ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 519.615.5.

5-86-651

Ву Суан Минь

МЕТОДЫ И ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ БИЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1986

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований

Официальные оппоненты
доктор физико-математических наук, профессор — Е.А.Гребеников

Доктор физико-математических наук, профессор — Ю.А.Рябов

Доктор физико-математических наук, профессор — В.В.Дикусар

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Институт кибернетики АН УССР имени В.М.Глушкова.

Защита диссертации состоится "___" ___________ 1987 года на заседании Специализированного совета Д047.01.04 Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна, Московская область.

Автореферат разослан "____"_________ 1986 года.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук — Ивач — З.М.Иванченко

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

<u>Актуальность проблемы</u>. На современном этапе развития теории динамических систем существует большой разрыв между классической теорией динамических систем и исследованиями динамических систем, порождаемых системами обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений. Известно, что проблемы классической теории динамических систем, намеченные Пуанкаре и А.М.Ляпуновым, имеют целью исследование поведения решений дифференциальных и разностных уравнений на бесконечном интервале временной оси. В современных исследованиях топологические и метрические методы играют основную роль в классической теории динамических систем. Однако переход от результатов абстрактной теории к конкретным системам уравнений является весьма сложным даже в простых случаях, не говоря уже о численных методах или современных прикладных задачах.

Важность разработки численных методов исследования движений динамических систем обусловлена возрастающим значением численных экспериментов в современной математической физике и управлении сложными технологическими процессами, так как системы дифференциальных и разностных уравнений, описывающие реальные физические процессы, в общем случае являются нелинейными. Их движения, как правило, могут быть получены в основном численными методами за исключением весьма простых случаев. При численном исследовании динамических систем вычисление движений и их вариаций (первых) имеет первостепенное значение.

Среди динамических систем, порождаемых системами дифференциальных уравнений с нелинейной аналитической правой частью, автономная билинейная система имеет особое значение в исследовании эволюционных процессов. Она описывается системой уравнений

$$\dot{\varphi}(t) = Q\varphi(t) + B(\varphi(t),\varphi(t)), \quad \varphi(0) = \varphi^0, \tag{I}$$

где $\varphi \in R^q$, $Q \in R^{q\times q}$, $B(\varphi,\varphi)$ есть вектор-столбец q квадратичных форм

$$B_r(\varphi,\varphi) = \sum_{\substack{i\le j\\ i,j=1,\dots,q}} B_r^{ij}\varphi_i\varphi_j \qquad (B_r^{ij}\in R;\ r=1,\dots,q).$$

В более общем случае система с аналитической правой частью имеет вид

$$\dot{\varphi} = f(\varphi), \quad \varphi(0) = \varphi^0, \tag{2}$$

$$f_r(\varphi) = a_r^0 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{\alpha_1 = 1,\dots,q \\ \cdots\cdots \\ \alpha_k = 1,\dots,q}} a_r^{\alpha_1,\dots,\alpha_k} \varphi_{\alpha_1} \dots \varphi_{\alpha_k},$$

$a_r^0,\ a_r^{\alpha_1,\dots,\alpha_k} \in R;\ \ r = 1,\dots,q.$

При вычислении движений, особенно, когда они неустойчивы, необходима разработка алгоритмов, обладающих высокой степенью точности. Например, аттракторы Лоренца, являющиеся неустойчивыми ограниченными хаотическими движениями, могут быть получены только численным методом. Однако до сих пор достоверность результатов при их вычислении не была ясна.

Алгоритм вычисления вариаций $y(t)$ движений $\varphi(t)$ динамической системы, порождаемой системой дифференциальных уравнений с аналитической правой частью, определяется алгоритмом вычисления движений и описывается дискретной билинейной динамической системой

$$x(t+h) = Ax(t) + \sum_{i=1,\dots,p} u_i(t,\varphi^0) B_i x(t), \quad y(t) = Dx(t), \tag{3}$$

где $x(t) \in X = R^n$, $u(t,\varphi^0) \in U = R^p$, $y(t) \in Y = R^q$, $A, B_1, \dots, B_p \in R^{n\times n}$, $D \in R^{q\times n}$. Размерность n пространства X определяется степенью дискретизации задачи (I). Она может быть весьма большой в алгоритмах с высокой степенью точности, особенно при вычислении неустойчивых движений. Следовательно, необходимо построить структуру алгоритма (3) с минимальной размерностью пространства X при заданной степени точности аппроксимации. Такая задача возникает также в молодой области прикладной математики (математической теории систем), лежащей на стыке теории автоматов и теории управления. Общим свойством системы вычисления вариаций является отображение $\Phi: U^T \to Y^T$ ($T = \{0,1,2,\dots\}$), которое называется отображением вход - выход и ставит в соответствие каждой функции из U^T, определяемой движением $\varphi(0) = \varphi^0$, функцию вариации из Y^T. Для первой вариации это отображение реализуется системой (3). Для вариации более высоких порядков оно реализуется существенно нелинейной системой аналитических разностных уравнений.

Итак, разработка методов вычисления движений автономных билинейных динамических систем с высокой степенью точности и минималь-

ная реализация структур дискретных билинейных динамических систем являются актуальными задачами, которые имеют первостепенное значение в численном исследовании движений динамических систем, порождаемых системами обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений с аналитической правой частью. Данная диссертационная работа посвящена решению указанных проблем.

Работы /I-I6/, положенные в основу настоящей диссертации, выполнены в соответствии с проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ ЛВТА Объединенного института ядерных исследований.

Исследования, включенные в диссертацию, имеют следующие цели:

а) разработка методов численного исследования движений автономных билинейных динамических систем с любой степенью точности;

б) разработка методов эквивалентного преобразования структур дискретных билинейных динамических систем в минимальные структуры;

в) разработка методов вычисления размерностей минимальных структур дискретных билинейных динамических систем;

г) обобщение разработанных методов билинейных динамических систем для исследования более общих нелинейных динамических систем, порождаемых системами обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений с аналитической правой частью.

Научная новизна и значимость работы. В представленной работе впервые корректно сформулирована проблема минимальной реализации дискретных билинейных динамических систем в численном исследовании поведения движений динамических систем, порождаемых системами обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений с аналитической правой частью. На основе классов автономных билинейных динамических систем и дискретных билинейных динамических систем впервые установлена связь между проблемой вычисления в исследовании классических динамических систем и проблемой вычисления в исследовании современных динамических систем, являющихся преобразователями информаций типа вход-выход. Исходя из того, что правая часть является аналитической функцией, разработаны универсальные алгоритмы вычисления коэффициентов Тейлора решения задачи Коши /II-I3/. Эти алгоритмы позволяют построить разностные схемы любой степени точности, что весьма важно в вычислении неустойчивых движений /I5,I6/. На их основе разработаны дискретные билинейные динамические системы для вычисления вариаций движений автономных билинейных динамических систем. В работе создана теория минимальной реализации дискретных динамических систем /I-I0/. Она дает эффективные методы вычисления размерностей минимальных структур и преобразования дискретных билинейных динамических систем в минимальные системы /6-I0/. Разработанные методы численного исследования движений автономных билинейных динамических систем полностью распространяются на исследование любых нелинейных аналитических динамических систем /I2-I6/. Теория минимальной реализации структур дискретных билинейных динамических систем также обобщается для исследования минимальных структур произвольных нелинейных аналитических дискретных динамических систем /I,2/.

Практическая ценность. Разработанные алгоритмы вычисления движений автономных билинейных динамических систем и дискретные билинейные динамические системы составляют комплекс вычислительных систем для количественного и качественного исследования различных нелинейных эволюционных процессов в физике, технике и биологии, особенно в исследовании неустойчивых процессов /I5,I6/. Методы вычисления размерностей минимальных структур дискретных билинейных динамических систем также находят применение в задачах минимального математического моделирования сложных систем управления /9/.

Основные результаты диссертации, выдвигаемые для защиты:

I. Разработаны алгоритмы вычисления движений автономных билинейных динамических систем любой степени точности. Разработаны дискретные билинейные динамические системы для вычисления вариаций движений автономных билинейных динамических систем. Аналогичные алгоритмы разработаны для исследования динамических систем, порождаемых системами дифференциальных уравнений с аналитической правой частью.

2. Разработана теория минимальной реализации дискретных билинейных динамических систем. Она является первой единой теорией исследования их минимальных структур. Получены общие условия для преобразования любых дискретных билинейных динамических систем в минимальные (достижимые, наблюдаемые и вполне минимальные) системы. Они дают эффективные методы вычисления размерностей минимальных структур дискретных билинейных динамических систем. Аналогичные условия и методы получены также для дискретных неоднородных билинейных и линейных динамических систем. Теория минимальной реализации обобщена и для исследования минимальных структур произвольных нелинейных дискретных динамических систем с аналитической правой частью.

Апробация работы. Результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались на Международной конференции по численным методам и приложениям (София, 1984 г.); на Международной школе по приложениям математики в технике (Варна, 1984 г.); на Международной конференции по аналитическим вычислениям и их приложениям в теоретической физике (Дубна, 1985 г.); на Международной конференции по нелинейным эволюционным уравнениям и динамическим системам (Галлиполи, 1985 г.); на семинарах по теории автоматов мехмата МГУ (Москва), по сложным системам управления института кибернетики (Киев); на научно-исследовательском семинаре Лаборатории дифференциальных уравнений НИВЦ МГУ (Москва); на физико-

математическом семинаре Естественно-теоретического центра университета им.Карла Маркса (Лейпциг); на семинаре по вычислительной математике ЛВТА (ОИЯИ) и на общелабораторных семинарах ЛВТА в ОИЯИ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в печати в работах /I-I6/

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбившихся на I0 параграфов, и списка литературы, насчитывающего II0 наименований.

П. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дан краткий обзор классов билинейных динамических систем, обоснована актуальность задач, рассматриваемых в диссертационной работе, и охарактеризовано основное ее содержание.

В главе I "Вычисление движений автономных билинейных динамических систем" разработаны алгоритмы вычисления движений автономных билинейных динамических систем и их вариаций.

В § I.I приведены примеры автономных билинейных динамических систем и их связи с нелинейными эволюционными уравнениями.

В § I.2 разработаны алгоритмы вычисления движений автономных билинейных динамических систем и их вариаций на основе теоремы Коши для дифференциальных уравнений с аналитической правой частью.

Все алгоритмы построены на основании алгоритма разложения решения задачи Коши системы (I) в степенные ряды /II-I3/.

Теорема I.I. Для любой точки $\varphi \in R^q$ и момента $t \in R$ коэффициенты Тейлора ряда $\varphi(t+h) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(t) h^m$, представляющего единственное решение задачи Коши $\varphi(t) = \varphi$ системы (I), удовлетворяют следующему рекуррентному уравнению

$$C_{m+1}(t) = \frac{1}{m+1}\left(QC_m(t) + \beta(C_k(t), C_{m-k}(t)\right);$$

$$C_0(t) = \varphi(t) \tag{4}$$

$$\beta_r(C_k(t), C_{m-k}(t)) = \sum_{\substack{i,j=1,\dots,q \\ k=0,1,\dots,m}} B_r^{ij} C_k^i(t) C_{m-k}^j(t); \qquad r = 1,\dots,q.$$

Вычисление движения системы (I) состоит в построении ряда

$$\varphi(t+h) = \sum_{m=0}^{L} C_m(t) h^m + O_L(t), \qquad \varphi(0) = \varphi^0, \tag{5}$$

где коэффициенты $C_m(t)$ вычисляются по алгоритму (4), L - степень аппроксимирующего полинома, h - шаг интегрирования, выбираемый меньше радиуса сходимости, $O_L(t) = \sum_{L+1}^{\infty} C_m(t) h^m$ - остаток ряда движения.

Вычисление вариаций движений системы (I) основано на системе уравнений

$$
\begin{aligned}
&x(t) = A x(t) + \bar{B}(t,\varphi^o) x(t), \quad x(0) = x \\
&y(t) = D x(t), \quad D = (I_{q\times q}, 0),
\end{aligned} \tag{6}
$$

где $y(t)$ - вариация движения $\varphi(t)$ системы (I) с начальной точкой $\varphi(0)=\varphi^o$ при малом начальном возмущении $y(0)$, $x(t) \in R^n$ - вариация коэффициентов Тейлора, $n = q \times (L+1)$; матрицы системы (6) определяются следующим образом:

$$
(A)_{ij} = \frac{h^{j-1} Q^{i-1}}{(i-1)!}; \quad \bar{B}_{ij}(t) = h^{j-1} g_{i-1}(t); \quad i,j = 1,\dots,L+1;
$$

$$
g^{\gamma r}_{m+1}(t) = \frac{1}{m+1}\Big(\sum_{\alpha=1}^{q} Q_{r\alpha}\, g^{\gamma\alpha}_{m}(t) + \sum_{\substack{\gamma,\mu=1,\dots,q \\ s=0,1,\dots,m}} B^{\gamma\mu}_{r}\big(d^{\gamma\mu}_{s}(t) C^{\mu}_{m-s}(t) + d^{\gamma\mu}_{m-s}(t) C^{\gamma}_{s}(t)\big)\Big),
$$

$$
g_0(t) = 0;
$$

$$
d^{\gamma r}_{m+1}(t) = \frac{1}{m+1}\Big(\sum_{\alpha=1}^{q} Q_{r\alpha}\, d^{\gamma\alpha}_{m}(t) + \sum_{\substack{\gamma,\mu=1,\dots,q \\ s=0,1,\dots,m}} B^{\gamma\mu}_{r}\big(d^{\gamma\nu}_{s}(t) C^{\mu}_{m-s}(t) + d^{j\mu}_{m-s}(t) C^{\gamma}_{s}(t)\big)\Big),
$$

$$
d_0(t) = I;
$$

$$
\gamma, r = 1,\dots,q.
$$

Обобщение теоремы I.I для более общих динамических систем с аналитической правой частью дает алгоритм вычисления движений системы (2):

$$
\begin{aligned}
&\varphi(t+h) = \sum_{m=0}^{L} C_m(t) h^m + O_L(t), \quad \varphi(0) = \varphi^o, \\
&C^{r}_{m+1}(t) = \frac{1}{m+1} \sum_{K=1}^{N} \sum_{\substack{\alpha_1 = 1,\dots,q \\ \cdots\cdots \\ \alpha_K = 1,\dots,q \\ S_1+\dots+S_K = m}} a^{\alpha_1,\dots,\alpha_K}_{r}\, C^{\alpha_1}_{S_1}(t) \dots C^{\alpha_K}_{S_K}(t),
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
C_0(t) = \varphi(t); \quad C_1(t) = f(\varphi(t)); \quad r = 1,\dots,q; \quad m = 1,2,\dots \, .
$$

Вычисление вариации $y(t)$ ее движений $\varphi(t)$ состоит из системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&x(t+h) = G(t,\varphi^o) x(t), \quad x(0) = x, \\
&y(t) = D x(t), \quad D = (I_{q\times q}, 0),
\end{aligned} \tag{8}
$$

где

$$
G_{ij}(t) = h^{j-1} d_{i-1}(t),
$$

$$
d^{\gamma r}_{m+1}(t) = \frac{1}{m+1} \sum_{K=1}^{N} \sum_{\substack{\alpha_1 = 1,\dots,q \\ \cdots\cdots \\ \alpha_K = 1,\dots,q \\ S_1+\dots+S_K = m}} \sum_{\sigma=1}^{K} a^{\alpha_1,\dots,\alpha_K}_{r}\, d^{\gamma S_\sigma}_{S_\sigma}(t) \big(C^{\alpha_\sigma}_{S_\sigma}(t)\big)^{-1} C^{\alpha_1}_{S_1}(t) \dots C^{\alpha_K}_{S_K}(t),
$$

$$
d_0(t) = I; \quad \gamma, r = 1,\dots,q.
$$

Аналогичные алгоритмы также получены для вычисления движений и их вариаций динамической системы с аналитической правой частью в случае, когда последняя зависит от времени t.

В § I.3 даны оценки точности вычисления движений и выбор параметров алгоритмов, т.е. степени аппроксимирующего полинома L и шага интегрирования h в зависимости от желаемой степени точности вычисления /I5,I6/.

Теорема I.3. Пусть $\varphi(t)$ - движение системы (I) в момент t. Пусть, далее, M и α - положительные числа, такие, что $M > \alpha \geqslant |\varphi(t)|$. Положим

$$
a = \max_{r} \sum_{i=1}^{q} |Q_{ri}|, \quad b = \max_{r} \sum_{i,j=1}^{q} |B^{ij}_{r}|, \quad \rho(M) = \frac{1}{a} \ln \frac{M(a+b\alpha)}{\alpha(a+bM)}.
$$

Тогда для любого $h < \rho(M)$ ряд $\varphi(t+h) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(t) h^m$ сходится и является значением движения системы (I) в момент $t+h$. При этом коэффициенты и остаток ряда удовлетворяют неравенствам

$$
|C_m(t)| \leqslant \frac{M}{\rho^m(M)},
$$

$$
|O_L(t)| = \Big|\sum_{m=L+1}^{\infty} C_m(t) h^m\Big| \leqslant \frac{M\Delta^{L+1}}{1-\Delta},
$$

где $\Delta = \dfrac{h}{\rho(M)}$.

Теорема I.4. Пусть движение $\varphi(t)$ системы (I) ограничено на интервале $t=0\div\tau$, $\varepsilon>0$ - произвольное заданное малое положительное число и $\alpha\geqslant|\varphi(t)|+\varepsilon$ на интервале. Пусть, далее, $\varphi^*(t)$ - ее соответствующее движение, вычисляемое по алгоритму (5). Положим

$$a_1=\max_{r,\nu}|Q_{r\nu}|,$$

$$b_1=\max_{r,\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu-1}|B_r^{i\nu}|+2|B_r^{\nu\nu}|+\sum_{j=\nu+1}^{q}|B_r^{\nu j}|\right\},$$

$$P(h)=\exp\left((a_1+b_1\alpha)qh\right).$$

Тогда, если шаг интегрирования h и степень аппроксимирующего полинома L удовлетворяют неравенствам

$$h<\rho(M)=\frac{1}{a}\ln\frac{M(a+b\alpha)}{\alpha(a+bM)},$$

$$\Delta^{L+1}\leqslant\frac{(1-\Delta)\varepsilon}{M\sum\limits_{K=0}^{N-1}P^K(h)},$$

где $M>\alpha$, $Nh\leqslant\tau$, $\Delta=\dfrac{h}{\rho(M)}$, то

$|\varphi(t)-\varphi^*(t)|\leqslant\varepsilon$ для всех $t=0,h,\ldots,Nh$.

Теорема I.5. Пусть величины L и h в алгоритме (5) зафиксированы и M -достаточно большое положительное число. Тогда на каждом шаге интегрирования K справедлива оценка

$$|\varphi((K+1)h)-\varphi^*((K+1)h)|\leqslant\delta(K+1)=\delta(K)P_K+\frac{M\Delta_K^{L+1}}{1-\Delta_K},\quad\delta(0)=0,$$

пока $\delta(K)$ достаточно мало ($\delta(K)<\varepsilon$) и

$$h<\rho_K(M)=\frac{1}{a}\ln\frac{M(a+b\alpha_K)}{\alpha_K(a+bM)},$$

где $\Delta_K=\dfrac{h}{\rho_K(M)}$, $\alpha_K=|\varphi^*(Kh)|+\delta(K)$, $P_K=\exp((a_1+b_1\vartheta_K)qh)$,

$$\vartheta_K=\max_{s\leqslant h}|\varphi^*(Kh+s)|+\delta(K).$$

Аналогичные оценки получены для общих аналитических динамических систем.

Теорема I.6. Пусть движение $\varphi(t)$ системы (2) ограничено на интервале $t=0\div\tau$, $\varepsilon>0$ - произвольное малое положительное число и $\alpha\geqslant|\varphi(t)|+\varepsilon$ на интервале. Пусть, далее, $\varphi^*(t)$ - ее соответствующее движение, вычисляемое по алгоритму (7) . Положим

$$a_0=\max_r|a_r^0|,\quad a_K=\max_r\sum_{\substack{\alpha_1=1,\ldots,q\\ \cdots\cdots\\ \alpha_K=1,\ldots,q}}|a_r^{\alpha_1,\ldots,\alpha_K}|,\quad K=1,\ldots,N,$$

$$P(h)=\exp\left(qh\sum_{K=1}^{N}Ka_K\alpha^{K-1}\right).$$

Тогда, если шаг интегрирования h и степень аппроксимирующего полинома L удовлетворяют неравенствам

$$h<\rho(M)=\int_{\alpha}^{M}\frac{d\vartheta}{\sum\limits_{K=0}^{N}a_K\vartheta^K},$$

$$\Delta^{L+1}\leqslant\frac{(1-\Delta)\varepsilon}{M\sum\limits_{K=0}^{N-1}P^K(h)},$$

где $M>\alpha$, $Nh\leqslant\tau$, $\Delta=\dfrac{h}{\rho(M)}$, то

$|\varphi(t)-\varphi^*(t)|\leqslant\varepsilon$ для всех $t=0,h,\ldots,Nh$.

Сравнение результатов вычисления аттракторов Лоренца с помощью разработанных алгоритмов с результатами, вычисленными с помощью методов обычной аппроксимации, показало, что погрешность последних быстро растет при расширении интервала вычисления τ . В то же время разработанные алгоритмы дают результаты с любой степенью точности на любом интервале времени с соответствующим выбором степени L и шага h . При этом степень L растет с увеличением интервала τ .

В главе П "Минимальная реализация дискретных билинейных динамических систем" разработаны методы эквивалентного преобразования структур дискретных билинейных динамических систем в минимальные структуры и вычисления их размерностей.

Система вычисления вариаций (6) (а также (8)) представляется в канонической форме

$$x(t+1) = Ax(t) + \sum_{i=1,\dots,p} u_i(t,\varphi^0)B_i x(t) \quad , \; x(0)=x$$
$$y(t) = Dx(t), \tag{9}$$

где $t\in T=\{0,1,2,\dots\}$, $x(t)\in X=R^n$, $y(t)\in Y=R^q$, $u(t,\varphi^0)\in U=R^q$, $A, B_1,\dots,B_p\in R^{n\times n}$, $D\in R^{q\times n}$. Обозначим через $\Phi: U^T \longrightarrow Y^T$ - отображение, сопоставляющее каждой последовательности $\{u(0,\varphi^0), u(1,\varphi^0), \dots, u(t,\varphi^0)\}$, соответствующей движению $\varphi(0)=\varphi^0$, последовательность вариации $\{y(0), y(1), \dots, y(t)\}$, вычисляемую по системе (9). Оно называется отображением вход - выход.

Рассмотрим другую дискретную билинейную динамическую систему

$$x^*(t+1) = A^*x^*(t) + \sum_{i=1,\dots,p} u_i(t,\varphi^0) B_i^* x^*(t) ,$$
$$y(t) = D^*x^*(t) , \quad x^*(t)\in X^* = R^{n^*}. \tag{10}$$

Назовем любое линейное отображение $f: X \to X^*$ эквивалентным преобразованием системы (9) в систему (10), если оно удовлетворяет условиям $fA = A^*f$, $fB_i = B_i^* f$ $(i=1,\dots,p)$ и существует $x\in X$ такое, что отображение вход - выход, вычисляемое по системе (10) с начальным значением $x^*(0)=f(x)$, совпадает с Φ.

Дискретная билинейная динамическая система называется вполне минимальной, если любое ее эквивалентное преобразование является взаимно-однозначным.

В § 2.1 изложены проблемы исследования эквивалентных преобразований дискретных билинейных динамических систем в минимальные системы и вычисления их размерностей, а также обоснована алгебраическая природа дискретных билинейных динамических систем.

В § 2.2 сформулированы понятия дискретных билинейных динамических систем, их эквивалентных преобразований, и связанные с ними понятия на "бескоординатном алгебраическом" языке. Затем исследуются свойства эквивалентных преобразований и условия, при которых линейное преобразование становится эквивалентным преобразованием /3,4,9/.

Рассмотрим систему восьми объектов

$$S = \langle T, R, X, U, Y, \Phi, \alpha, \beta\rangle , \tag{11}$$

где первые шесть элементов такие же, как в (9), $\alpha\in \mathrm{End}\,X$,

$\beta: U \to \mathrm{End}\,X$ - линейное преобразование. (Здесь $\mathrm{End}\,X$ - линейное векторное пространство всех линейных операторов пространства X).

Для каждой пары (x,η), где $x\in X$ и $\eta: X\to Y$ - линейное преобразование, отображение вход - выход $S_{x\eta}: U^T \longrightarrow Y^T$ системы (11) определяется по следующему алгоритму:

$$S_{x\eta}(v)(t) = \eta(\lambda(x, v|[0,t))),$$
$$\lambda(x, v|[0,0)) = x ,$$
$$\lambda(x, v|[0,t+1)) = (\alpha+\beta(v(t))\lambda(x,v|[0,t))$$

для любого $v\in U^T$ и $t\in T$ (здесь $v|[0,t)$ - ограничение функции v на интервале $[0,t)$). Если $S_{x\eta}=\Phi$, то (x,η) называется реализующей парой, а η - допустимым выходным отображением.

Система (11) называется дискретной билинейной динамической системой, если для нее существует реализующая пара.

Теорема 2.2. Пусть $S=\langle T,R,X,U,Y,\Phi,\alpha,\beta\rangle$ и $S'=\langle T,R,X',U,Y,\Phi,\alpha',\beta'\rangle$ - две дискретные билинейные динамические системы и $f: X\to X'$ - линейное преобразование, удовлетворяющее условиям $f(\alpha x) = \alpha' f(x)$ и $f(\beta(u)x) = \beta'(u) f(x)$ для всех $x\in X$ и $u\in U$. Тогда f является эквивалентным преобразованием тогда и только тогда, когда существуют допустимые выходные отображения η и η' систем S и S', соответственно, такие, что $\eta=\eta' f$.

В § 2.3 строятся специальные дискретные билинейные динамические системы и эквивалентные преобразования, которые преобразуют заданную дискретную билинейную динамическую систему в вполне минимальную, и доказана единственность размерности вполне минимальных систем /3,4,7-10/.

Для заданной системы S определена система $\tilde S = \langle T, R, \tilde X, U, Y, \Phi, \tilde\alpha, \tilde\beta\rangle$, где $\tilde X \equiv R\langle Z\rangle$ есть R-алгебра (векторное пространство) формальных полиномов $s=\sum_{\theta\in Z^*}(s,\theta)\theta$ $((s,\theta)\in R)$ с коэффициентами из R и ассоциативными переменными из алфавита $Z=\{z_0, z_1, \dots, z_p\}$, Z^* - совокупность всех конечных последовательностей из Z, $\tilde\alpha: s\mapsto z_0 s$, $\tilde\beta(u): s\mapsto \sum_{i=1,\dots,p} u_i z_i s$.

Пространством достижимости состояния $x\in X$ системы (11) называется линейная оболочка множества всех состояний, достижимых из x. Система (11) называется достижимой из x, если пространство достижимости x совпадает с X.

Теорема 2.5. Пусть задана дискретная билинейная динамическая система $S=\langle T,R,X,U,Y,\Phi,\alpha,\beta\rangle$. Тогда пространство достижимости любого состояния $x\in X$ совпадает с образом отображения $\psi_x: \tilde X\to X: s\mapsto \sum_{\theta\in Z^*}(s,\theta)h(\theta)x$, где $h: Z^*\longrightarrow R^{n\times n}$ - отображение, полученное заменой пустой последовательности на единичную матрицу,

z_0 на A, и z_i $(i=1,\dots,p)$ на B_i. Следовательно, система S достижима из x тогда и только тогда, когда Ψ_x является эквивалентным преобразованием системы $\tilde{S}$ на систему S.

Система S называется наблюдаемой с выходным отображением η, если из $x \neq x'$ следует $S_{x\eta} \neq S_{x'\eta}$.

Пусть D – матрица отображения η и $[|x|]$ – бесконечный вектор-столбец, строки которого индексируются элементами из Z^*, а значение каждого элемента $\theta \in Z^*$ равно $Dh(\theta)x$.

Теорема 2.6. Пусть $S=\langle T,R,X,U,Y,\Phi,\alpha,\beta\rangle$ – заданная дискретная билинейная динамическая система и η – ее выходное отображение. Тогда восьмерка $S^*=\langle T,R,X^*,U,Y,\Phi,\alpha^*,\beta^*\rangle$ (где $X^*=\{[|x|]:x\in X\}$, $[|x|]+[|x'|]=[|x+x'|]$, $r[|x|]=[|rx|]$, $\alpha^*[|x|]=[|\alpha x|]$ и $\beta^*(u)[|x|]=[|\beta(u)x|]$) для всех $x,x'\in X$, $r\in R$ и $u\in U$ является наблюдаемой системой с выходным отображением $\eta^*: X^*\longrightarrow Y$: $[|x|]\longmapsto \eta(x)$ и отображение $S_\eta: X \to X^*: x\mapsto [|x|]$ является эквивалентным преобразованием системы S на систему S^*. Следовательно, система S наблюдаема тогда и только тогда, когда S_η является изоморфным.

Теорема 2.7. Дискретная билинейная динамическая система $S=\langle T,R,X,U,Y,\Phi,\alpha,\beta\rangle$ вполне минимальна тогда и только тогда, когда для любой реализующей пары (x,η) она достижима и наблюдаема.

Теорема 2.8. Любые две вполне минимальные дискретные билинейные динамические системы имеют одинаковую размерность.

В § 2.4 разработаны методы вычисления размерностей минимальных дискретных билинейных динамических систем /7,9/.

Пусть $[\Psi_x]$ – матрица, столбцы которой индексируются элементами из Z^*, а значение каждого столбца $\theta\in Z^*$ равно $h(\theta)x$, т.е.

$$[\Psi_x]=[x,Ax,B_1x,\dots,B_px,A^2x,AB_1x,\dots,AB_px,B_1Ax,B_1^2x,B_1B_2x,\dots].$$

Обозначим через $|\theta|$ число букв из Z, входящих в θ. Пусть, далее $[\Psi_x]_m$ – матрица, полученная из матрицы $[\Psi_x]$ отбрасыванием всех элементов $\theta\in Z^*$, таких, что $|\theta|>m$.

Теорема 2.9. Размерность пространства достижимости любого состояния $x\in X$ дискретной билинейной динамической системы (9) равна рангу матрицы $[\Psi_x]_{n-1}$. Следовательно, она достижима из x тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}[\Psi_x]_{n-1}=n$. При этом, если для некоторого числа m $\operatorname{rank}[\Psi_x]_m=\operatorname{rank}[\Psi_x]_{m+1}$, то $\operatorname{rank}[\Psi_x]_m=\operatorname{rank}[\Psi_x]_{m+\ell}$ для всех $\ell\geq 1$.

Пусть $[F]$ – матрица, строки которой индексируются элементами из Z^*, а значение каждой строки $\theta\in Z^*$ равно $Dh(\theta)$, т.е.

$$[F]^\tau=[D^\tau,(DA)^\tau,(DB_1)^\tau,\dots,(DB_p)^\tau,(DA^2)^\tau,(DAB_1)^\tau,\dots,(DAB_p)^\tau,(DB_1^2)^\tau,\dots].$$

Здесь τ соответствует операции транспонирования. Пусть, далее, $[F]_m$ – матрица, полученная из $[F]$ отбрасыванием всех строк, длина индекса каждой из которых больше m.

Теорема 2.10. Размерность наблюдаемой дискретной билинейной динамической системы S^*, эквивалентной системе (9), равна рангу матрицы $[F]_{n-1}$. Следовательно, дискретная билинейная динамическая система (9) наблюдаема тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}[F]_{n-1}=n$. При этом, если для некоторого m $\operatorname{rank}[F]=\operatorname{rank}[F]_{m+1}$, то $\operatorname{rank}[F]_m=\operatorname{rank}[F]_{m+\ell}$ для всех $\ell\geq 1^m$.

Теорема 2.11. Размерность вполне минимальной дискретной билинейной динамической системы, эквивалентной системе (9), равна рангу произведения матриц $[F]_{n-1}[\Psi_x]_{n-1}$. Следовательно, дискретная билинейная динамическая система (9) вполне минимальна тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}[F]_{n-1}[\Psi_x]_{n-1}=n$.

Глава III "Минимальная реализация дискретных неоднородных билинейных, линейных и нелинейных динамических систем" посвящена применению методов, изложенных в главе II, для решения задач минимальной реализации дискретных неоднородных билинейных и линейных динамических систем и их обобщению для общих дискретных нелинейных динамических систем с аналитической правой частью.

В § 3.1 разработаны методы вычисления размерностей минимальных дискретных неоднородных билинейных динамических систем /5,6,9,10/.

Дискретная неоднородная билинейная динамическая система отличается от системы (9) дополнительным членом $Cu(t,\varphi^o)$, где $C\in R^{n\times p}$ для учета возмущений на каждом шаге вычисления вариации, т.е.

$$x(t+1)=Ax(t)+\sum_{i=1,\dots,p}u_i(t,\varphi^o)B_ix(t)+Cu(t,\varphi^o),\quad x(0)=x, \qquad (12)$$
$$y(t)=Dx(t).$$

Преобразуем ее в систему

$$\bar{x}(t+1)=\bar{A}\bar{x}(t)+\sum_{i=1,\dots,p}u_i(t,\varphi^o)\bar{B}_i\bar{x}(t)$$
$$y(t)=\bar{D}x(t) \qquad (13)$$

где $\bar{A}=\begin{pmatrix}A&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\bar{B}_i=\begin{pmatrix}B_i&c_i\\0&0\end{pmatrix}$, c_i – столбцы матрицы C, $\bar{D}=(D,0)$.

Теорема 3.1. Дискретная неоднородная билинейная динамическая система (12) достижима из x тогда и только тогда, когда для системы (13) выполняется одно из следующих условий:

(а) $\mathrm{rank}[\bar\Psi_{\bar x}]_n = n+1$, где $\bar x = \binom{x}{1}$;

(б) $\mathrm{rank}[\bar\Psi_{\bar x}]_n = n$ и для n некоторых линейно независимых векторов $\bar x^1 = \binom{x^1}{1}, \dots, \bar x^n = \binom{x^n}{1}$, достижимых из x; векторы $x^1, \dots, x^n$ линейно независимы.

Предполагается, что система (I2) не имеет состояния $x \in X$ такого, что $Ax = x$, $(B_1 x, B_2 x, \dots, B_p x) + C = 0$ и $Dx = 0$.

Теорема 3.2. Система (I2) наблюдаема в том и только в том случае, когда для системы (I3) $\mathrm{rank}[\bar F]_n = n+1$.

Теорема 3.3. Система (I2) вполне минимальна тогда и только тогда, когда для системы (I3) выполняется одно из следующих условий:

(а) $\mathrm{rank}[\bar F]_n [\bar\Psi_{\bar x}]_n = n+1$, $\bar x = \binom{x}{1}$;

(б) $\mathrm{rank}[\bar F]_n [\bar\Psi_{\bar x}]_n = n$, $\mathrm{rank}[\bar F]_n = n+1$ и для n некоторых линейно независимых векторов $\bar x^1 = \binom{x^1}{1}, \dots, \bar x^n = \binom{x^n}{1}$, достижимых из $\bar x$; векторы $x^1, \dots, x^n$ линейно независимы.

В § 3.2 разработаны методы вычисления размерностей минимальных дискретных линейных динамических систем /5,9,I0/.

Дискретная линейная динамическая система описывается системой уравнений

$$x(t+1) = Ax(t) + Cu(t,\varphi^0), \quad x(0) = x, \qquad (I4)$$
$$y(t) = Dx(t),$$

т.е. она получается из (I2), когда $B_1 = B_2 = \dots = B_p = 0$. Приравняв нулю матрицы $B_1, \dots, B_p$ в теоремах 3.I-3.3 получим существенное упрощение при вычислении размерностей минимальных систем. В частности:

Теорема 3.4. Дискретная линейная динамическая система (I4) достижима из x тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{rank}(c', Ac', A^2c', \dots, A^n c') = n \quad , \qquad \text{где} \quad c' = (x, c) \,.$$

§ 3.3. является попыткой разработки общей теории минимальной реализации дискретных динамических систем /I,2/ , реализующих произвольный процесс вычисления вариации $\Phi \subseteq U^T \times Y^T$ путем обобщения бескоординатных дискретных билинейных динамических систем, изложенных в главе II. Получены условия их минимальной реализации на алгебраическом языке.

<u>Результаты диссертации опубликованы в работах:</u>

I. Ву Суан Минь. Обобщенная алгебраическая структура дискретных динамических систем. ОИЯИ, 5-8I-266, Дубна, 198I.
2. Ву Суан Минь. Минимальная алгебраическая реализация дискретных динамических процессов. ОИЯИ, 5-8I-267, Дубна, 198I.

3. Ву Суан Минь. Эквивалентные преобразования и достижимость билинейных дискретных динамических систем. ОИЯИ, Р5-82-643, Дубна, I982.
4. Ву Суан Минь. Наблюдаемость и минимальная реализация билинейных дискретных динамических систем. ОИЯИ, Р5-82-657, Дубна, I982.
5. Ву Суан Минь. Достижимость, наблюдаемость и минимальная реализация неоднородных билинейных и линейных дискретных динамических систем. ОИЯИ, Р5-82-658, Дубна, I982.
6. Ву Суан Минь. Билинейная модель линейных дискретных динамических систем с переменными параметрами. ОИЯИ, Р5-82-648, Дубна, I982.
7. Ву Суан Минь. Условия минимальной реализации билинейных дискретных динамических систем. ДАН СССР, I984, т.276, № 3, 525-527.
8. Ву Суан Минь. Метод универсальной алгебры в вычислении минимальной размерности системы линейных разностных уравнений. Доклад на Международной конференции по численным методам и приложениям, БАН, София, I984 . Тезисы докладов, с.92.
9. Ву Суан Минь. Минимальная алгебраическая реализация билинейных дискретных динамических систем. Автоматика и телемеханика, I985, № 4, с.23-30.
10. Vu Xuan Minh. Methods of Universal Algebra for Caloulation of Minimal Dimension for Systems of Linear Finite Differenoe Equations. In "Numerioal Methods and Applioations". Proc.of the Inter. Conf. on Num.Math. and Appl.,Acad.Sci.of Bulgaria, Sofia,1985, pp.427–433.
11. Vu Xuan Minh. On Stability of Motions of Bilinear Dynamical Systems. JINR, E5–85–398, Dubna, 1985.
12. Vu Xuan Minh. On Expansion of Solutions of Ordinary Differential Equations into Power Series. E5–85–456, Dubna, 1985.
I3. Ву Суан Минь. Алгоритмы разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений и производных динамических потоков в степенные ряды. Труды Международной конференции по аналитическим вычислениям и их приложениям в теоретической физике. ОИЯИ,ДII-85-79I, Дубна, I985, с.2I4-2I8.
I4. Ву Суан Минь, Е.П.Жидков, В.Г.Кадышевский. О решениях релятивистских квазипотенциальных радиальных уравнений. ТМФ, I985, т.63, № 2, с.254-269.

15. Ву Суан Минь. Оценка точности вычисления движений автономных билинейных динамических систем с помощью метода разложения в степенной ряд. ОИЯИ, Р5-86-420, Дубна, 1986.
16. Vu Xuan Minh. On Accuracy of Computation of the Lorenz Attractors of Systems of Ordinary Differential Equations. JINR, E5-86-132, Dubna, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 октября 1986 года.