сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

5-84-3

Г.В.Бабиков

ОБОБЩЕННЫЕ ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

1984

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие обобщенной обратной матрицы /о.о.м./ над полем комплексных чисел C введено Муром [1]. О.о.м. A^+ к произвольной $m \times n$-матрице A удовлетворяет свойствам

$$1)\ AA^+A = A, \quad 2)\ A^+AA^+ = A^+, \qquad 3)\ (AA^+)^* = AA^+, \quad 4)\ (A^+A)^* = A^+A, \quad /1/$$

где $(\ )^*$ - оператор эрмитовой сопряженности. Пенроуз [2] показал, что условия /1/ являются характеристическими, т.е. через эти условия может быть дано определение о.о.м.

Эти о.о.м. называют о.о.м Мура-Пенроуза.

Понятие о.о.м. можно распространить на матрицы над некоторыми более общими алгебраическими системами /над полями характеристики $\neq 2$ с инволюцией и над регулярными кольцами с сильной инволюцией/ [3].

Рассматривались матрицы, которые удовлетворяют лишь некоторым из условий /1/: /1/ - обратная, или матрица, удовлетворяющая первому из условий /1/; /2,4/ - обратная, или матрица, удовлетворяющая второму и четвертому из условий /1/, и т.д. Такие матрицы определяются неоднозначно.

Рассматривались также матрицы, однозначно определяемые системой условий, получаемой заменой некоторых условий /1/ другими условиями [4–8].

О.о.м. Мура-Пенроуза нашли большое применение в линейной алгебре в задачах, связанных с решением систем линейных уравнений над полем C. Однако при решении задач, связанных с решением систем линейных неравенств над полем R, их применение было весьма ограниченным. В такого рода задачах, например в задачах линейного программирования, находят применение о.о.м. другого типа [4–8].

В данной статье нас будут интересовать задачи, связанные с решением систем линейных неравенств над частично упорядоченными кольцами. Здесь о.о.м. Мура-Пенроуза не находят применения. Однако подобные задачи появляются сейчас в разных областях, например, в квантовой механике [9]. Рассматриваются и задачи математического программирования с матричными переменными.

Пример. В квантовой статистике равновесная матрица плотности системы ρ_0 определяется как решение следующей задачи:

Найти

$$\max\{-\mathrm{Tr}(\rho \ln\rho)\} \qquad /2/$$

при ограничениях

$$\rho \in \{\rho \mid (\mathrm{Tr}\rho = 1) \wedge (\rho \geq 0) \wedge (\mathrm{Tr}(\rho(X_\ell - a_\ell)) = 0\}, \quad \ell = 1,\dots,m. \qquad /3/$$

Здесь a_ℓ - измеряемая физическая величина /энергия, импульс, число частиц, спин электрона и т.д./, X_ℓ - соответствующий оператор. Постоянная Больцмана для простоты приравнена к единице .

В этой задаче значения оптимизируемой функции и функций ограничений принадлежат полю комплексных чисел, а аргумент ρ - некоторому кольцу бесконечных матриц над этим полем.

Переформулируем задачу так, чтобы и значения и аргументы функций принадлежали некоторому кольцу матриц над полем комплексных чисел. Пусть E - единичная матрица.

Имеем $\mathrm{Tr}\rho \cdot E = \sum_{i,j} \epsilon_{ij}\,\rho\epsilon_{ji}$, где ϵ_{ij} - элементарная матрица с элементом 1 на пересечении i -ой строки и j-го столбца.

Тогда задачу можно записать так:

Найти $\max\{-\sum_{i,j} \epsilon_{ij}\,\rho \ln\rho\, \epsilon_{ji}\}$ при ограничениях

$$\rho \in \{\rho \mid (\sum_{i,j} \epsilon_{ij}\,\rho\epsilon_{ji} = E) \wedge (\rho \geq 0) \wedge$$

$$\wedge (\sum_{i,j} \epsilon_{ij}\,\rho(X_\ell - a_\ell E)\epsilon_{ji} = 0), \ \ell = 1,\dots,m\}.$$

Это задача с линейными ограничениями. Поэтому перейдем к вопросам обратимости матриц с более общей точки зрения и рассмотрим некоторые приложения.

Для этого понадобятся некоторые новые понятия.

2. ДЕСИГНАНТЫ

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}(K)$ прямоугольных матриц над K, где K - ассоциативное кольцо с единицей, и пусть $\mathfrak{M}^{mn}(K)$ обозначает подмножество $m\times n$-матриц. Введем на $\mathfrak{M}(K)$ частичную функцию, называемую десигнантом [10].

Определение 1. Десигнантом 1x1-матрицы $(a_{11}) \in \mathfrak{M}^{11}(K)$ назовем элемент $\Delta_1 = a_{11} \in K$. Десигнантом $n\times n$ -матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^{nn}(K) \quad \text{назовем элемент}$$

$$\Delta_n = -\Delta_{n-2}(n,\ n-1)\Delta_{n-1}^{-1}\Delta_{n-2}(n-1,\ n) + \Delta_{n-2}(n,\ n)$$

при предположении существования и обратимости в K десигнантов $\Delta_k\ (k = 1,\dots, n-1)$, причем $\Delta_k(s,t)$ обозначает десигнант подматрицы, стоящей на пересечении строк с номерами $1, \dots, k, s$ и столбцов с номерами $1, \dots, k, t$ и $\Delta_0(s,t) = a_{st}$.

Определение 2. Назовем матрицу $A \in \mathfrak{M}^{mn}(K)$ матрицей с r -цепочкой десигнантов, если десигнанты $\Delta_k\ (k = 1,\dots,r)$ существуют и обратимы в K, а все десигнанты порядка $r+1$ равны нулю.

Пусть матрица A становится матрицей с r -цепочкой десигнантов после некоторой перестановки /перенумерации/ $\mathcal{P}$ ее строк и столбцов. Полученную матрицу обозначим $A\mathcal{P}$. В дальнейшем для удобства, если перестановка $\mathcal{P}$ известна, то обозначение $A\mathcal{P}$ будем заменять на A .

Теорема 1 [10]. Всякая матрица $A \in \mathfrak{M}^{mn}(K)$ с r_A -цепочкой десигнантов для любых целых p_A, $q_A \leq r_A$ разлагается в произведение нижней унитреугольной $m\times p_A$-матрицы, диагональной $p_A\times q_A$-матрицы и верхней унитреугольной $q_A\times n$ -матрицы:

$$A = V(v_{ji}) \cdot D(d_{ii}) \cdot U(u_{ij}), \qquad /4/$$

где $d_{ii} = \Delta_i$, $v_{ji} = \Delta_{i-1}(j,i) \cdot \Delta_i^{-1}$, $u_{ij} = \Delta_i^{-1} \cdot \Delta_{i-1}(i,j)$ в случае $i \leq r_A$ и $d_{ii} = 0$, v_{ji}, u_{ij} - произвольные элементы из K в случае $i > r_A$.

На основе понятия детерминанта матрицы над кольцом K [11] также можно, хотя и более громоздко, сформулировать приведенный результат.

3. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

Пусть K - ассоциативное кольцо с единицей, регулярное и с сильной инволюцией(т.е. 1/ для каждого элемента $a \in K$ существует элемент $a^- \in K$ такой, что $aa^-a = a$ и 2/ определен инволютивный антиавтоморфизм( )*, обладающий свойством: из $\sum_{i=1}^{n} a_i a_i^* = 0$ следует $\forall i(a_i = 0)$).

Для матрицы $A \in \mathfrak{M}^{mn}(K)$ введем систему сопровождений для строк и столбцов, определяемую векторами $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in K^m$ и $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_n)^T \in K^n$, $(\ )^T$ - оператор транспонирования /если K - поле действительных чисел и λ , $\mu > 0$, то векторы сопровождений называются векторами предпочтений или весов [7-8]/. Обозначим A^* матрицу, полученную из матрицы A транспонированием и инволюцией ее элементов.

Определение 3. Универсальной обратной матрицей /у.о.м./ $A^-_{\lambda\mu}$ к матрице $A \in \mathfrak{M}^{mn}(K)$ с системой сопровождения λ и μ будем называть матрицу

$$A^{-}_{\lambda\mu} = U^*_c \, (V^*_c \, C \, U^*_c)^{-1} V^*_c \, L, \qquad p_c = q_c = r_c, \qquad /5/$$

где $C = LAMU^*_M \, (V^*_M \, MU^*_M)^{-1} V^*_M, \quad p_M = q_M = r_M,$

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Выделим два частных случая:

$$A^{-}_{(1,\ldots,1)^T,\,(1,\ldots,1)^T} = U^*_A \, (V^*_A \, AU^*_A)^{-1} V^*_A = A^+$$

$$A^{-}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{r},0,\ldots 0)^T,\,(\underbrace{1,\ldots,1}_{r},0,\ldots,0)^T} = A^{(-1)}. \qquad /6/$$

Формулы /6/ могут служить конструктивными определениями матриц A^+ и $A^{(-1)}$.

Матрица $A^{(-1)}$ может быть определена также следующим образом: в разложении /4/ возьмем $p_A = m$, $q_A = n$. Тогда[11]

$$A^{(-1)} = U_A^{-1} D_A^+ V_A^{-1}, \qquad /7/$$

где D^+ - диагональная $n{\times}m$-матрица с элементами

$$d^+_{ii} = \begin{cases} d^{-1}_{ii}, & i \le r, \\ 0, & i > r. \end{cases} \qquad /8/$$

Матрица $A^{(-1)}$ к матрице A с r-цепочкой десигнантов над произвольным /не обязательно регулярным и с инволюцией/ кольцом K с единицей определяется однозначно и удовлетворяет как первому и второму условиям /1/, так и условиям: $AA^{(-1)}$ - нижняя, а $A^{(-1)}A$ - верхняя унитреугольные матрицы. Эти свойства предопределяют выбор этих матриц в задачах, связанных с решением систем линейных неравенств[12].

4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Рассмотрим систему векторов

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \qquad /9/$$

над кольцом K.

Определение 4. Система векторов /9/ называется слева линейно зависимой, если хотя бы один из векторов этой системы является левосторонней комбинацией остальных векторов.

Система векторов /9/ называется слева линейно независимой, если соотношение $k_1 a_1 + \ldots\ldots + k_n a_n = 0$, $k_i \in K$ выполняется только в случае $k_1 = \ldots\ldots = k_n = 0$.

Определение 5. Будем говорить, что система векторов /9/ удовлетворяет условию Хаара, если существует натуральное число r такое, что всякая ее подсистема из r векторов слева линейно независима, а всякая ее подсистема из $r+1$ векторов слева линейно зависима.

Исследование систем линейных неравенств или уравнений значительно облегчается, если левые части удовлетворяют условию Хаара.

5. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА НАД ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМ КОЛЬЦОМ

Применим введенные понятия к решению систем линейных неравенств. Пусть дана система неравенств в матричной форме

$$Ax \le b, \qquad /10/$$

где A - $m{\times}n$-матрица с r-цепочкой десигнантов над K ассоциативным частично-упорядоченным кольцом K с единицей, $b \in K^n$.

Очевидно, если система уравнений

$$Ax = b \qquad /11/$$

совместна и x_0 - ее некоторое частное решение, а z - общее решение системы неравенств

$$Az \le 0, \qquad /12/$$

то общее решение системы /10/ представимо в форме

$$x = x_0 + z. \qquad /13/$$

Частным решением совместной системы /11/ будет, например, $A^{(-1)}b$. Т.о.,если система /11/ имеет решение, то вопрос о решении системы /10/ сводится к решению системы /12/.

Если K - произвольное поле, то решение системы /12/ выражается через векторы фундаментальной системы решений[13]. Этот результат можно распространить и на случай, когда K - произвольное тело[14]. В общем же случае, когда K - кольцо, этот вопрос решается сложнее.

Определение 6 [13,14]. Решение системы /12/ называется фундаментальным /ф.р./, если существует слева линейно независимая подсистема r неравенств системы /12/ такая, что данное решение обращает в нуль левые части ровно $r-1$ неравенств этой подсистемы. Два ф.р. называются существенно различными, если не существует $r-1$ слева линейно независимых неравенств таких, что оба ф.р. обращают в нуль их левые части. Максимальная система попарно существенно различных ф.р. называется фундаментальной системой решений /ф.с.р./.

Рассмотрим вопрос о снижении размерности системы и о связи решений исходной и новой систем неравенств.

Теорема 2 [14]. Две системы линейных неравенств: система /10/ и система

$$\tilde{A}y \le \tilde{b}, \quad y \ge 0, \qquad /14/$$

где

$$\tilde{A} = -(O_{m-r,r}, E_{m-r})AA^{(-1)}\begin{pmatrix} E_r \\ O_{m-r,r} \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = (\tilde{A}, E_{m-r})b \qquad /15/$$

одновременно совместны или несовместны.

Общее решение системы /10/ может быть записано в форме

$$x = A^{(-1)}b - A^{(-1)}\begin{pmatrix} E_r \\ O_{m-r,r} \end{pmatrix} y + (E - A^{(-1)}A)\begin{pmatrix} O_{r,n-r} \\ E_{n-r} \end{pmatrix} w, \qquad /16/$$

где y - общее решение системы /14/, а w - произвольный вектор из K^{n-r}. /Здесь E_s означает единичную $s{\times}s$ -матрицу, O_{ij} - нулевую $i{\times}j$ -матрицу/.

Определение 7. Систему неравенств /14/ будем называть производной системой к системе неравенств /10/.

Предположим для производной системы существование ф.с.р., через которую линейно выражаются другие решения.

Теорема 3. Пусть матрица $\tilde{A}$ производной системы неравенств к системе неравенств /10/ есть матрица с r_1 -цепочкой десигнантов; произвольная система имеет ф.с.р., вектора которой являются столбцами матрицы $\tilde{Q}$ и $E_r - \tilde{A}^{(1)}\tilde{A} \ge 0$. Тогда ф.с.р. системы неравенств /10/ может быть определена множеством столбцов матрицы

$$-A^{(-1)}\begin{pmatrix} E_r \\ O_{m-r,r} \end{pmatrix}(\tilde{Q}, (E - \tilde{A}^{(-1)}A))\begin{pmatrix} O_{r_1,r-r_1} \\ E_{r-r_1} \end{pmatrix} \qquad /17/$$

а общее решение системы /12/ имеет вид

$$x = -A^{(-1)}\begin{pmatrix} E_r \\ O_{m-r,r} \end{pmatrix}(\tilde{Q}, (E_r - \tilde{A}^{(-1)}\tilde{A}))\begin{pmatrix} O_{r_1,r-r_1} \\ E_{r-r_1} \end{pmatrix}\alpha + (E_n - A^{(-1)}A)\begin{pmatrix} O_{r,n-r} \\ E_{n-r} \end{pmatrix} w, \qquad /18/$$

где α - произвольный вектор с неотрицательными компоненами соответствующей размерности, а w - произвольный вектор из K^{n-r}.

Доказательство. Общее решение системы /12/ имеет вид /16/. Далее,

$$y = \tilde{Q}\delta + (E_r - \tilde{A}^{(-1)}\tilde{A})\begin{pmatrix} O_{r_1,r-r_1} \\ E_{r-r_1} \end{pmatrix} v, \qquad /19/$$

где v - произвольный вектор с неотрицательными компонентами размерности, равной числу столбцов матрицы Q, $v \in K^{r-r_1}$. Выделим некоторое ф.р. $q \in \tilde{Q}$.

Предположим без потери общности, что минор порядка r_1, стоящий в верхнем углу матрицы $\tilde{A}$ и отличный от нуля, выделяет и те строки, $r_1 - 1$, из которых определяют левые части неравенств, которые данное ф.р. q обращает в нуль.

Из сопоставления формул /19/ и /16/ замечаем, что ф.с.р. может быть выбрана так, что в матрице $\tilde{Q}$ последние $r - r_1$ строк будут нулевыми. Тогда вектор v будет произвольным вектором из $(K^{r-r_1})^+$ и

$$-A^{(-1)}\begin{pmatrix} E_r \\ O_{m-r,r} \end{pmatrix} y = -A^{(-1)}\begin{pmatrix} E_r \\ O_{m-r,r} \end{pmatrix}\left(\tilde{Q}\delta + (E_r - \tilde{A}^{(-1)}\tilde{A})\begin{pmatrix} O_{r_1,r-r_1} \\ E_{r-r_1} \end{pmatrix} v\right) =$$

$$= -A^{(-1)}\begin{pmatrix} E_r \\ O_{m-r,r} \end{pmatrix}\left(\tilde{Q}, (E_r - \tilde{A}^{(-1)}\tilde{A})\begin{pmatrix} O_{r_1,r-r_1} \\ E_{r-r_1} \end{pmatrix}\right)\alpha,$$

где $\alpha = (\delta^T, v^T)^T$.

Рассмотрим матрицу $-AA^{(-1)}\begin{pmatrix} E_r \\ O_{m-r,r} \end{pmatrix}\tilde{Q}$.

В этой матрице каждый столбец среди последних $m - r$ элементов содержит хотя бы $r_1 - 1$ нулей и хотя бы один отрицательный элемент, что следует из определения ф.р. Далее среди первых r элементов в каждом столбце содержится $r - r_1$ нулей, т.к. подматрица матрицы $AA^{(-1)}$, расположенная на пересечении строк с номерами $r_1+1, \ldots, r$ и столбцов с номерами $1, \ldots, r_1$, является, как было отмечено выше, нулевой.

Рассмотрим подматрицу матрицы $-AA^{(-1)}\begin{pmatrix} E_r \\ O_{m-r,r} \end{pmatrix}\vec{Q}$, состоящую из строк с номерами $r_1+1, \ldots, r$ и r_1 ранее выделенных строк среди последних $m-r$ строк. Т.к. все выделенные r строк слева линейно независимы, то $-AA^{(-1)}\begin{pmatrix} E_r \\ O_{m-r,r} \end{pmatrix}q$ есть ф.р. системы /12/. Действительно, среди r выделенных слева линейно независимых левых частей системы /12/ $r-1$ из них $(r-1=(r-r_1)+(r_1-1))$ обращается в нуль решение $A^{(-1)}\begin{pmatrix} E_r \\ O_{m-r,r} \end{pmatrix}q$.

Рассмотрим матрицу

$$P=-AA^{(-1)}\begin{pmatrix} E_r \\ \\ O_{m-r,r} \end{pmatrix}(E_r-\vec{A}^{(-1)}\vec{A})\begin{pmatrix} O_{r_1,r-r_1} \\ \\ E_{r-r_1} \end{pmatrix}. \qquad /20/$$

В ней последние $m-r$ строк нулевые.

Действительно,

$$P=-\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vec{A} & \end{pmatrix}(E_r-\vec{A}^{(-1)}\vec{A})\begin{pmatrix} O_{r_1,r-r_1} \\ E_{r-r_1} \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} E_r-\vec{A}^{(-1)}\vec{A} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \vec{A}-\vec{A}\vec{A}^{(-1)}\vec{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O_{r_1,r-r_1} \\ E_{r-r_1} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} E_r-\vec{A}^{(-1)}\vec{A} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ O_{m-r,r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O_{r_1,r-r_1} \\ E_{r-r_1} \end{pmatrix}.$$

Далее, в подматрице, составленной из первых r строк матрицы P /20/ /слева линейно независимых/, каждый столбец имеет, по крайней мере, $r-r_1-1$ нулей и, по крайней мере, один элемент, отличный от нуля. Это следует из того, что в подматрице $E_r - \vec{A}_r^{(-1)}\vec{A}_r$ на пересечении строк и столбцов с номерами $r_1+1, \ldots, r$ стоит единичная матрица.

Так как $(m-r)+(r-r_1-1)=m-r_1-1\geq(r+r_1)-r_1-1=r-1$ и так как последние $r-r_1$ строк среди первых r строк и r_1 строк среди последних $m-r$ строк матрицы P все вместе слева линейно независимы, то столбцы матрицы P являются ф.р. Таким образом, в каждом столбце матрицы AS, где S - матрица /17/, не менее $r-1$ нулей и не менее одного отрицательного элемента. Теорема доказана. Формула /18/ показывает, что среди столбцов матрицы /17/ находятся все векторы ф.с.р.

Пример. Рассмотрим задачу над $\mathfrak{M}^{22}(R)$.
Найти

$$\max\{f(x)=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}x_3\} \qquad /21/$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}x_3\leq\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}x_3\leq\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -13 & 6 \end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}x_3\leq\begin{pmatrix} -3 & 16 \\ -13 & 10 \end{pmatrix},$$

$$x\geq\left(\begin{pmatrix} -16 & 0 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)^T. \qquad /22/$$

Решение соответствующей /22/ системы уравнений будет

$$A^{(-1)}b+(E_3-A^{-1}A)w=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 31 \\ 0 & -21 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 31 \\ -9 & 20 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}w,$$

где A - матрица системы /22/.

Приняв $w=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, получаем частное решение

$$x^0=\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)^T.$$

Общее решение системы неравенств /22/ будет $x=x^0+z$, где z - общее решение системы однородных неравенств, соответствующей системе /22/.

Используя понятие десигнанта, по формулам /4/ и /7/ находим

$$A^{(-1)} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} & O_{11} \\ \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & O_{11} \\ O_{11} & O_{11} & O_{11} \end{pmatrix} \qquad AA^{(-1)} = \begin{pmatrix} E_2 \\ O_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & O_{11} \\ O_{11} & E_1 \\ \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Поэтому матрица производной системы неравенств /14/ будет

$$\tilde{A} = \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right).$$

При перенумерации столбцов по правилу $i \to 3 - i$ получаем

$$\tilde{A}^{(-1)} = \begin{pmatrix} O_{11} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Т.к. $\tilde{A}\tilde{A}^{(-1)} = E_1$, то (с точностью до положительных множителей и слагаемых вида $(E_2 - \tilde{A}^{(-1)}\tilde{A})v$) ф.с.р. производной системы будет состоять из столбцов матрицы $-\tilde{A}^{(-1)}$ или матрицы $\begin{pmatrix} O_{11} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Далее,

$$E_2 - \tilde{A}^{(-1)}\tilde{A} = \begin{pmatrix} E_1 & O_{11} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & O_{11} \end{pmatrix} \geq O_{22}.$$

Поэтому на основании теоремы 3, ф.с.р. исходной системы /12/ - это множество столбцов матрицы

$$Q = -A^{(-1)}\begin{pmatrix} E_2 \\ O_{12} \end{pmatrix}(\tilde{Q}, (E_2 - \tilde{A}^{(-1)}\tilde{A})\begin{pmatrix} O_{11} \\ E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 28 \\ -1 & -17 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \\ O_{11} & O_{11} \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу $T = (E_n - A^{(-1)}A)\begin{pmatrix} O_{r,n-r} \\ E_{n-2} \end{pmatrix}$ /см. /18//

для рассматриваемой задачи:

$$T = (E_3 - A^{(-1)}A)\begin{pmatrix} O_{21} \\ E_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 14 & 31 \\ -9 & 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^T.$$

Значит, общее решение системы /22/ будет

$$x = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 28 \\ -1 & -17 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 31 \\ -9 & 20 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} w.$$

Подставив это выражение в целевую функцию /21/, получаем

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 21 \end{pmatrix}\delta_1 + \begin{pmatrix} 1 & 39 \\ 3 & 79 \end{pmatrix}\delta_2\right) - \tag{23}$$

$$-\left(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\delta_1 + \begin{pmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}\delta_2\right) - \begin{pmatrix} 24 & 60 \\ 44 & 92 \end{pmatrix} w,$$

где $\delta_1, \delta_2 \in \mathfrak{M}^{22}(R^+)$, $w \in \mathfrak{M}^{22}(R)$.

Задача /21/ сводится, таким образом, к более простой задаче, к задаче линейного программирования над R, в которой 12 неизвестных /элемент матриц δ_1, δ_2 и w /, на 8 из которых наложено условие неотрицательности. Рассматриваемая задача решается просто. Из последнего условия, наложенного на вектор x /см./22//, находим для третьей компоненты

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \geq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ где } w = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $w_{11} \geq 1$, $w_{12}, w_{21}, w_{22} \geq 0$.

Из /23/ находим, что для максимизации $f(x)$ необходимо взять $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Также находим, что $\delta_1 = \delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Итак,

$$\max f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & 60 \\ 44 & 92 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 3 \\ -43 & 1 \end{pmatrix}$$

достигается при $x = x^*$, где

$$x^* = \left(\begin{pmatrix} -13 & 0 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)^T .$$

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ О.О.М. ДЛЯ МАТРИЦ, БЛИЗКИХ К ИСХОДНОЙ

В ряде случаев требуется вычислять о.о.м. для матриц вида $A+\Delta$, мало отличающихся от исходной матрицы A, для которой о.о.м. $A^{(-1)}$ уже найдена. Это можно иногда сделать без повторного псевдообращения.

Пусть дана $m \times n$-матрица $A = (a_{ij})$ с r-цепочкой десигнантов над кольцом $\mathfrak{M}^{pp}(C)$ $p \times p$-матриц над полем комплексных чисел или телом кватернионов C и $r = \min\{m, n\}$.

Пусть далее,

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a^{ij}_{11} & \dots\dots & a^{ij}_{1p} \\ & \dots\dots\dots & \\ a^{ij}_{p1} & \dots\dots & a^{ij}_{pp} \end{pmatrix}$$ – ее произвольный элемент, а

$$\bar{a}_{ij} = \begin{pmatrix} a^{-ij}_{11} & \dots\dots & a^{-ij}_{1p} \\ & \dots\dots\dots & \\ a^{-ij}_{p1} & \dots\dots & a^{-ij}_{pp} \end{pmatrix}$$ – произвольный элемент матрицы $A^{(-1)}$.

Обозначим $|a_{ij}| = \max\limits_{\alpha,\beta} \sqrt{\|a^{ij}_{\alpha\beta}\|}$, где $\|a^{ij}_{\alpha\beta}\|$ – норма кватерниона /или квадрат модуля комплексного числа/ $a^{ij}_{\alpha\beta}$.

<u>Теорема 4</u>. Для любой $m \times n$-матрицы $\Delta = (\delta_{ij})$ над $\mathfrak{M}^{pp}(C)$ с условием

$$\max_{i,j}\{|\delta_{ij}|\} < \frac{1}{m \cdot n \cdot p^2 \cdot \max\limits_{i,j}\{|\bar{a}_{ij}|\}}$$

матричный ряд

$$\phi(\Delta) = A^{(-1)} - A^{(-1)}\Delta A^{(-1)} + A^{(-1)}\Delta A^{(-1)}\Delta A^{(-1)} - \dots\dots \qquad /24/$$

сходится и его сумма равна $(A+\Delta)^{(-1)}$.

<u>Доказательство</u>. Обозначим

$$\max_{i,j}\{|\bar{a}_{ij}|\} = \max_{\alpha,\beta,i,j} \sqrt{\|a^{-ij}_{\alpha\beta}\|} = a, \qquad \max_{i,j}\{|\delta_{ij}|\} = \delta.$$

Матрицу, все элементы которой равны a, будем обозначать (a).

Рассмотрим ряд

$$((a)) + ((a))\,((\delta))\,((a)) + ((a))\,((\delta))\,((a))\,((\delta))\,((a)) + \dots\,, \qquad /25/$$

где (a), (δ) – $p \times p$-матрицы, $((a))$ – $m \times n$-матрица, $((\delta))$ – $n \times m$-матрица.

Если ряд /25/ сходится, то и ряд /24/ сходится. Ряд /25/ представим в виде

$$((a) + mn(a)(\delta)(a) + m^2n^2(a)(\delta)(a)(\delta)(a) + \dots) =$$

$$= a((1 + mn\,p^2 a\delta + m^2 n^2 p^4 a^2 \delta^2 + \dots\dots)).$$

Этот ряд сходится, если $mnp^2 a\delta < 1$ или $\delta < 1/mnp^2 a$.

Таким образом, ряд /24/ при выполнении условий теоремы 4 сходится.

Далее, если $m \le n$, то $(A+\Delta)\,\phi(\Delta) = E$, а если $m \ge n$, то $\phi(\Delta)(A+\Delta) = E$.

Окончательно получаем $(A+\Delta)^{(-1)} = \phi(\Delta)$.

<u>Пример</u>. Рассмотрим матрицу

$$A+\Delta = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$\epsilon < 1$.

На основании /24/

$$(A+\Delta)^{(-1)}=$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^2 \\ 0 & -\epsilon^2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^2 \\ 0 & -\epsilon^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^3 \\ 0 & \epsilon^3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^3 \\ 0 & -\epsilon^3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{1+\epsilon^2} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\epsilon^2 & \epsilon^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1+\epsilon^2 & \epsilon^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Moore E.H. Bull. Amer. Math. Soc., 1920, vol.26.
2. Penrose R. Proc.Camvridje Philos.Söc., 1955, vol.51.
3. Hartwig R.E. Arch.Rat.Math.Anal., 1977, vol.61.
4. Бабиков Г.В. В кн.: Методы для нестационарных задач математического программирования. УНЦ АН СССР, Свердловск, 1979.
5. Бабиков Г.В. В кн.: Динамическое управление. Всесоюз.конф., Свердловск, 1979.
6. Бабиков Г.В. В кн.: Методы оптимизации и распознавания образов в задачах планирования. УНЦ АН СССР, Свердловск, 1980.
7. Бабиков Г.В. В кн.: Методы математического программирования и их программное обеспечение. УНЦ АН СССР, Свердловск, 1981.
8. Бабиков Г.В. В кн.: Несобственные задачи оптимизации. УНЦ АН СССР, Свердловск, 1982.
9. Scott G.H., Jefferson T.R. J.Math.Anal.Appl., 1977, vol.58.
10. Бабиков Г.В. ДАН СССР, 1982, т.267, вып.5.
11. Бабиков Г.В. В кн.: XIV Всесоюз.алгебр.конф. СО АН СССР, Новосибирск, 1977.
12. Бабиков Г.В. В кн.: Методы математического программирования и приложения. УНЦ АН СССР, Свердловск, 1979.
13. Черников С.Н. Линейные неравенства. "Наука", М., 1966.
14. Бабиков Г.В. В кн.: Несобственные модели математического программирования. УНЦ АН СССР, Свердловск, ВИНИТИ, 3 июля 1980, № 2824-80 Деп.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 марта 1984 года

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Бабиков Г.В. 5-84-3
Обобщенные обратные матрицы и их приложения в линейной алгебре и математическом программировании

Рассматривается применение обобщенных обратных матриц в задачах, связанных с решением систем линейных неравенств /в линейной алгебре, математическом программировании/ над частично упорядоченным ассоциативным кольцом K с единицей. Дан алгоритм для нахождения фундаментальной системы решений однородной системы односторонних линейных неравенств над K. Предложен алгоритм для быстрого вычисления некоторых обобщенных обратных матриц, близких к исходной матрице.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Babikov G.V. 5-84-3
The Generalized Inverse Matrices and Their Applications in the Linear Algebra and Linear Programming

The generalized inverse matrices are used in problems connected with solving the linear inequalities over the partially ordered associative ring K with unity. An algorithm for constructing the fundamental system of solutions of the homogeneous linear inequality system over K is given. The method for rapid calculations of some generalized inverse matrices similar to the original matrix is proposed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984