сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-85-548

З.М.Косарева

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

1985

ВВЕДЕНИЕ

Задаче на собственные значения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка вида

$$(1-x^2)y''-xy'+(\lambda+f(x))\cdot y=0 \qquad (I)$$

где

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i\cdot T_i(x) \qquad (2)$$

- возмущающая функция (потенциал), разлагающаяся в ряд Фурье по полиномам Чебышева, посвящены работы /I,2/.

Решение задачи (I) находилось в виде функции

$$y(x)=\sum_{j=0}^{\infty} y_j\cdot T_j(x) \qquad (3)$$

и было получено как в численном виде /I/, так и в аналитическом /I,2/, с помощью систем аналитических вычислений SCHOONSCHIP и REDUCE-2, и выражено как функция от известных коэффициентов f_i.

Для отыскания собственных значений λ_ℓ и коэффициентов y_i решения $y(x)$ был применен метод итераций /I/. Сходимость итераций наблюдалась при численных расчетах, однако не была доказана.

В настоящей работе, которая является продолжением /I/, показано, что при наложении некоторых ограничений на коэффициенты f_i разложения потенциала $f(x)$ в ряд Фурье итерации сходятся и дают решение, удовлетворяющее определенным краевым условиям.

I. Уточненная постановка задачи

Кратко напомним постановку задачи (I), сформулированную в работе /I/: на интервале $[-I,I]$ решается уравнение (I), где $f(x)$ - возмущающая функция, разлагающаяся в ряд Фурье по полиномам Чебышева (см.(2)). Относительно коэффициентов f_i предполагается, что они достаточно малы и быстро убывают с ростом номера i.

Решение уравнения (I) ищется как функция, разлагающаяся в ряд Фурье по полиномам Чебышева (см.(3)), причем ищется такое решение, что при $f(x)\to 0$ будет выполняться

$$\begin{aligned} y=y_n(x)&\to T_n(x), \\ \lambda=\lambda_n&\to n^2. \end{aligned} \qquad (4)$$

Поскольку в уравнении (I) коэффициент при y'' в граничных точках $x=\pm 1$ обращается в нуль, т.е. уравнение (I) имеет особенность/3/, то от искомого решения, кроме выполнения (4), следует потребовать определенного поведения в граничных точках, а именно, чтобы решение $y(x)$ было регулярно на концах интервала $[-I,I]$.

Теперь покажем, что выбранный для решения задачи (I) метод итераций сходится и приводит к решению, регулярному в граничных точках. Используем для этого подход, предложенный в/4/.

2. Обоснование сходимости итераций

Для определения собственного значения λ_ℓ задачи (I) и коэффициентов y_j соответствующего ему решения $y_\ell(x)$ в работе/I/ были получены следующие итерационные формулы:

$$\lambda_\ell^{(k)}=\ell^2-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} y_i^{(k-1)}(f_{|\ell-i|}+f_{\ell+i}) \;; \tag{5}$$

$$y_j^{(k)}=\frac{1}{2(j^2-\lambda_\ell^{(k)})}\sum_{i=0}^{\infty} y_i^{(k-1)}(f_{|j-i|}+f_{j+i}) \;, \tag{6}$$

где $j=0,1,\ldots,\ell-1,\ell+1,\ldots$; k – номер приближения; ℓ – номер отыскиваемого собственного значения.

Покажем сначала, что коэффициенты y_i ограничены и по абсолютной величине не превосходят I, а затем, используя это обстоятельство, докажем сходимость итераций (5) и (6).

2.I. Ограниченность итераций

Допустим,что $|y_j^{(n)}|\leq 1$ для $n=0,1,2,\ldots,k$. Докажем, что при некоторых ограничениях, наложенных на коэффициенты f_i, будет ограничено и $(k+1)$ -е приближение, т.е. $|y_j^{(k+1)}|\leq 1$.

Пусть $S_f=\sum_{i=0}^{\infty}|f_i|$ – известная сумма модулей коэффициентов f_i.

Введем обозначения:

$$S_j=\sum_{i=0}^{\infty} y_i^{(k-1)}\cdot(f_{|j-i|}+f_{j+i}) \;,$$

$$S_\ell=\sum_{i=0}^{\infty} y_i^{(k-1)}\cdot(f_{|\ell-i|}+f_{\ell+i}) \;.$$

Нетрудно убедиться, что для S_j и S_ℓ будут справедливы следующие оценки:

$$|S_j|\leq 2S_f+\max_i|f_i| \,,\qquad |S_\ell|\leq 2S_f+\max_i|f_i| \,. \tag{7}$$

Из формулы (6) имеем

$$|y_j^{(k+1)}|=\left|\frac{1}{\lambda_\ell^{(k+1)}-j^2}\cdot\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}y_i^{(k)}\cdot(f_{|j-i|}+f_{j+i})\right\}\right| \,.$$

Используя соотношение (7), получим

$$|y_j^{(k+1)}|\leq\frac{\frac{1}{2}\cdot(2S_f+\max_i|f_i|)}{|\lambda_\ell^{(k+1)}-j^2|} \,. \tag{8}$$

Оценим знаменатель в (8). Нетрудно показать, что имеет место неравенство

$$|\lambda_\ell^{(k+1)}-j^2|\geq|\ell^2-j^2|-|\lambda_\ell^{(k+1)}-\ell^2| \,.$$

Из (5), используя (7), имеем

$$|\lambda_\ell^{(k+1)}-\ell^2|\leq\frac{1}{2}(2S_f+\max_i|f_i|) \,.$$

Введем функцию $\alpha(\ell)=\min_{j\neq\ell}|\ell^2-j^2|$, где ℓ – номер собственного значения.

Тогда $|\lambda_\ell^{(k+1)}-j^2|\geq\alpha(\ell)-\frac{1}{2}(2S_f+\max_i|f_i|)$.

Отсюда

$$|y_j^{(k+1)}|\leq\frac{\frac{1}{2}(2S_f+\max_i|f_i|)}{\alpha(\ell)-\frac{1}{2}(2S_f+\max_i|f_i|)} \,. \tag{9}$$

Из оценки (9) видно, что,если коэффициенты f_i будут удовлетворять неравенству

$$S_f<\frac{\alpha(\ell)}{2}-\frac{1}{2}\max_i|f_i| \,, \tag{I0}$$

то будет справедливо и $|y_j^{(k+1)}|\leq 1$.

2.2. Сходимость итераций

Обозначим

$$\delta_\ell^{(k+1)}=\lambda_\ell^{(k+1)}-\lambda_\ell^{(k)} \;;\qquad \varepsilon_j^{(k+1)}=y_j^{(k+1)}-y_j^{(k)} \,. \tag{II}$$

Вычитая формулы (5) для $(k+1)$-й и k-й итераций, получим

$$\delta_\ell^{(k+1)}=-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon_i^{(k)}(f_{|\ell-i|}+f_{\ell+i}) \,.$$

Для $|\delta_\ell^{(k+1)}|$ получаем оценку

$$|\delta_\ell^{(k+1)}|\leq\frac{1}{2}\max_j|\varepsilon_j^{(k)}|\cdot(2S_f+\max_i|f_i|) \,. \tag{I2}$$

Аналогично, вычитая (6) для $(k+1)$-й и k-й итераций, получим

$$\varepsilon_j^{(k+1)}=-\left\{\frac{y_j^{(k)}\cdot\delta_\ell^{(k+1)}}{\lambda_\ell^{(k+1)}-j^2}+\frac{\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon_i^{(k)}\cdot(f_{|j-i|}+f_{j+i})}{\lambda_\ell^{(k+1)}-j^2}\right\} \,.$$

Отсюда

$$\left|\varepsilon_j^{(k+1)}\right| \le \frac{\left|\delta_\ell^{(k+1)}\right| + \frac{1}{2}\max_j\left|\varepsilon_j^{(k)}\right| (2S_f + \max_i |f_i|)}{\left|\lambda_\ell^{(k+1)} - j^2\right|} \le$$

$$\le \frac{\max_j\left|\varepsilon_j^{(k)}\right| (2S_f + \max_i |f_i|)}{\alpha(\ell) - \frac{1}{2}(2S_f + \max_i |f_i|)} . \qquad (13)$$

Если потребовать, чтобы S_f удовлетворяла неравенству

$$S_f < \frac{\alpha(\ell)}{3} - \frac{1}{2}\max_i |f_i| , \qquad (14)$$

то получим $\left|\varepsilon_j^{(k+1)}\right| \le \max_j\left|\varepsilon_j^{(k)}\right|\cdot\theta$,

где $0 \le \theta < 1$. Итак, если коэффициенты f_i удовлетворяют условию (14), то итерации (5) и (6) сходятся со скоростью геометрической прогрессии.

3. Ограниченность решения на концах интервала

Оценим решение $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j T_j(x)$ на концах интервала $[-1,1]$.

В работе/1/ было показано, что при малых и быстро убывающих коэффициентах f_i разложения потенциала $f(x)$ в ряд Фурье по полиномам Чебышева коэффициенты y_j тоже малы и быстро убывают.

Опираясь на ограниченность итераций $y_j^{(k+1)}$, показанную в п.2.1, и известные признаки сходимости рядов, можно утверждать, что $|y(\pm 1)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |y_j| < C$, где C – конечная величина.

Следовательно, решение $y(x)$ действительно регулярно в граничных точках $x=\pm 1$.

Литература

1. Косарева З.М. ОИЯИ, Р-82-703, Дубна, 1982.
2. Косарева З.М. ОИЯИ, Р-83-516, Дубна, 1983.
3. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, т.1, М.-Л., 1951.
4. Корнейчук А.А. и др. ОИЯИ, Д10-7707, Дубна, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 июля 1985 года.

Косарева З.М. Р-85-548

О сходимости метода итераций для модельной задачи на собственные значения

В работе сформулированы условия сходимости метода итераций, примененного для получения численного, а также аналитического вида решения модельной задачи на собственные значения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка вида $(1-x^2)y'' - xy' + (\lambda + f(x))\cdot y = 0$, где $f(x)$ – потенциал, разлагающийся в ряд Фурье по полиномам Чебышева.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Kosareva Z.M. E5-85-548

On Convergence of the Iteration Method for One Model Problem to Eigenvalues

The convergence conditions are formulated of the iteration method applied to obtain the numerical and then the analytical form of solving a model problem to eigenvalues for a linear uniform differential equation of the second order having the form: $(1-x^2)y'' - xy' + (\lambda + f(x))\cdot y = 0$. $f(x)$ is a potential expanded to Fourier series over Chebyshev polynoms.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985