сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

5-85-178

Е.П.Жидков, Е.Ю.Панова*

СУЩЕСТВОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ПРОЦЕСС РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В СРЕДЕ С НАСЫЩЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

* Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова.

1985

I. В работах /I,2/ рассматриваются решения уравнения

$$i\frac{\partial E}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E + f(|E|^2)E = 0 \qquad (I.I)$$

для огибающей E электрического поля светового пучка в виде трехмерных волновых пакетов, ограниченных как в поперечном, так и в продольном направлениях. Здесь функция $f(|E|^2)$ описывает нелинейную часть диэлектрической проницаемости среды.

Решения уравнения (I.I) вида $\varphi(r)e^{i\gamma t}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и функция $\varphi(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)\varphi - \gamma\varphi + f(\varphi^2) = 0 \qquad (I.2)$$

и граничным условиям

$$\left.\frac{d\varphi}{dr}\right|_{r=0} = 0, \quad \varphi(\infty) = 0 , \qquad (I.3)$$

называются стационарными сферически-симметричными решениями. В работе /3/ для таких решений использован термин "частицеподобные".

В случае насыщения нелинейного показателя преломления среды функция $f(\varphi^2)$ является ограниченной. Как правило, для нее выполняется условие

$$\lim_{\varphi\to\infty} f(\varphi^2) = \mathrm{const} \qquad (I.4)$$

(см. работы /2,4-6/).

2. В работах /I,4,5/ для среды с насыщением нелинейности рассматривается функция $f(\varphi^2)$ вида

$$f(\varphi^2) = \frac{1}{\sigma\alpha}(1-e^{-\alpha\varphi^2}) , \quad \sigma , \alpha > 0 .$$

В работах /I,2,6/ рассматривается функция

$$f(\varphi^2) = \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} .$$

Для этой функции в работах /I-2/ численно найдены стационарные решения – безузловые и с двумя и тремя узлами. В настоящей работе приводится строгое доказательство существования решений задачи (I.2)-(I.3) – безузловых и с произвольным числом узлов – для функции вида

$$f(\varphi^2) = \frac{(\varphi^2)^\alpha}{1+(\varphi^2)^\alpha} \quad , \alpha > 0 \quad . \tag{2.I}$$

При доказательстве используются результаты работ /3,7/.

Очевидно, $0 \leqslant f(\varphi^2) < 1$ для любого φ, и выполняется условие (I.4), а функция $f(\varphi^2)$ при $\alpha = 1$ совпадает с функцией, рассмотренной в работах /I,2/.

Рассмотрим задачу

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = \gamma y - f(y^2)y \quad , \quad x > 0 \quad , \tag{2.2}$$

$$y(0) = y_0 > 0 \quad , \tag{2.3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

с функцией f вида (2.I) в правой части уравнения (2.2).

<u>Теорема I</u>. Для любого $y_0 > 0$ решение задачи (2.2)-(2.3) при $\gamma \leq 0$ является стационарным решением, т.е. выполняется условие

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0 \, . \tag{2.4}$$

<u>Доказательство</u>. По теореме 4 из работы /3/, для решения задачи (2.2)-(2.3) выполняется условие (2.4), если существуют такие числа α_{-1}, α_1, что $\alpha_{-1} < 0 < \alpha_1$, и выполняются неравенства

$$f(y^2)y > 0 \quad \text{при} \quad y \in (0, \alpha_1]$$

$$f(y^2)y < 0 \quad \text{при} \quad y \in [\alpha_{-1}, 0) \quad ,$$

$$u(\alpha_{-1}) \geqslant u(\alpha_1) \quad ,$$

где

$$u(\alpha) = \int_0^{\alpha^2} [\gamma - f(t)]\,dt \quad ,$$

причем

$$y_0 \in (0, \alpha_1] \quad .$$

Для доказательства теоремы достаточно выбрать для произвольного $\alpha_1 > 0, \alpha_{-1} < 0$ так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$|\alpha_{-1}| \geqslant \alpha_1 \quad .$$

Тогда условия теоремы 4 из работы /3/ выполнены, и тем самым теорема I доказана.

<u>Лемма</u>. Для решений $y(x)$ задачи (2.2)-(2.3) справедливо неравенство

$$|y(x)| \leqslant y_0 \quad ,$$

если y_0 выбрано так, что удовлетворяются неравенства

$$f(y_0^2) > \gamma \quad \text{при} \quad \gamma > 0 \quad ,$$

$$y_0 > 0 \quad \text{при} \quad \gamma \leq 0 \quad .$$

<u>Доказательство</u>. Как показано в /3/, для решений $y(x)$ задачи (2.2)-(2.3) справедливо неравенство

$$[y'(x)]^2 + u[y(x)] \leqslant u[y_0] \quad , \quad x > 0 \, . \tag{2.5}$$

Нетрудно показать, что в точке $y = y_0$ функция $u[y(x)]$ возрастает как функция аргумента y, а в точке $y = -y_0$ $u[y]$ убывает. Тогда в силу неравенства (2.5):

$$|y(x)| \leqslant y_0 \quad , \quad x > 0 \, .$$

<u>Теорема 2.</u> Любое решение $y(x)$ задачи (2.2)-(2.3) при $\gamma < 0$ имеет бесконечную последовательность корней и удовлетворяет условию (2.4).

<u>Доказательство</u>. Условие (2.4) выполняется в силу теоремы I. В /3/ показано, что любой корень x_k функции $y(x)$ – изолированный. Тогда достаточно доказать, что для любого числа $A > 0$ найдется $\bar{x} > A$ такое, что $y(\bar{x}) = 0$. Предположим противное. Пусть

при $x > A$ $y(x) \neq 0$. Рассмотрим функцию $z(x) = x \cdot y(x)$, которая удовлетворяет уравнению

$$z'' = \gamma z - f\left(\frac{z^2}{x^2}\right) z \tag{2.6}$$

и начальным условиям

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = y_0 > 0. \tag{2.7}$$

Очевидно, что

$$-\left[\gamma - f\left(\frac{z^2}{x^2}\right)\right] \geqslant -\gamma. \tag{2.8}$$

Рассмотрим функцию $\psi(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\psi'' - \gamma \psi = 0 \tag{2.9}$$

и начальным условиям

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = z'(0).$$

В силу того, что $\gamma < 0$ по условию теоремы, любое решение уравнения (2.9) имеет бесконечно много нулей. Следовательно, оно имеет нули и при $x > A$. По теореме сравнения Штурма /8/ и функция $z(x)$, удовлетворяющая уравнению (2.6), имеет нули при $x > A$, что противоречит предположению. Следовательно, любое решение задачи (2.2) – (2.3) при $\gamma < 0$ имеет бесконечное число корней.

<u>Теорема 3</u>. Любое решение задачи (2.2)–(2.3) при $\gamma = 0$ с функцией f вида (2.I) имеет бесконечную последовательность корней и удовлетворяет условию (2.4).

<u>Доказательство</u>. Как и при рассмотрении теоремы 2, достаточно доказать, что для любого числа $A > 0$ найдется $x > A$ такое, что $y(x) = 0$.

Предположим противное. Пусть при $x > A$ $y(x) \neq 0$. Пусть для определенности $y(x) > 0$ при $x > A$. Рассмотрим функцию $z(x) = x \cdot y(x)$, которая удовлетворяет уравнению

$$z'' = -z \cdot f\left(\frac{z^2}{x^2}\right) \tag{2.I0}$$

и начальным условиям

$$z''(0) = 0, \quad z''(0) = y_0 > 0. \tag{2.II}$$

В силу предположения, сделанного при доказательстве теоремы, справедливо также

$$z(x) > 0 \quad \text{при} \quad x > A. \tag{2.I2}$$

Из леммы I следует, что

$$|z(x)| \leqslant x \cdot y_0 \quad \text{при} \quad x > 0. \tag{2.I3}$$

Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что A – наибольший корень функции $z(x)$: $z(A) = 0$, $z(x) > 0$ при $x > A$.

Тогда $z''(x) < 0$ при $x > A$. Так как $z(x)$ не достигает оси ox при $x > A$, то $z'(A) \geqslant 0$ при $x \geqslant A$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{x \to \infty} z(x) \geqslant 0.$$

В силу предположения (2.I2), как в работе /3/, можно показать, что

$$\lim_{x \to \infty} z'(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} z(x) = +\infty. \tag{2.I4}$$

Рассмотрим правую часть соотношения (2.I0):

$$\Pi(x, z) = -\frac{\left(\frac{z^2}{x^2}\right)^{\alpha} \cdot z}{1 + \left(\frac{z^2}{x^2}\right)^{\alpha}}. \tag{2.I5}$$

Запишем равенство (2.I5) в виде

$$\Pi(x, z) = \frac{(z^2)^{\alpha} z}{(x^2)^{\alpha}} \left\{ -\frac{1}{1 + \left(\frac{z^2}{x^2}\right)^{\alpha}} \right\}.$$

В силу неравенства (2.I3)

$$\Pi(x, z) \leqslant \left(\frac{z^2}{x^2}\right)^{\alpha} \cdot z \left\{ -\frac{1}{1 + (y_0^2)^{\alpha}} \right\}. \tag{2.I6}$$

Введем неизвестную функцию $\psi(x)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\psi''(x) + C\left(\frac{z^2}{x^2}\right)^{\alpha} \psi(x) = 0, \tag{2.I7}$$

где $$C = \frac{1}{1+(y_0^2)^{\alpha}} > 0 ,$$

и начальным условиям

$$\psi(A+\delta) = 0 ,$$
$$\psi'(A+\delta) = z'(A+\delta) , \delta>0 . \qquad (2.18)$$

Докажем, что $\psi(x)$ достигает оси Ox при $x > A+\delta$. Для этого воспользуемся следующей теоремой из /8/:

Решение $y(x)$ уравнения

$$y''+A(x)y = 0 ,$$

где $A(x) > 0$ и непрерывные при $x \geqslant q$, причем либо $\lim\limits_{x\to\infty} A(x) = \infty$, либо $\lim\limits_{x\to\infty} A(x)=0$, имеет бесконечно много нулей $x_0, x_2, \ldots, x_{2n}, \ldots$, если для любых положительных k, τ найдется такое значение x^0, что при $x \geqslant x^0$ и $0 \leqslant h \leqslant \frac{k}{\sqrt{A(x)}}$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{A(x\pm h)}{A(x)} - 1 \right| < \tau . \qquad (2.19)$$

При этом каждому значению $\tau : 0<\tau<1$ соответствует такой индекс n_0, что при $n > n_0$ имеем

$$\frac{\pi}{\sqrt{A(x_{2n})(1+\tau)}} < x_{2n-2} - x_{2n} < \frac{\pi}{\sqrt{A(x_n)(1-\tau)}}$$
$$(n=n_0+1, n_0+2, \ldots) .$$

Докажем, что все предположения этой теоремы выполняются для уравнения (2.17). Действительно, нетрудно увидеть, что в нашем случае $q=A+\delta$,

$$A(x)=C\left(\frac{z^2}{x^2}\right)^{\alpha} > 0 \quad \text{при} \quad x \geqslant A+\delta, \quad \lim_{x\to\infty} A(x)=0 ,$$

т.к. $$\lim_{x\to\infty} A(x)=C \lim_{x\to\infty} \left(\frac{z^2}{x^2}\right)^{\alpha} = C \lim_{x\to\infty} (y^2)^{\alpha} = 0$$

в силу теоремы I.

Остается доказать, что в случае задачи (2.17)-(2.18) выполняется неравенство (2.19). Рассмотрим выражение:

$$\left| \left[\frac{x^2}{(x\pm h)^2} \right]^{\alpha} \cdot \left[\frac{z^2(x\pm h)}{z^2(x)} \right]^{\alpha} - 1 \right| . \qquad (2.20)$$

В силу того, что при $x \geqslant A$ $z(x)$ – вогнутая функция, т.к. $z''(x) < 0$ при $x > A$, можно получить (см. /3/) следующее утверждение:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{z(x\pm h)}{z(x)} = 1 .$$

I). Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$.

Рассмотрим выражение

$$\left[\frac{x^2}{(x\pm h)^2} \right]^{\alpha} = \left[\frac{1}{(1 \pm \frac{h}{x})^2} \right]^{\alpha} .$$

Для нашего случая $0 \leqslant h \leqslant \frac{kx^{\alpha}}{\sqrt{C}\, z^{\alpha}}$, поэтому при $x \geqslant A+\delta$

$$0 \leqslant \frac{h}{x} < \frac{k}{\sqrt{C}} \cdot \frac{1}{z^{\alpha} x^{\sigma}} , \qquad (2.21)$$

где $\sigma=1-\alpha \geqslant 0$.

Из (2.21) следует, что $\frac{h}{x} \to 0$ при $x \to \infty$, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty} z(x)=+\infty$ в силу предположения (2.14). Поэтому $\left[\frac{x^2}{(x\pm h)^2}\right] \to 1$ при $x \to \infty$.
Итак, доказано, что в случае $0<\alpha\leqslant 1$ неравенство (2.19) выполняется.

2). Пусть теперь $\alpha > 1$. Докажем, что и в этом случае $\frac{h}{x} \to 0$ при $x \to \infty$. Доказательство проведем методом математической индукции.

а). При $1 < \alpha \leqslant 2$ докажем, что $\frac{h}{x} \to 0$ при $x \to \infty$. В этом случае

$$0 < \frac{h}{x} \leqslant \frac{kx^{\alpha-1}}{\sqrt{C}\, z^{\alpha}} .$$

Рассмотрим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{z^{\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{\alpha z^{\alpha-1} z'} = \frac{\alpha-1}{\alpha} \lim_{x\to\infty} \frac{(\alpha-2)x^{\alpha-3} z^{(1-\alpha)} + (1-\alpha)x^{\alpha-2} z' z^{-\alpha}}{z''} = 0 ,$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty} z''(x) = -\infty$ в силу (2.10).

б). Предположим, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{h}{x}=0$ при $(n-1)<\alpha\leqslant n$.

в). Докажем, что тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{h}{x}=0$ при $n<\alpha\leqslant n+1$.

Рассмотрим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{z^{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{\alpha z^{\alpha-1}z'}=$$

$$=\frac{\alpha-1}{\alpha}\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha-2)x^{\alpha-3}z^{\alpha-1}-(\alpha-1)z^{\alpha-2}x^{\alpha-2}z'}{z''\ z^{2(\alpha-1)}}=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\alpha}\Omega_1-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}\Omega_2\ ,$$

где

$$\Omega_1=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha-3}}{z^{\alpha-1}z''}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x^{\alpha-2}}{z^{\alpha-1}}\cdot\frac{1}{xz''}\right\}=0\ ,$$

$$\Omega_2=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha-2}z'}{z''\cdot z^{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x^{\alpha-2}}{z^{\alpha-1}}\cdot\frac{z'}{z''z'}\right\}=0\ .$$

Итак, доказано, что $\frac{h}{x}\to 0$ при $x\to\infty$ для любого $\alpha>0$. Поэтому

$$\left[\frac{x^2}{(x\pm h)^2}\right]^{\alpha}\to 1 \qquad \text{при} \qquad x\to\infty\,.$$

Следовательно, неравенство (2.I9) в случае задачи (2.I7)-(2.I8) выполняется. Поэтому в силу указанной теоремы из /8/ функция $\Psi(x)$ достигает оси Ox при некотором $x>A+\delta$.

Как показано в /3/, все корни $\Psi(x)$ – изолированные, поэтому существует минимальный среди корней $\Psi(x)$, больших $A+\delta$. Обозначим этот корень через x.

Положим

$$Q(x)=-\frac{1}{1+(y_0^2)^{\alpha}}\cdot\left(\frac{z^2}{x^2}\right)^{\alpha}\ ,$$

$$Q_1(x)=-\frac{1}{1+\left(\frac{z^2}{x^2}\right)^{\alpha}}\cdot\left(\frac{z^2}{x^2}\right)^{\alpha}\ .$$

$Q(x), Q_1(x)$ – непрерывные функции, не обращающиеся одновременно тождественно в нуль, $Q(x)\geqslant Q_1(x)$ при $x\geqslant A+\delta$.

Воспользуемся теоремой сравнения Штурма /8/ для уравнений

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}-Q(x)\Psi(x)=0\ ,$$

$$\frac{d^2z(x)}{dx^2}-Q_1(x)z(x)=0\ .$$

Все условия этой теоремы выполнены на отрезке $[A+\delta\ ,\ x]$. Следовательно, $z(x)$ имеет корень на отрезке $[A+\delta,\ x]$, а это противоречит предположению о том, что $z(x)>0$ при $x>A$. Полученное противоречие доказывает существование бесконечного числа корней решения $z(x)$, а следовательно, и решения $y(x)$. Условие (2.4) выполняется в силу теоремы I.

3). Докажем существование решений задачи (I.2)-(I.3) с функцией $f(\varphi^2)$ вида (2.I) при $\gamma>0$.

Как показано в /2/, необходимым условием существования стационарных решений в классе интегрируемых с квадратом функций является выполнение неравенства

$$\gamma<M\ ,$$

где $M=\max|f(\varphi^2)|$.

<u>Теорема 4</u>. Существует такая положительная константа $0<\gamma_0<1$, что при любом j : $0<\gamma<\gamma_0$ задача (2.2)-(2.3) с функцией f вида (2.I) имеет решение, которое удовлетворяет условию (2.4) при некотором $y_0>\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{1/2\alpha}$.

<u>Доказательство</u>. В силу теоремы 3 при $\gamma=0$ существует решение $y(x)$ задачи (2.2)-(2.3) такое, что $y(0)>0$ и существует $x>0$: $y(x)<0$. В силу непрерывной зависимости на конечном интервале решения задачи (2.2)-(2.3) от параметра γ, существует такое число $0<\gamma_0<1$, что если $0<\gamma<\gamma_0$, то решение $y(x)$ задачи (2.2)-(2.3) удовлетворяет условиям: $y(0)=y(0)>0,\ y(x)<0$. Следовательно, $y(x)$ пересекает ось Ox в некоторой точке. Тем самым выполнены условия теоремы 5 из работы /3/, в которой доказывается, что существует такое значение параметра $y_0>\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{1/\alpha}$, при котором задача (2.2)-(2.3) имеет неотрицательное решение, удовлетворяющее условию (2.4).

<u>Теорема 5</u>. Существует такая положительная константа γ_0: $0<\gamma_0<1$, что при любом $0<\gamma<\gamma_0$ задача (2.2)-(2.3) с функцией f вида (2.I) имеет решение с произвольным числом узлов,

для которого выполняется условие (2.4), при некотором значении параметра $y_0 > 0$.

<u>Доказательство</u>. Доказательство аналогично доказательству теоремы 4. Оно следует из теоремы 3, непрерывной зависимости решений задачи (2.2)-(2.3) от параметра γ на конечном отрезке и теоремы 3 из работы /7/, все условия которой в нашем случае выполняются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е., Соболев В.В., Сынах В.С. ПМТФ, 1972, № 1, с.92.
2. Вахитов Н.Г., Колоколов А.А. Изв. вузов. Радиофизика, 1973, 16, с.1020.
3. Жидков Е.П., Жидков П.Е. ОИЯИ, Р5-11-599, Р5-11600, Дубна, 1978.
4. Douves E.L., Marburger J.H. Phys. Rev., 1969, <u>179</u>, p.862.
5. Захаров В.Е., Соболев В.В., Сынах В.С. ЖЭТФ, 1971, 60, с.136.
6. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Письма в ЖЭТФ, 1966, 3, с.137.
7. Жидков П.Е. ОИЯИ, 5-82-68, Дубна, 1982.
8. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., ИЛ., 1953, т. 1; 1954, т.2.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 марта 1985 года.