СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

5 - 8437

Х.Семерджиев

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТНОЙ "ЯМЫ", СОЗДАВАЕМОЙ ДВУМЯ ВИТКАМИ ТОКА, НАХОДЯЩИМИСЯ ВНУТРИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАМЕРЫ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

5 - 8437

Х.Семерджиев

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТНОЙ "ЯМЫ", СОЗДАВАЕМОЙ ДВУМЯ ВИТКАМИ ТОКА, НАХОДЯЩИМИСЯ ВНУТРИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАМЕРЫ

I. Постановка задачи.

Уравнения для определения самосогласованного поля в цилиндрических координатах r, z имеют вид /I/

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=-\frac{\varkappa}{er}\left(H_0-e\varphi\right)\sigma(\Phi) \quad , \tag{I}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}-\frac{A}{r^2}=-\frac{\varkappa c}{er^2}\left[M_0-\frac{e}{c}r(A+A^0)\right]\sigma(\Phi) \quad , \tag{2}$$

$$\Phi(\varphi,A)=(H_0-e\varphi)^2-m^2c^4-\frac{c^2}{r^2}\left[M_0-\frac{e}{c}r\left(A+A^0\right)\right]^2 \tag{3}$$

$$\sigma(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1 & x>0.\end{cases} \tag{4}$$

Здесь φ – неизвестный скалярный потенциал, A – неизвестная θ -вая компонента векторного потенциала, $\varkappa$ – нормировочная константа (от нее зависит число частиц в пучке), H_0, M_0 – заданные константы интегралов движения, соответствующие полной энергии и θ -вой компоненте обобщенного импульса в одночастичной задаче, m – масса покоя электрона, e – заряд электрона, c – скорость света. Для решений φ и A системы уравнений (I)-(4) заданы /I/ соответствующие граничные условия на контуре прямоугольника Δ ($0\le r\le a$, $-b\le z\le b$).

Функция A^0 характеризует внешнее магнитное поле, создаваемое двумя симметрично расположенными относительно плоскости $z=0$ витками радиуса R, на расстоянии $2Z$ друг от друга. Источниками внешнего магнитного поля являются токи

$$j_{\theta 1,2}=\frac{K\,\delta(r-R)}{2\pi r}\,\delta(z\pm Z) \quad , \tag{5}$$

где $K = 2\pi R I$

I – полный ток в витке,

δ – дельта-функция Дирака.

Функция A^0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A^0}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 A^0}{\partial z^2}-\frac{A^0}{r^2}=-\frac{4\pi}{c}(j_{\theta 1}+j_{\theta 2}) \qquad (6)$$

и граничным условиям

$$A^0(r,z)\Big|_{z=\pm b}=0\,, \qquad (7)$$

$$A^0(r,z)\Big|_{r=0,\,r=a}=0 \qquad (8)$$

(рассматривается идеально проводящая камера).

В работе /I/ была решена задача: при заданной функции A^0, удовлетворяющей уравнениям (5) и (6) и граничным условиям (7) и (8), найти такую симметричную относительно оси Or область Ω внутри прямоугольника (камеры) Δ, чтобы найденные φ и A из (I)-(4) при такой Ω удовлетворяли соотношению

$$\Phi[\varphi(P),A(P)]=0$$

для каждой точки P, принадлежащей границе области Ω. При этом область Ω и функции φ и A, при заданной функции A^0, являются самосогласованным решением задачи (I)-(4). Отметим, что при некоторых значениях входных параметров поставленная задача может и не иметь решения.

В этой работе выводится выражение для внешнего магнитного поля и исследуется "яма", создаваемая этим полем.

2. Выражение для магнитного поля.

Найдем теперь функцию A^0, удовлетворяющую уравнению (6) и граничным условиям (7) и (8). Решение будем искать в форме

$$A^0=\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n(r)\cos(\varkappa_{2n+1}z)\,, \qquad (9)$$

где $\varkappa_{2n+1}=\pi(2n+1)/2b$. Очевидно при этом, что функция A^0 удовлетворяет граничным условиям (7). Далее определим функции $\Psi_n(r)$ ($n=0,1,2,\ldots$) так, чтобы функция A^0 из (9) удовлетворяла уравнению (6) и граничным условиям (8). Подставляя (9) в (6) и имея в виду (5), находим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d^2\Psi_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Psi_n}{dr}-\Psi_n\left(\varkappa_{2n+1}^2+\frac{1}{r^2}\right)\right]\cos(\varkappa_{2n+1}z)= \\ =-\frac{2K}{rc}\delta(r-R)[\delta(z-Z)+\delta(z+Z)]. \qquad (10)$$

Если умножим обе части равенства (10) на $\cos(\varkappa_{2m+1}z)$ и проинтегрируем в пределах от $-b$ до b, то получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d^2\Psi_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Psi_n}{dr}-\Psi_n\left(\varkappa_{2n+1}^2+\frac{1}{r^2}\right)\right]b\,\delta_{mn}= \qquad (11)$$

$$=-\frac{4K}{rc}\delta(r-R)\cos(\varkappa_{2m+1}Z)\,,$$

где воспользовались соотношением

$$\int_{-b}^{b}\cos(\varkappa_{2n+1}z)\cos(\varkappa_{2m+1}z)\,dz=b\,\delta_{mn}\,.$$

Здесь через δ_{mn} обозначен символ Кронекера, т.е.

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1 & m=n\\ 0 & m\neq n.\end{cases}$$

Если обозначим правую часть (11) через $b\cdot Q_m(r)$, то из (11) получаем, что функция $\Psi_m(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\Psi_m}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Psi_m}{dr}+\Psi_m\left[(i\varkappa_{2m+1})^2-\frac{1}{r^2}\right]=Q_m(r). \qquad (12)$$

Функция A^0 будет удовлетворять граничным условиям (8), если функции $\Psi_m(r)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\Psi_m(a)=\Psi_m(0)=0 \qquad (m=0,1,2,\ldots). \qquad (13)$$

Приравнивая нулю левую часть (I2), получаем уравнение, которое является частным случаем уравнения Бесселя (см.,например, /2/ 8.49I).
Это однородное уравнение имеет два независимых частных решения

$$I_1(\varkappa_{2m+1} r) \quad и \quad K_1(\varkappa_{2m+1} r), \tag{I4}$$

где I_1 и K_1 – модифицированные функции Бесселя.
Вронскиан фундаментальной системы решения (I4) равен /2/

$$W_m = -\frac{1}{r} \ . \tag{I5}$$

Для того чтобы найти общее решение уравнения (I2), нужно найти частное решение этого уравнения. Такое частное решение будем искать методом Лагранжа (методом варьирования произвольных констант), т.е. частное решение (I2) ищем в виде

$$\tilde{\Psi}_m(r) = S_m(r) I_1(\varkappa_{2m+1} r) + R_m(r) K_1(\varkappa_{2m+1} r), \tag{I6}$$

где функции $S_m(r)$ и $R_m(r)$ подлежат определению.
Следуя методу Лагранжа, их производные $S'_m(r)$ и $R'_m(r)$ находим из системы

$$\begin{cases} S'_m(r)\, I_1(\varkappa_{2m+1} r) + R'_m(r)\, K_1(\varkappa_{2m+1} r) = 0 \\ S'_m(r)\, I'_1(\varkappa_{2m+1} r) + R'_m(r)\, K'_1(\varkappa_{2m+1} r) = Q_m(r) . \end{cases}$$

Используя выражение (I5) для определителя этой системы, получаем

$$\begin{aligned} S_m(r) &= \int_0^r r\, Q_m(r)\, K_1(\varkappa_{2m+1} r)\, dr , \\ R_m(r) &= -\int_0^r r\, Q_m(r)\, I_1(\varkappa_{2m+1} r)\, dr \ . \end{aligned} \tag{I7}$$

Если в (I7) подставим выражение для $Q_m(r)$ и проинтегрируем, то окончательно имеем

$$\begin{aligned} & S_m(r) = R_m(r) = 0 \qquad 0 \le r \le R \\ & \left. \begin{aligned} S_m(r) &= -\frac{4K}{cb} K_1(\varkappa_{2m+1} R) \cos(\varkappa_{2m+1} Z) \\ R_m(r) &= \frac{4K}{cb} I_1(\varkappa_{2m+1} R) \cos(\varkappa_{2m+1} Z) \end{aligned} \right\} R \le r \le a . \end{aligned} \tag{I8}$$

Таким образом, общее решение (I2) имеет вид

$$\Psi_m(r) = [C_1 + S_m(r)] \cdot I_1(\varkappa_{2m+1} r) + [C_2 + R_m(r)] \cdot K_1(\varkappa_{2m+1} r) . \tag{I9}$$

Константы интегрирования C_I и C_2 в (I9) находим из условий (I3). Поскольку $K_1(r)$ имеет логарифмическую особенность при $r=0$, полагаем $C_2 = 0$. Из условия $\Psi_m(a)=0$ для C_I находим

$$C_1 = -\frac{1}{I_1(\varkappa_{2m+1} a)} \left[S_m(a) I_1(\varkappa_{2m+1} a) + R_m(a) K_1(\varkappa_{2m+1} a) \right] . \tag{20}$$

Окончательно, учитывая выражения (I8) для функций $S_m(r)$ и $R_m(r)$ и подставляя (20) в I9), получаем функцию A^0 в виде

$$A^0(r,z) = \frac{4K}{bc} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\varkappa_{2n+1} z) \cos(\varkappa_{2n+1} Z) \times \begin{cases} f_n(r) & 0 \le r \le R \\ g_n(r) & R \le r \le a , \end{cases} \tag{2I}$$

где

$$\begin{aligned} f_n(r) &= I_1(\varkappa_{2n+1} r) K_1(\varkappa_{2n+1} R) - h_n(r) , \\ g_n(r) &= K_1(\varkappa_{2n+1} r) I_1(\varkappa_{2n+1} R) - h_n(r) , \\ h_n(r) &= I_1(\varkappa_{2n+1} r) I_1(\varkappa_{2n+1} R) K_1(\varkappa_{2n+1} a) / I_1(\varkappa_{2n+1} a) . \end{aligned}$$

3. Численное исследование магнитной "ямы".

Через H_z обозначим z-компоненту магнитного поля. Известно /3/, что в районе радиуса инжекции частиц в камеру

$$n = -\frac{\partial H_z}{\partial r} \cdot \frac{r}{H_z} \simeq 0.5 .$$

Учтем также, что при вращении частицы совершают бетатронные колебания вокруг равновесной орбиты /3/. Для устойчивости этих колебаний необходимо выполнение неравенств $0 < n < 1$. Если считаем, что в пучке мало частиц, то А ≈ 0 и $\varphi \approx 0$. Тогда из (3) получаем

$$\Phi_0(r,z) = H_0^2 - c^4 m^2 - \frac{c^2}{r^2}\left(M_0 - \frac{e}{c} r A^0\right)^2 .$$

В работе /I/ было введено понятие "ямы" магнитного поля. Это такая замкнутая симметричная относительно оси Or область внутри камеры Δ, для которой выполняются соотношения

$$\Phi_0(r,z) \geq 0 \quad и \quad 0 < n(r,0) < 1. \qquad (22)$$

Положение "ямы" меняется в зависимости от параметров H_0, M_0, от размеров камеры а,в, от расположения витков в ней, т.е. от параметров R и Z, а также от величины тока I. При некоторых значениях этих параметров "яма" может не существовать. На рисунках, приводимых в конце данной работы, показано изменение замкнутой области Ω_0 : $\Phi_0(r,z) \geq 0$ при изменении одного из параметров H_0, M_0, а, в, R, Z и I при фиксированных значениях остальных (а=I6 см, в=6 см, R = 8 см, Z = 4 см, $\Gamma = H_0/mc^2 = 30$, $\mu = M_0/mc =$ = 73.5, θ = 5.26 IO^{-6} I = I а). Так как число n зависит только от а, в, R и Z, то было проведено его численное исследование при изменении расположения витков в камере (см.таблицу).

Из быстро сходящегося ряда (2I) были использованы первые 5 членов разложения.

В заключение автор выражает свою благодарность Е.П.Жидкову и С.Б.Рубину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

I. Е.П.Жидков, И.П.Илиев, С.Б.Рубин, Х.И.Семерджиев, ОИЯИ, Р5-7394, Дубна, I973.

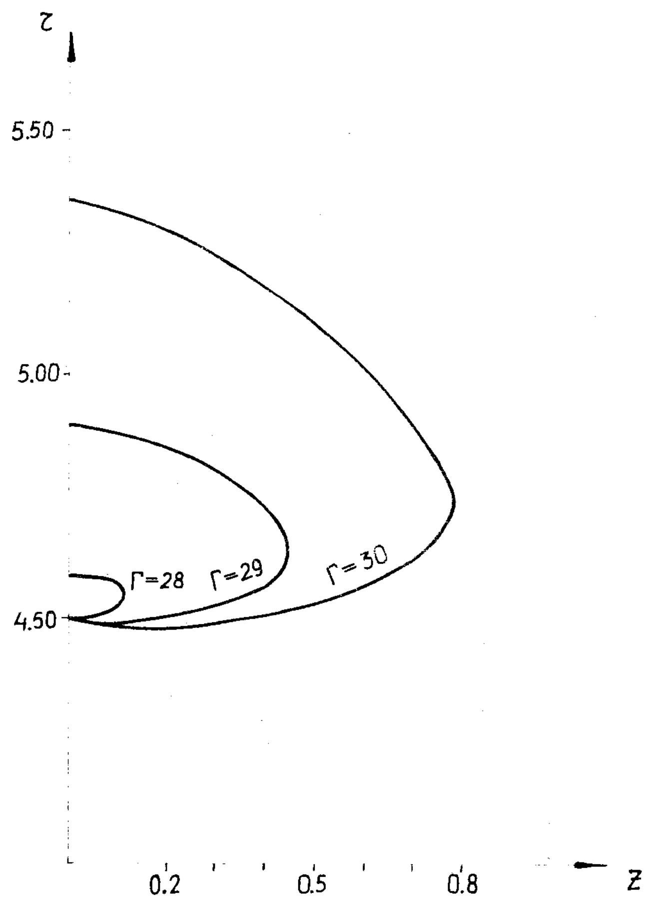
2. И.С.Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов сумм и произведений, "Наука", М., I97I.

3. И.Н.Иванов, А.Б.Кузнецов и др. ЭЧАЯ, т.I.в.2, I97I.

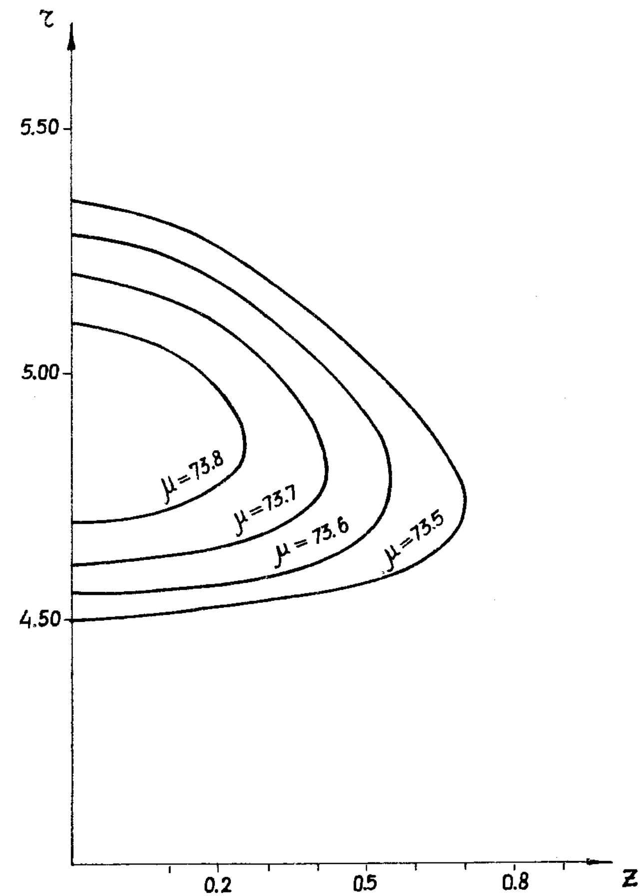
Рукопись поступила в издательский отдел
II декабря I974 года.

Таблица интервалов $[r_1, r_2]$ изменения координаты r, в которых при заданных R и Z выполняется неравенства $0.1 \le n(r,0) \le 0.9$.

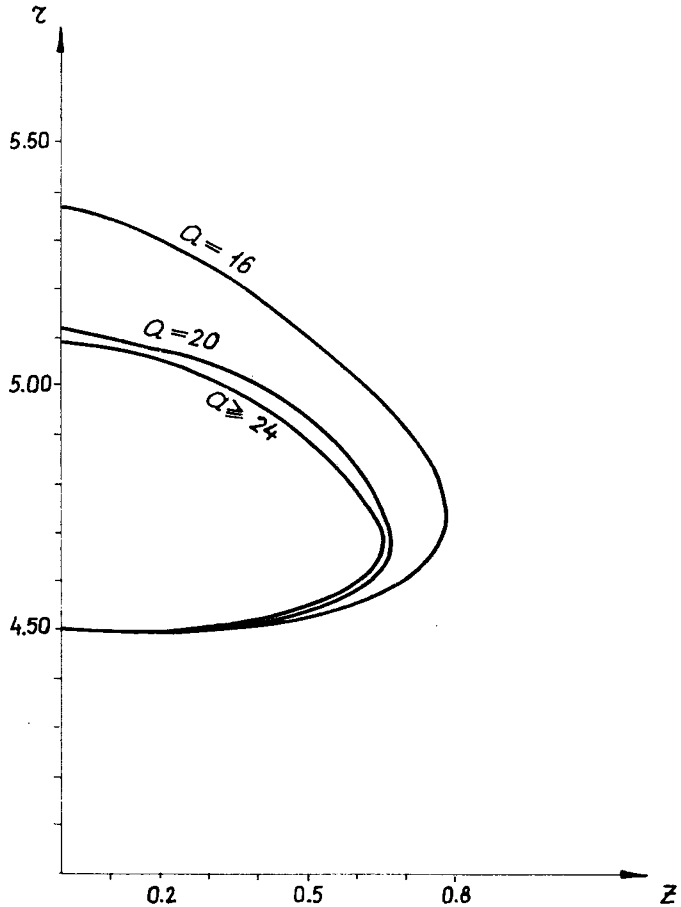
Z	2.5		3.0		3.5		4.0		4.5		5.0	
R	r_1	r_2	r_1	r_2	r_1	r_2	r_1	r_2	r_1	r_2	r_1	r_2
4	I.5	2.8	I.3	2.6	I.2	2.7	I.I	2.7	I.I	2.5	I.I	2.5
5	2.4	3.6	2.0	3.4	I.6	3.4	I.6	3.4	I.4	3.2	I.5	3.2
6	3.4	4.4	3.0	4.2	2.6	4.I	2.4	4.0	2.2	4.0	2.0	3.9
7	4.5	5.3	4.I	5.I	3.7	4.9	3.4	4.9	3.I	4.8	3.0	4.7
8	5.6	6.2	5.2	6.0	4.8	5.8	4.5	5.7	4.3	5.6	4.I	5.5
9	6.6	7.2	6.2	6.9	5.9	6.7	5.6	6.6	5.4	6.4	5.2	6.4
IO	7.6	8.I	7.3	7.8	7.0	7.6	6.7	7.5	6.5	7.3	6.3	7.2
II	8.6	9.0	8.3	8.7	7.9	8.5	7.7	8.3	7.5	8.2	7.3	8.I
I2	9.6	9.9	9.2	9.6	8.9	9.3	8.6	9.I	8.4	9.0	8.2	8.9
I3	IO.5	IO.7	IO.I	IO.4	9.7	IO.I	9.4	9.9	9.2	9.7	9.0	9.6
I4	II.3	II.5	IO.8	II.I	IO.4	IO.7	IO.I	IO.5	9.8	IO.3	9.7	IO.I
I5	II.8	I2.0	II.3	II.5	IO.8	II.2	IO.5	IO.8	IO.3	IO.6	IO.I	IO.5



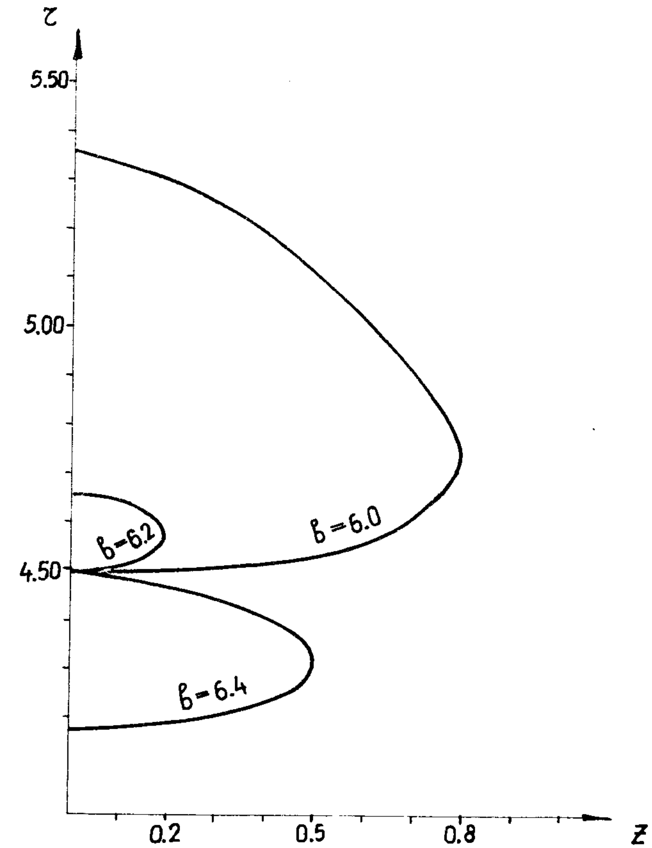
Ω_0 существует при $28 \leq \Gamma \leq 30$.



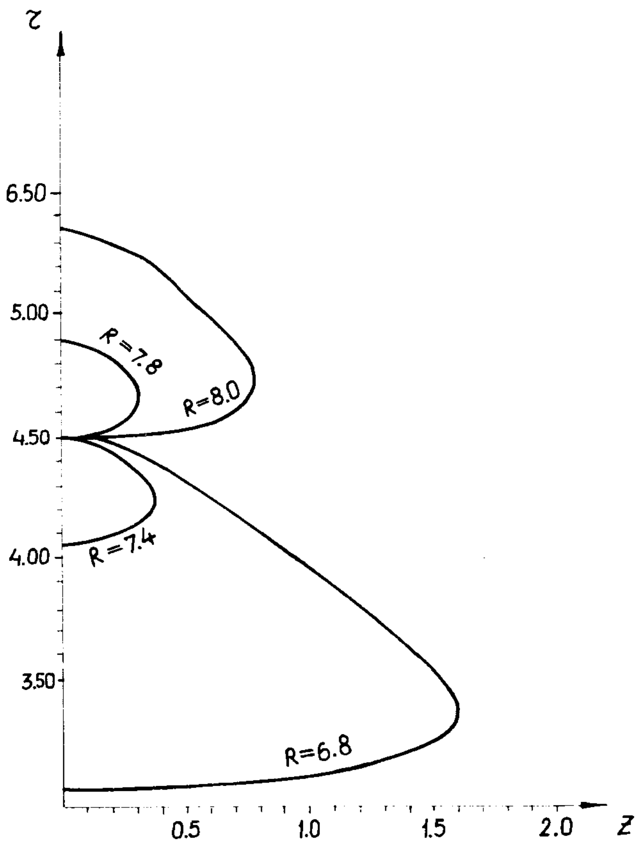
Ω_0 существует при $73.5 \leq \mu \leq 73.8$.



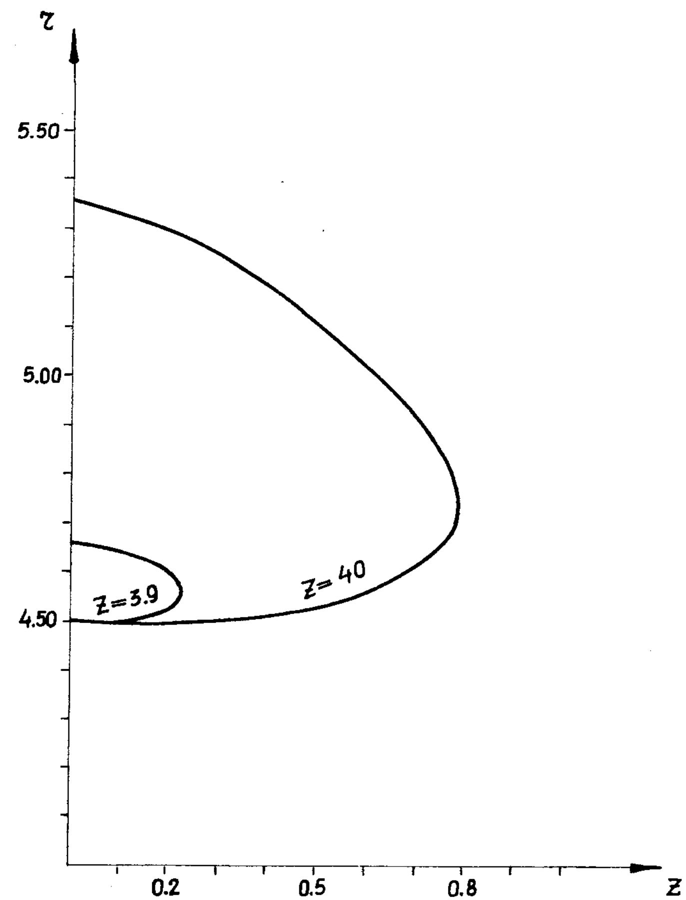
Ω_o существует при $a \geqslant 16$.



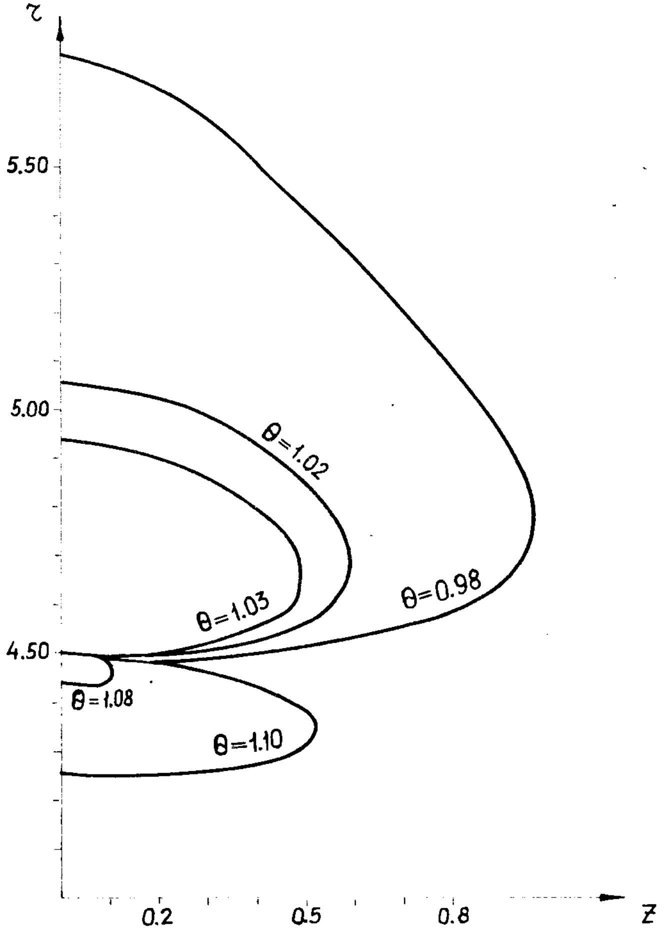
Ω_o существует при $6.0 \leq b \leq 6.6$.



Ω_o существует при $6.8 \leq R \leq 8.0$.



Ω_o существует при $3.9 \leq Z \leq 4.0$.



Ω_0 существует при 0.98 $\leq \theta \leq$ 1.11.