. Получено следующее трансцендентное уравнение на собственные значения $\lambda(\lambda_0, d)$:

$$\cos 2\lambda d = \pm \frac{\lambda + f_1(\lambda, \lambda_0, d)}{\sqrt{1 + f_2(\lambda, \lambda_0, d)}} \quad (6)$$

где $\lambda_0 = \sqrt{1 - \lambda^2}$ - обратная ширина солитона, а функции $f_1(\lambda, \lambda_0, d)$ и $f_2(\lambda, \lambda_0, d)$ связаны с солитонной модуляцией плоской волны. При $\lambda_0 \rightarrow \pm 1$ или $\lambda_0 \rightarrow 0$, $f_1, f_2 \rightarrow 0$ и уравнение (6) переходит в уравнение для дифракции плоской волны. Проведен численный анализ характеристического уравнения (6) и изучены особенности дифракции солитона по сравнению с дифракцией плоской волны.

В § 4 численно исследована устойчивость солитонов векторного u(2) НУШ вида

$$\Psi^I = \begin{pmatrix} c_1 \exp(4i\lambda^2 t) \operatorname{sh} \lambda(x-x_0) \\ c_2 \exp(i\lambda^2 t) \end{pmatrix} \operatorname{sech}^2 \lambda(x-x_0), \quad (7)$$

$$|c_1|^2 = |c_2|^2 = 6\lambda^2.$$

Как показывают расчеты, двухсолитонные решения (7) u(2) НУШ

$$\begin{cases} i \psi_t^{(1)} + \psi_{xx}^{(1)} + (|\psi^{(1)}|^2 + |\psi^{(2)}|^2) \psi^{(1)} = 0 \\ i \psi_t^{(2)} + \psi_{xx}^{(2)} + (|\psi^{(1)}|^2 + |\psi^{(2)}|^2) \psi^{(2)} = 0 \end{cases}$$

при малых значениях параметра λ , определяющего амплитуду и ширину солитонов, являются долгоживущими объектами. При больших значениях λ ($\lambda > 0.5$) эти солитоны оказываются неустойчивыми, по крайней мере в рамках принятой разностной аппроксимации. Время распада растет с уменьшением их амплитуды (λ) и шага сетки. Последний факт указывает на структурную неустойчивость таких объектов.

Во II главе рассмотрены бозонные представления анизотропной модели Гейзенберга и изучена эволюция солитоноподобных возмущений ("пузырей") неидеального бозе-газа. В § I для изотропной многоподрешеточной ху цепочки с магнот-фононным взаимодействием в длинноволновом приближении получены нелинейные системы уравнений и описаны ее солитонные решения при различных граничных условиях. Получено представление модели Гейзенберга, описываемой в континуальном пределе классическим уравнением Ландау-Лифшица (УЛЛ)

$$i M_t = \frac{1}{2} [M, M_{xx}] + \frac{\beta}{4} [M, \sigma^{(3)}] \cdot [M, \sigma^{(3)}] \quad (8)$$

$$M = \begin{pmatrix} M^{(+)} & M^{(-)} \\ M^{(+)} & -M^{(+)} \end{pmatrix} \quad (x, t) \in SU(2)$$

$$M^{(\pm)} = M^{(x)} \pm i M^{(y)}, \quad M^2 = I$$

в терминах неидеального бозе-газа посредством сферической проекции вектора намагниченности \vec{M} на комплексную плоскость. Установлена связь между решениями НУШ, калибровочно-эквивалентного УЛЛ и модифицированного НУШ, связанного с УЛЛ посредством точного преобразования сферической проекции. В § 2 численно изучена эволюция статических ($v = 0$) солитоноподобных "пузырей":

$$\varphi_s(x) = \sqrt{r_0} \frac{\operatorname{ch}(\frac{c}{2} x)}{\{r_0/A + \operatorname{sh}^2(\frac{c}{2} x)\}^{1/2}} \quad (9)$$

где $c = 2\sqrt{r_0(r_0 - A)}$ - скорость звука в конденсате, $0 < A < r_0$, в рамках $\psi^3 - \psi^5$ НУШ:

$$i \varphi_t + \varphi_{xx} - r_0(2A + r_0)\varphi + 2(A + 2r_0)|\varphi|^2\varphi - 3|\varphi|^4\varphi = 0 \quad (10)$$

описывающего бозе-газ с двух- и трехчастичным взаимодействием бозонов. Установлено, что покоящийся "пузырь" (9) неустойчив, причем

одна из мод его распада приводит к разрушению основного состояния (конденсата) (рис.3 а-д). В § 3 численно исследуется устойчивость движущегося "пузыря":

$$\Psi(x, t) = \sqrt{2r_0} \frac{\text{ch}(\tilde{x}-1\mu)}{\{(2r_0-A)/\sqrt{A^2+v^2}+\text{ch}2\tilde{x}\}^{1/2}} \quad (II)$$

где $\tilde{x} = \frac{\sqrt{c^2-v^2}}{2} (x-vt-x_0)$, $\cos 2\mu = \frac{Ar_0+v^2/2}{r_0\sqrt{A^2+v^2}}$, $0 < \mu < \pi/2$,

при различных значениях параметра A и скорости "пузыря" v . Найдена область, в которой движущийся "пузырь" (II) представляет собой достаточно стабильный и долгоживущий объект. Область устойчивости движущегося пузыря (II) лежит выше кривой 1 на рис.4.

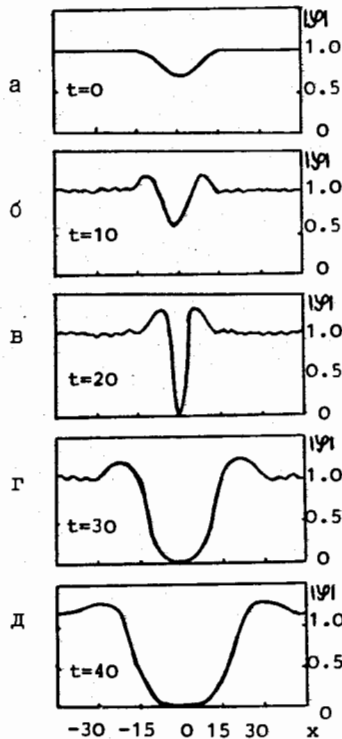


Рис.3. Эволюция начального условия в виде покоящегося солитона (9).

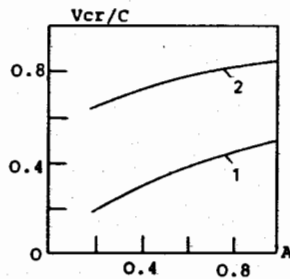


Рис.4.

- (1) - критическая скорость v_{1cr} солитона (II) как функция от A .
 (2) - то же для критической скорости v_{2cr} , разделяющей области неупругого и квазиупругого взаимодействия солитонов.

В главе III представлены результаты по динамике одно-, двух- и трехмерных "пузырей в бозе-конденсате". В § I с помощью численного моделирования изучены столкновения "пузырей" (II) и установлен пороговый характер их динамики соударения. Область квазиупругого столкновения "пузырей" (II) лежит выше кривой 2 на рис.4. В § 2 изучена эволюция двух- и трехмерных "пузырей" и установлена их неустойчивость.

В § 3 изучен характер неустойчивости одно-, двух- и трехмерных "пузырей" в зависимости от их начального возмущения. В одномерном случае при специальном выборе начального возмущения одна из мод неустойчивости статического "пузыря" (9) приводит к ее развалу на два разбегающихся устойчивых солитоноподобных "пузыря" (рис.5 а-в). При начальном возмущении двух- и трехмерных "пузырей" соответственно образуются затухающие цилиндрические и сферические волны, распространяющиеся по конденсату.

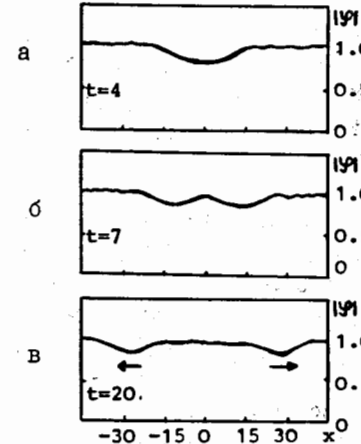


Рис.5.

Эволюция покоящегося солитона (9) при специальном выборе начального возмущения.

В заключении кратко перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

Основные результаты, полученные в диссертации:

1. Для оператора Шредингера исследован вопрос о существовании дискретных уровней энергии, соответствующих солитонам уравнения КдВ, в потенциале "нулевой площади" и установлен их пороговый характер образования.
2. В рамках уравнения КдВ изучен распад импульсов "нулевой площади" на солитоны. Предложена процедура аппроксимации импульсов нулевой площади и показано ее хорошее согласие с результатами численных экспериментов.
3. Рассмотрена дифракция солитона в нелинейной дефокусирующей среде и найдены пороги образования "темных" солитонов для НУШ.
4. Исследована устойчивость солитонов нового типа векторного $u(2)$ НУШ и установлена их структурная неустойчивость.
5. Рассмотрены бозонные представления модели анизотропного ферромагнетика Гейзенберга и изучена эволюция солитоноподобных "пузырей" идеального бозе-газа. В рамках $\psi^3-\psi^5$ НУШ установлена неустойчивость статических "пузырей" и найдена область устойчивости движущихся "пузырей".

6. Изучена динамика одно-, двух- и трехмерных "пузырей" в бозе-конденсате. Исследованы столкновения "пузырей" и установлен пороговый характер их динамики соударения. Установлена неустойчивость двух- и трехмерных "пузырей". Изучен характер неустойчивости одно-, двух- и трехмерных "пузырей" в зависимости от выбора начального возмущения.

Результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Маханьков В.Г., Пашаев О.К., Холмуродов Х.Т. Процесс образования солитонов при распаде монохроматической волны в рамках уравнения Кортевега-де Фриза. Численный эксперимент. - Сообщения ОИЯИ, P5-85-561, Дубна, 1985.
2. Маханьков В.Г., Пашаев О.К., Холмуродов Х.Т. Процесс образования солитонов при распаде монохроматической волны в рамках уравнения Кортевега-де Фриза. Теория. - Сообщения ОИЯИ, P5-85-562, Дубна, 1985.
3. Kholmurodov Kh.T., Makhankov V.G., Pashaev O.K. Threshold of kdv soliton production (Порог образования солитонов уравнения КдВ) - Preprint JINR, E5-87-784, Dubna, 1987.
4. Пашаев О.К., Хакимов Ф.Х., Холмуродов Х.Т. Дифракция солитона в нелинейной дефокусирующей среде. - Препринт ОИЯИ, P5-87-155, Дубна, 1987 г.
5. Маханьков В.Г., Холмуродов Х.Т. Численное моделирование устойчивости векторных $u(2)$ - солитонов. - В сб.: Краткие сообщения ОИЯИ, № 5-87, Дубна, 1987, с.25.
6. Абдуллоев Х.О., Хакимов Ф.Х., Холмуродов Х.Т. Некоторые точные соотношения между интегрируемыми моделями анизотропного ферромагнетика и неидеального бозе-газа. - Известия АН Тадж ССР, №1(103) 1987, стр. 27-33.
7. Барашенков И.В., Холмуродов Х.Т. Бозе-газ с парным и трехчастичным взаимодействием: эволюция нестабильных "пузырьков". - Сообщения ОИЯИ, P17-86-698, Дубна, 1986.
8. Kholmurodov Kh.T., Makhankov V.G. Condensate stability in the model of Bose - gas with two-and three-particle interactions (Устойчивость конденсата в рамках модели бозе-газа с двух- и трехчастичным взаимодействием) - Preprint JINR, E17-87-861, Dubna, 1987.
9. Барашенков И.В., Холмуродов Х.Т. Бозе-газ с двух и трехчастичным взаимодействием: эволюция солитоноподобных "пузырьков". - Тезисы IV Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики, Дубна, 1987, ОИЯИ, Д17-87-477, с.7.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 февраля 1988 года.