

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

5-85-204 e +

М.В.Бабич, Л.А.Бордаг

СИММЕТРИЙНАЯ ЭФФЕКТИВИЗАЦИЯ
ТРЕХЗОННЫХ РЕШЕНИЙ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ sine -ГОРДОН И sh -ГОРДОН
И ИХ ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

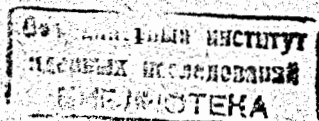
1985

ВВЕДЕНИЕ

Последнее десятилетие в развитии метода обратной задачи для интегрирования уравнений, допускающих представление нулевой кривизны, характеризуется активным применением методов классической алгебраической геометрии.

Соответствующий подход к построению периодических и условно-периодических решений уравнений нулевой кривизны, получивший название метода конечнозонного интегрирования, был впервые развит в 1974-1975 годах в работах Новикова, Дубровина, Матвеева и Итса (см. /1,2/). В частности, в работах Матвеева и Итса были впервые найдены явные выражения конечнозонных решений уравнения КдВ, а также

Ψ - функций вспомогательной линейной задачи (функций Бейкера-Ахиезера) через многомерные θ - функции Римана гиперэллиптических кривых. Эти формулы оказались типичными, их аналоги в настоящее время известны практически для всех уравнений, допускающих представление нулевой кривизны. Для уравнения sinh -Гордон они были получены впервые в работе Козела и Котлярова /3/, более простой вывод, принадлежащий Итсу, дан в лекциях /4/. С вычислительной точки зрения соответствующие формулы для кривых общего положения представляются не слишком удобными. Для кривых рода 2, т.е. для двухзонных решений, в работах Дубровина /5/ и, независимо, в работах Накамуры в 1979 году был предложен частичный выход из этого затруднения за счет использования другой параметризации тех же решений. Вместо модулей алгебраической кривой в качестве "свободных" параметров эти авторы используют элементы матрицы В-периодов (на которую в роде 2 накладывается лишь условие симметрии, положительной определенности мнимой части и неприводимости к блочному или диагональному виду преобразованиями Зигеля). Метод В-параметризации имеет однако два недостатка: он эффективен даже в роде 2 лишь для некоторых уравнений КдВ, sinh -Гордон и т.д., а, например, для уравнения НШ эффективность теряется из-за трансцендентности соответствующих дисперсионных уравнений, выражающих подходящее направление на якобиане через элементы В-матрицы. В роде $g \geq 3$ для



одномерных уравнений метод В-параметризации как вычислительный подход становится неэффективным.

В вышних разделах можно все же добиться полной эффективности формул, не используя В-параметризацию как исходную, если наложить на кривую дополнительные условия симметрии, приводящие к редукции многомерных θ -функций Римана до одномерных и выражению соответствующих абелевых интегралов через эллиптические. Этот подход развит для родов $g > 3$ в работах Бабича, Бобенко и Матвеева^{6, 7, 8/} и представляет собой синтез симметричного подхода к редукции решений нелинейных уравнений типа Ламе, предложенного в 1982 году Матвеевым, с методом Белоколоса и Энольского^{9, 10-12/} отправляющимся от вейерштрассовской теории редукции абелевых интегралов (см. обзор^{14, 15/}). Отметим, в частности, что в рамках упомянутого симметричного подхода эффективное вычисление некоторых интересных семейств решений уравнения НШ рода 3 не вызывает никаких затруднений^{7, 8/}. В этой работе мы показываем вычислительную эффективность этого подхода на примере трехзонных решений уравнений sh-Гордон и sine-Гордон. При изучении поведения этих решений при различных значениях входящих в них параметров были использованы графики этих решений. Графики строились на ЭВМ БЭСМ-6 с использованием комплекса программ "Графор" и графопостроителя "Calcomp".

В первом пункте этой работы мы напомним основные моменты построения трехзонных решений для наших уравнений и выпишем окончательные формулы для этих решений в эллиптических функциях Якоби.

Во втором пункте мы остановимся подробнее на графическом представлении этих решений и программном обеспечении.

1. Построение решений

Напомним^{6, 8/}, как строились трехзонные решения для уравнения sh-Гордон

$$u_{tt} - u_{xx} = sh u \quad (1)$$

и уравнения sine-Гордон

$$u_{tt} - u_{xx} = sin u. \quad (2)$$

Рассмотрим гиперэллиптическую риманову поверхность рода 3

$$w^2 = (z^4 - (u^2 + u'^2)z^2 + 1)(z^4 - (v^2 + v'^2)z^2 + 1) = P(z^2). \quad (3)$$

Используя симметрию этой кривой, мы можем трехмерную θ -функцию Римана, входящую в общее трехзонное решение уравнения sine-Гордон

$$u(x, t) = -2i \ln \frac{\theta(\frac{1}{2\pi}(Vx + Wt) + S + \delta)}{\theta(\frac{1}{2\pi}(Vx + Wt) + S)} \pmod{2\pi};$$

$$\delta = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$$

представить в виде суммы произведений одномерных θ -функций. Выберем на поверхности (3) базис циклов $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ (см. рис. I) с индексом пересечения $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и базис линейно независимых абелевых дифференциалов первого рода

$$dU_1 = \frac{z dz}{\sqrt{P(z^2)}}, \quad dU_{2,3} = \frac{(1 \pm z^2) dz}{\sqrt{P(z^2)}}.$$

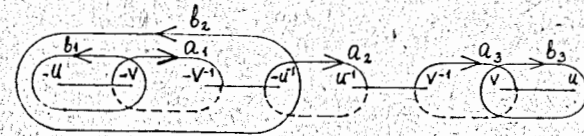


Рис. I

Вычислим матрицу А- и В-периодов этих дифференциалов

$$A'_{kj} = \oint_{a_k} dU_j, \quad B'_{kj} = \oint_{b_k} dU_j.$$

Выберем теперь новый базис циклов (a', b') так, что

$$(a'_1, a'_2, a'_3) = (a_1, a_2, a_3) (\Phi^T)^{-1}$$

$$(b'_1, b'_2, b'_3) = (b_1, b_2, b_3) \Phi, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и нормируем в нем базис дифференциалов

$$\begin{pmatrix} dU'_1 \\ dU'_2 \\ dU'_3 \end{pmatrix} = \Phi^T (A')^{-1} \begin{pmatrix} dU_1 \\ dU_2 \\ dU_3 \end{pmatrix}.$$

Новая В-матрица при этом имеет вид

$$B = \Phi^T (A^1)^{-1} B_1 \Phi = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4\tau_1 & 2\tau_1 & 0 \\ 2\tau_1 & \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 & 2\tau_2 \\ 0 & 2\tau_2 & 4\tau_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Для того, чтобы полностью определить конечнозонное решение, нужно еще вычислить компоненты векторов V и W .

Выберем абелевы интегралы второго рода Ω_1, Ω_2 так, что их А-периоды равны нулю и особенности лежат только в точках $z_1 = -u^{-1}$ и $z_2 = u^{-1}$, причем главные части разложений в окрестности этих точек имеют вид

$$\Omega_j \rightarrow \rho(z) + \dots, \quad z \rightarrow -u^{-1},$$

$$\Omega_j \rightarrow \frac{1}{16} (-1)^j \rho^{-1}(z) + \dots, \quad z \rightarrow u^{-1}, \quad j=1,2,$$

$$\rho(z) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{z-u^{-1}}{z+u^{-1}}}, \quad \rho(\bar{z}) = -\overline{\rho(z)}, \quad \rho(-z) = -\rho^{-1}(z),$$

$$\text{Im} \rho(z) > 0, \quad z \in [-u^{-1}, u^{-1}].$$

Легко видеть, что $\rho(z)$ можно выбрать в качестве локальной координаты вблизи точки u^{-1} , и $\rho^{-1}(z)$ будет локальной координатой в окрестности $-u^{-1}$. Вычислим теперь В-периоды этих дифференциалов и тем самым векторы V, W :

$$V_i = \oint_{b_i} d\Omega_1, \quad W_i = \oint_{b_i} d\Omega_2, \quad i=1,2,3,$$

$$V = (0, V_0, 0), \quad W = (W_1, \frac{W_1 + W_2}{2}, W_2),$$

$$V_0 = \frac{4\pi u^{-1} K(\alpha/\beta)}{\sqrt{(u^2 - u^{-2})(v^2 - u^{-2})(v^{-2} - u^{-2})(u - u^{-2})(v + v^{-1})}},$$

$$\alpha = \frac{v-v^{-1}}{u-u^{-1}}, \quad \beta = \frac{v+v^{-1}}{u+u^{-1}},$$

$$W_1 = \frac{2\pi(1+u^{-2})K(\alpha)}{\sqrt{(u^2 - u^{-2})(v^2 - u^{-2})(v^{-2} - u^{-2})(u+u^{-1})}},$$

$$W_2 = -\frac{2\pi(1-u^{-2})K(\beta)}{(u+u^{-1})\sqrt{(u^2 - u^{-2})(v^2 - u^{-2})(v^{-2} - u^{-2})}},$$

где $K(\alpha), K(\beta), K(\alpha/\beta)$ - полные эллиптические интегралы. Дважды используя теорему Аппеля [7], выражаем трехмерную θ -функцию Римана через одномерные θ -функции Якоби, и решение уравнения sine-Гордона принимает вид

$$u(x,t) = \frac{2}{i} \ln \frac{\theta_4(x_1/\tau_1)\theta_4(x_2/\tau_2)\theta_3(x_3/\tau_3) + \theta_4(x_1/\tau_1)\theta_4(x_2/\tau_2)\theta_2(x_3/\tau_3)}{\theta_3(x_1/\tau_1)\theta_3(x_2/\tau_2)\theta_3(x_3/\tau_3) + \theta_2(x_1/\tau_1)\theta_2(x_2/\tau_2)\theta_2(x_3/\tau_3)}, \quad (5)$$

$$x_1 = \frac{W_1}{2\pi} t + d_1, \quad x_2 = \frac{W_2}{2\pi} t + d_3,$$

$$\text{где } x_3 = \frac{v_0}{\pi} x + 2d_2 - d_1 - d_3, \quad d_1, d_2, d_3 - \nu.$$

Параметры τ_1, τ_2, τ_3 , входящие в выражение В-матрицы (4), при этом равны соответственно $\tau_1 = i \frac{K'(\alpha)}{K(\alpha)}, \tau_2 = i \frac{K'(\beta)}{K(\beta)}, \tau_3 = i \frac{K'(\alpha/\beta)}{K(\alpha/\beta)}$.

Выпишем условия, при которых решение (5) является вещественным решением уравнения (2). Пусть $\text{Re} d_i = -\frac{1}{4}$, сделаем замену $x \rightarrow ix, t \rightarrow it, u \rightarrow u + \pi$, тогда

$$u(x,t) = \pi + \frac{2}{i} \ln \left(\frac{dn_1^{\pm} dn_2^{\pm} dn_3^{\pm} + \alpha cn_1^{\pm} cn_2^{\pm} cn_3^{\pm}}{dn_1^{\pm} dn_2^{\pm} dn_3^{\pm} + \alpha cn_1^{\pm} cn_2^{\pm} cn_3^{\pm}} \frac{dn_1 dn_2}{\sqrt{\alpha' \beta'}} \right) \pmod{2\pi},$$

$$dn_1^{\pm} = dn(i\nu t + 2iK(\alpha) \pm \frac{K(\alpha)}{2}, \alpha), \quad cn_1^{\pm} = cn(i\nu t + 2iK(\alpha) \pm \frac{K(\alpha)}{2}, \alpha), \quad (6)$$

$$dn_2^{\pm} = dn(i\nu t + 2iK(\beta) \pm \frac{K(\beta)}{2}, \beta), \quad cn_2^{\pm} = cn(i\nu t + 2iK(\beta) \pm \frac{K(\beta)}{2}, \beta),$$

$$dn_3 = dn(i\mu x + 4iK(\alpha/\beta)d_2 - 2iK(\alpha/\beta)(d_1 + d_3), \alpha/\beta), \quad \alpha' = \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad \beta' = \sqrt{1 - \beta^2},$$

$$cn_3 = cn(i\mu x + 4iK(\alpha/\beta)d_2 - 2iK(\alpha/\beta)(d_1 + d_3), \alpha/\beta),$$

$$\nu = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u^2 - u^{-2}}{(u^2 v^2 - 1)(v^2 - u^{-2})}}, \quad \mu = -\frac{(1 - u^{-2})(1 + v^{-2})}{2\sqrt{(u^2 - u^{-2})(1 - u^{-2}v^{-2})(v^2 - u^{-2})}},$$

соответственно для уравнения (1) вещественное решение в эллиптических функциях Якоби имеет вид

$$u(x,t) = -2 \ln \sqrt{\alpha' \beta'} \frac{dn(\tilde{x}, \alpha/\beta) + \alpha \text{sn}(t_1, \alpha) \text{sn}(t_2, \beta) \text{cn}(\tilde{x}, \alpha/\beta)}{dn(\tilde{x}, \alpha/\beta) \text{dn}(t_1, \alpha) \text{dn}(t_2, \beta) + \alpha \text{cn}(t_1, \alpha) \text{cn}(t_2, \beta) \text{cn}(\tilde{x}, \alpha/\beta)}, \quad (7)$$

где $\tilde{x} = \mu x + d_3$, $t_1 = \nu t + d_1$, $t_2 = \nu t + d_2$, $d_1, d_2, d_3 - V$.
 Решение (6) вещественно, так как выражение, стоящее под логарифмом по модулю равно 1 и, следовательно, логарифм его чисто мнимая величина. Оба решения, как для уравнения sine-Гордон, так и для уравнения sh-Гордон, представляют собой периодическую по x функцию с периодом $T_3 = \frac{4K(\alpha/\beta)}{\mu}$, по времени эти решения зависят от двух периодических функций с периодами $T_1 = \frac{4K(\alpha)}{\nu}$ и $T_2 = \frac{4K(\beta)}{\nu}$.

Ясно, что эти решения будут периодичны по t , только если периоды T_1 и T_2 соизмеримы. Заметим, что, хотя в каждый фиксированный момент времени t_0 функции (5), (6) имеют один и тот же период T_3 по x , нельзя представлять себе, что в момент времени $t_0 + \Delta t$ мы получим наше решение просто параллельным переносом кривой, в действительности форма кривой меняется и в каждый момент времени своя.

2. Графическое представление решений

В этом пункте мы приведем несколько графиков решений (6) и (7) и остановимся подробнее на поведении этих решений.

Прежде дадим некоторые пояснения к рисункам. График представляет собой изометрическую проекцию поверхности $u(x, t)$, где по вертикали отложены значения u , а по осям x и t (см. рис.2).

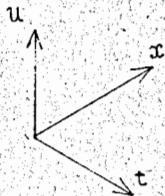


Рис.2

Поверхность представлена сеткой, возникающей при сечениях поверхности плоскостями, параллельными соответственно x и t . Другими словами, на рисунке мы видим, как развивается со временем профиль функции $u(x, t_0)$. В решения входят 5 независимых параметров $\alpha, \beta, d_1, d_2, d_3$ параметры α и β задают концы зон $u = \frac{\alpha' + \beta'}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$, $v = \frac{\beta\alpha' + \alpha\beta'}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$, и на них накладывается только одно условие $\alpha < \beta$, параметры d_1, d_2, d_3 - произвольны. Нами были построены графики для большого набора параметров, здесь мы приведем наиболее характерные.

Остановимся подробнее на решении (7) для уравнения sh-Гордон. Здесь был замечен следующий эффект: если параметры α и β малы,

$d_1 \neq mK(\alpha)$, $d_2 \neq nK(\beta)$, где m, n - целые числа, то решение (7) описывает процесс, близкий к стационарному, т.е. решение мало меняется со временем. Изменения амплитуды при фиксированном t на два-три порядка больше, чем изменения амплитуды при фиксированном x . Типичный график такого решения приведен на рис.3. При этом $\alpha^2 = 0,06$, $\beta^2 = 0,11$, $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, t меняется от 0 до $8K(\beta)$, x лежит в интервале $[0, 8K(\alpha/\beta)]$, каждый из интервалов разбит 90 сечениями.

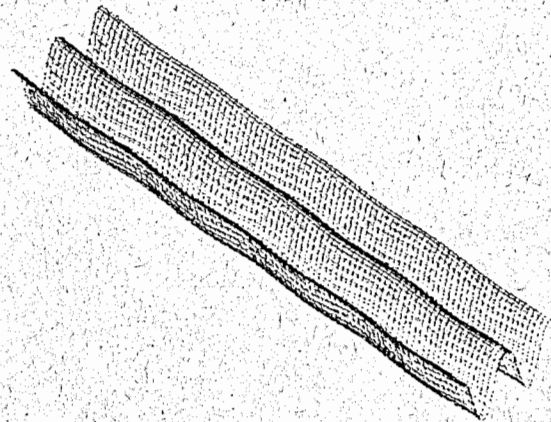


Рис.3

Заметим, что если константы d_1, d_2, d_3 выбраны так, что $d_1 = (2n+1)K(\alpha)$, $d_2 = 2nK(\beta)$,

(8)

n - целое, d_3 - произвольное, либо

$$d_1 = 2nK(\alpha), \quad d_2 = (2n+1)K(\beta), \quad (9)$$

d_3 - произвольно, то в начальный момент времени $t = 0$ решение $u(x, t)$ равно в первом случае константе $\ln \frac{\alpha'}{\beta'}$, и во втором $-\ln \frac{\alpha'}{\beta'} = C$. Хотя в начальный момент времени это константа, с ростом t решение "раскачивается". Для любой константы C , отличной от нуля, мы можем найти такие α, β и построить решение с $u(x, 0) = C$. Решение такого типа приведено на рис.4 при $\alpha^2 = 0,15$, $\beta^2 = 0,35$, $d_1 = d_3 = 0$, $d_2 = K(\beta)$, t меняется от 0 до $8K(\beta)$, $x \in [0, 8K(\alpha/\beta)]$. Положив $u(x, 0) = C$, мы получаем, конечно, целый класс решений. Например, в первом случае (8) легко заметить, что первая производная решения $u'(x, t)$ по времени в нуле так меняется в зависимости от параметров d_1, d_2, d_3 :

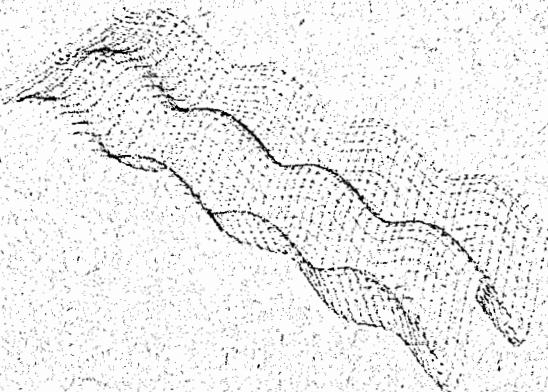


Рис.4

$$u_t(x,0) = 2\alpha \operatorname{cd}(\mu x, \alpha/\beta)$$

при

$$d_1 = K(\alpha) \pmod{4K(\alpha)}, \quad d_2 = K(\beta) \pmod{4K(\beta)}, \quad d_3 = 0 \pmod{4K(\alpha/\beta)},$$

при тех же d_1 , d_2 и $d_3 = K(\alpha/\beta) \pmod{4K(\alpha/\beta)}$

$$u_t(x,0) = -2\alpha \operatorname{sn}(\mu x, \alpha/\beta),$$

при

$$d_1 = K(\alpha) \pmod{4K(\alpha)}, \quad d_2 = 2K(\beta) \pmod{4K(\beta)}, \quad d_3 = 0, \quad u_t(x,0) = -2\alpha \operatorname{cd}(\mu x, \alpha/\beta),$$

если d_1 , d_2 прежние, но $d_3 = K(\alpha/\beta)$, то

$$u_t(x,0) = 2\alpha \operatorname{sn}(\mu x, \alpha/\beta).$$

Отметим еще, что с ростом параметров α, β растет и размах колебаний вместе с абсолютными значениями $u(x,t)$, например, при изменении α^2 от 0,02 до 0,6 $u_{\max}(x,t)$ выросло на порядок. На рис.5 мы приводим график решения при $\alpha^2 = 0,6$, $\beta^2 = 0,65$, $d_1 = d_3 = 0$, $d_2 = 2K(\beta)$, t меняется в пределах от 0 до $8K(\beta)$, $x \in [0, 8K(\alpha/\beta)]$. Перейдем теперь к решениям для уравнения vii -Гордон. Для этих решений характерна более сильная зависимость от времени при тех же α, β , чем в случае уравнения vi -Гордон. В множестве решений, описываемых формулой (6), есть и такие, что $u(x,0) = C$, только здесь C всегда равно π . Достигается это двумя возможными способами: либо мы полагаем $d_1 = d_2 = 0$, либо $d_1 = \frac{K(\alpha)}{2K(\alpha)}$, $d_2 = \frac{K(\beta)}{2K(\beta)}$. В том и другом случае выражение под логарифмом равно 1 для любых x и d_3 , и, таким образом, $u(x,0) = \pi$. Типичный график такого решения приведен на рис.6 для $\alpha^2 = 0,15$, $\beta^2 = 0,35$, $d_1 = d_2 = d_3 = 0$,

t меняется от $-3K(\beta)$ до $3K(\beta)$, x лежит в интервале $[-3K(\alpha/\beta), 3K(\alpha/\beta)]$.

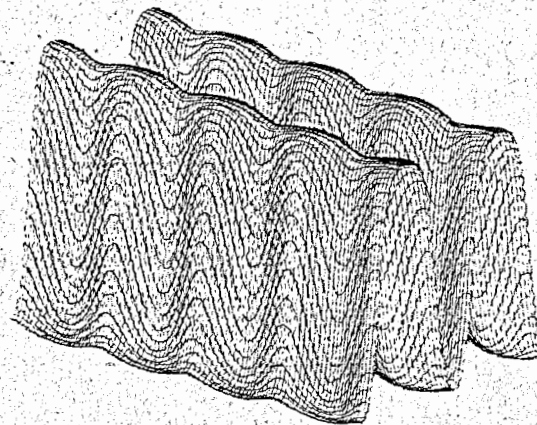


Рис.5.

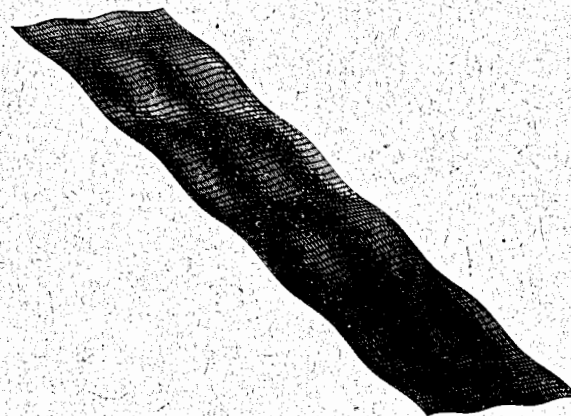


Рис.6.

В заключение отметим, что программа для построения графиков написана на языке фортран. Массив данных, необходимых для работы графической части программы, заполнялся с использованием стандартных библиотечных программ для вычисления $\operatorname{sn}(x, \alpha)$, $\operatorname{cn}(x, \alpha)$,

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника*	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.

Бабич М.В., Бордаг Л.А.

5-85-204

Симметричная эффективизация трехзонных решений для уравнений sine-Гордон и sh-Гордон и их графическое представление

Исследуются трехзонные решения уравнения sh- и sine-Гордона, которые благодаря специальному выбору римановой поверхности выражаются в эллиптических функциях Якоби. Дано их графическое представление при различном выборе входящих в них параметров.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Babich M.V., Bordag L.A.

5-85-204

Symmetrical Simplification of the Three-Gap Solutions, of the sh- and sine-Gordon Equations and Their Graphical Representation

3-gaps solutions of the sh- and sine-Gordon equations are investigated. These solutions are described through Jacoby-elliptic functions due to the special form of the corresponding Riemann surface. The graphics of the solutions are represented for some variants of parameters of the solutions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1985