



**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

927/84

13/II-84

5-83-756

**В.М.Изыюров, С.В.Мухин, В.Б.Радоманов**

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИСХОДНЫХ СПЕКТРОВ  
С УЧЕТОМ АППАРАТУРНОЙ ФУНКЦИИ ПРИБОРА**

**1983**

1. При анализе экспериментальных данных часто возникает проблема восстановления исходного спектра  $f$  по измеряемому  $s$ , который связан с исходным спектром аппаратурной функцией измерительного прибора  $\phi$ . Математическая задача сводится к решению интегрального уравнения типа свертки /1/:

$$s(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi - t) f(t) dt, \quad /1/$$

где функция размытия  $\phi$  - ядро свертки.

Конкретные задачи, возникающие на практике, вследствие дискретности измерений приводят к задаче решения систем линейных уравнений

$$A\vec{X} = \vec{Z} \quad /2/$$

со специфической циклической матрицей /циркулянт/  $A = [a(i-j)]$ , соответствующей дискретному представлению ядра свертки, элементы которой вдоль диагоналей равны между собой. Правая часть /2/,  $\vec{Z}$ , т.е. экспериментальный материал, рассматривается как вектор, элементы которого определены со статистическими погрешностями  $\{\Delta z_i\}_1^n$ , и функция размытия часто в реальных условиях известна неточно. Из-за указанных выше неопределенностей такие задачи относятся к классу математически некорректных.

Метод наименьших квадратов, широко применяемый для решения этих задач, заключается в нахождении минимума функционала:

$$\sigma = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - z_i}{\Delta z_i} \right)^2, \quad /3/$$

где  $x_j$  - искомые параметры. Сумму /3/ можно записать в форме

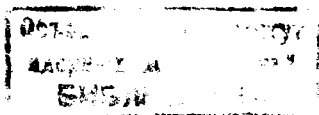
$$\sigma = \sum_i (\sum_j h_{ij} x_j - y_i)^2, \quad /3'/$$

где  $h_{ij} = a_{ij} / \Delta z_i$ ,  $y_i = z_i / \Delta z_i$ , или в векторной форме:

$$\sigma = (H\vec{X} - \vec{Y})^T (H\vec{X} - \vec{Y}). \quad /3''/$$

Решение задачи /3/ находим в виде

$$\vec{X} = (H^T H)^{-1} H^T \vec{Y}. \quad /4/$$



Решение таких задач традиционным методом наименьших квадратов во многих встречающихся в практике случаях неустойчиво относительно вариаций вектора  $Z$ .

Для получения устойчивого решения обычно используют методы регуляризации по Тихонову <sup>/2,3/</sup> или Винеру <sup>/4/</sup>. Регуляризация сводится к добавлению в сумму <sup>/3/</sup> дополнительных слагаемых, называемых стабилизатором.

Трудности при решении возникают в тех случаях, когда погрешности спектра  $\Delta Z$  сравнимы с величиной поступающего сигнала  $Z$ :  $|\Delta Z| \geq 0,1 \times |Z|$ , <sup>/2,3/</sup> и ширины частотных диапазонов фурье-спектров полезного сигнала  $Z_0$  и шумового  $\Delta Z$  ( $Z = Z_0 + \Delta Z$ ) сравнимы, так что указанные спектры перекрываются в значительной своей части и не могут быть разделены <sup>/4/</sup>. В этих случаях методы регуляризации не дают эффекта стабилизации решения.

Во многих случаях устойчивость решения может быть достигнута и без регуляризации при введении в линейную задачу условия неотрицательности сигнала:

$$x_i \geq 0.$$

/5/

Это условие естественно возникает в реальных задачах при обработке экспериментальных данных, когда стремятся избежать нефизического результата.

Эффективность рассматриваемого метода демонстрируется на конкретном примере, возникшем при решении задачи восстановления исходного спектра в реальном эксперименте <sup>/5/</sup>. В этом эксперименте частицы отдачи, вылетающие из мишени при прохождении через нее релятивистских частиц, регистрировались телескопом из двух полупроводниковых детекторов по потерям энергии  $[\Delta E_1, \Delta E_2]$  при прохождении частиц через детекторы. Флуктуации потерь энергии и шумы регистрирующей электронной аппаратуры, обладающей конечным разрешением, определили аппаратную функцию размытия. Регистрируемый спектр представлял собой двумерное распределение /см. рис.1/, в котором исходный спектр, сосредоточенный вдоль "теоретических" кривых /пунктирные линии на рис.1/, был размыт по обеим осям, а функции размытия - колоколообразные функции <sup>/6/</sup> с приблизительно известным соотношением полуширин 1:3.

Представленное на рис.1 распределение имеет ряд характерных областей. Номером 3 обозначены участки распределений для частиц, в данном случае протонов и дейтронов, остановившихся во втором детекторе, номером 4 - частицы, прошедшие насквозь оба детектора. Области 1 и 2 относятся к частицам, прошедшим через коллиimator и соответственно остановившимся или не остановившимся во втором детекторе. В последующем анализе <sup>/5/</sup> использовалась только область 3, а все остальное относилось к фону. Однако и эта область не вся могла быть использована, поскольку частицы, которые останавливались вблизи конца второго детектора, невозможно было отличить от тех, которые проходили через него /об-

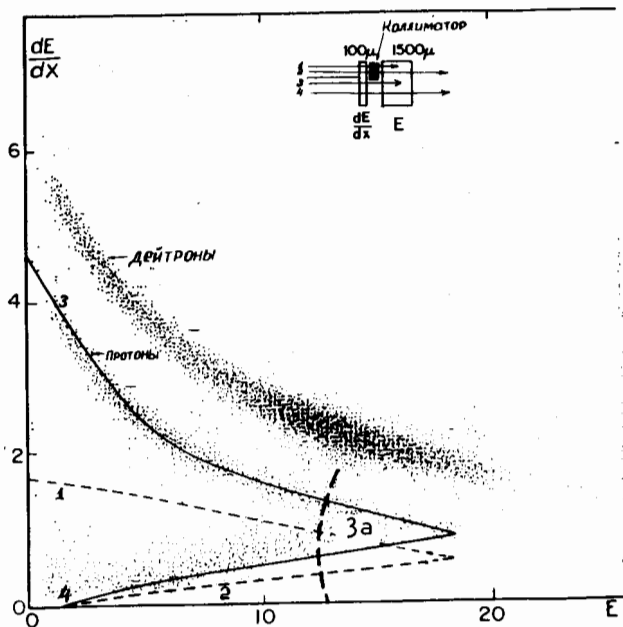


Рис.1. Двумерное распределение, полученное в эксперименте <sup>/5/</sup>.

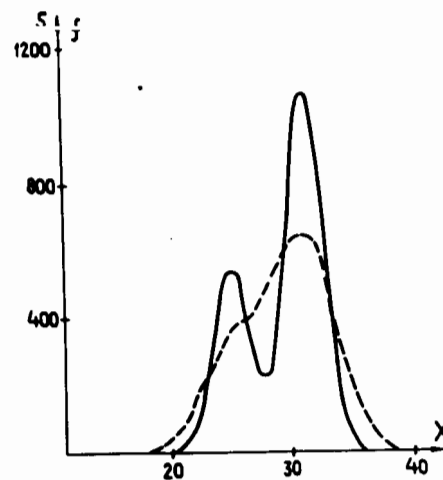
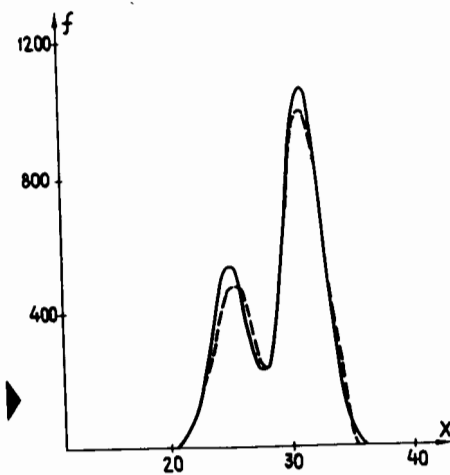


Рис.3. Исходная функция  $f$ , обозначенная сплошной линией, и оценка исходной функции /пунктирная линия/, полученная при условии  $f \geq 0$ .

Рис.2. Исходная функция  $f$ , /сплошная линия/ и измеренная функция  $s$  /пунктирная линия/.



ласть 3а/. Величина этого участка зависит от распределения частиц отдачи по энергии и в среднем составляет около 30% всего интервала по переданному импульсу, соответствующего области 3. Для наглядности на рисунке представлено одно из наиболее простых распределений. В общем случае регистрируемые события располагаются вдоль всех указанных на рисунке линий /включая пунктирные/.

Зная функции размытия, можно свести задачу восстановления размытого изображения\* к задаче линейных уравнений:

$$AXB = Y, \quad /6/$$

где все матрицы неотрицательны и размера  $n \approx 100$ ; X- исходное искомое распределение; Y - регистрируемое распределение; A, B - циклические матрицы, представляющие собой вырезки-центральные части бистохастической матрицы размера  $m = 2n$ . Матрицы A и B относятся к классу, более узкому, чем неотрицательные, а именно, классу осцилляционных /7,8/.

Выражение /6/ может быть представлено в форме

$$CX' = Y', \quad /7/$$

где  $C = A \circ B^T$  - прямое произведение, матрица размера  $n^2$ ; X', Y' - вектора длиной  $n^2$ , представляющие собой последовательно размещенные столбцы матриц X и Y.

Более удобно с точки зрения минимальности оперативной памяти ЭВМ разбиение задачи на два этапа:

$$A\tilde{X} = Y, \quad /8a/$$

$$XB = \tilde{X} \sim B^T X^T = \tilde{X}^T. \quad /8б/$$

Сохранение полного числа событий /чему соответствует стохастичность матриц A и B /

$$\sum_j \tilde{x}_{ij} = \sum y_{ij}, \quad /9/$$

$$\sum_i x_{ij} = \sum \tilde{x}_{ij}$$

контролировалось на каждом этапе и вместе с /5/ составляло дополнительное условие при решении.

Минимизация суммы /3/ при условиях /5/ и /9/ - типичная задача квадратичного программирования, которая для положительно-

определенной матрицы  $(N^T N)$  имеет единственное решение, определяемое условиями

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = 0, \quad \text{если } x_i > 0 \quad /\text{область I}/, \quad /10/$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \geq 0, \quad \text{если } x_i = 0 \quad /\text{область II} /.$$

II. Решение задачи с помощью универсальных программ типа MINUIT и FAMILY требует больших затрат машинного времени, хотя и удобно для задания практически любой априорной информации.

Кроме универсальных программ можно применять более простые программы с использованием итерационных процедур: метод сопряженных градиентов, метод проекций градиентов и т.д. Указанные методы обладают рядом недостатков: они требуют довольно много счетного времени и оставляют открытым вопрос о погрешности решения.

В настоящей работе предлагается метод, позволяющий получить устойчивое решение и свободный от указанных недостатков.

Задавая ограничения более общего в сравнении с /5/ типа:  $x_i \geq a_i$ , где  $a_i$  - произвольно задаваемые числа, можем свести задачу к стандартному виду /3/ с условием /5/ заменой переменных:  $x_i \rightarrow x'_i + a_i$ ,  $y_i \rightarrow y_i + \sum h_{ij} a_j$ .

Дополнительная устойчивость решения и быстродействие обеспечиваются стабилизатором нулевого:  $\Omega_0 = \alpha X^T X$ , либо первого порядка /10/:  $\Omega_1 = \gamma \left[ \sum_{i=2}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2 \right]$ . При совместном использовании обоих стабилизаторов должно выполняться условие  $\alpha + 2\gamma = \text{const}$ . В нашем случае предполагается, что из условия  $y_i = 0$  следует  $x_i = 0$ . Если заранее известно, что  $x_i = 0$ , то i-й столбец матрицы N не влияет на решение\*.

Из условий /10/ следует, что существует такая матрица  $N_1$ , что все положительные  $x_i$  определяются решением задачи минимизации функционала  $\sigma_1 = (N_1 \tilde{X}_1 - \tilde{Y})^T (N_1 \tilde{X}_1 - \tilde{Y})$ . Матрица  $N_1$  получена из исходной матрицы N исключением столбцов, соответствующих нулевым значениям параметров решения  $x_i$ . Это решение:  $\tilde{X}_1 = (N_1^T N_1)^{-1} N_1^T \tilde{Y}$ , к которому следует добавить нулевые значения параметров  $x_i$ , чтобы получить полное решение  $\tilde{X}$ .

В основу алгоритма положен метод /9/. Это метод рекуррентного восстановления обратной матрицы C по прямой матрице N. В очеред-

\* Фиксация параметра в этом случае так же, как и фиксация  $x_j = x_j^0$  в общем случае, увеличивает быстродействие программы. Постоянная фиксация параметров осуществляется перед вызовом программы заданием специальных аргументов программы равными нулю.

\* Двумерный спектр можно представить как изображение некоего объекта, находящегося не в фокусе аппарата.

ной  $k$ -й итерации вычисляется градиент  $\frac{\partial \sigma}{\partial \vec{X}(k)} = \mathbf{H}^T \mathbf{N} \vec{X}(k) - \mathbf{H}^T \vec{Y} + \alpha \vec{X}(k)$

по временно фиксированным параметрам /предварительно значения всех параметров фиксируются равными нулю/. Значение компоненты градиента отрицательно, когда он направлен внутрь области определения параметров, задаваемой условиями /5/. Если все составляющие градиента неотрицательны, то это означает, что искомое решение найдено. В противном случае определяется номер  $\ell$  координаты градиента, максимальной по модулю /и отрицательной/. Согласно методу /9/ в  $k$ -й итерации увеличивается размер матриц  $\mathbf{H}(k)$  и  $\mathbf{C}(k)$ , последняя из которых представляет собой  $k$ -е приближение обратной матрицы  $\mathbf{C}$ , вычисляемое по рекуррентным формулам:  $\mathbf{C}(k+1) = (\mathbf{H}(k+1) \mathbf{H}(k+1))^{\mathbf{T}}^{-1}$ , где матрица  $\mathbf{H}(k+1)$  получена из  $\mathbf{H}(k)$  добавлением  $\ell$ -го столбца матрицы  $\mathbf{H}$ . Очередное приближение к решению  $\vec{X}(k+1) = \mathbf{C}(k+1) \mathbf{H}(k+1)^{\mathbf{T}} \vec{Y}$ . Если некоторые из ранее найденных параметров  $X^{(k)}$  становятся отрицательными, то размер матрицы  $\mathbf{H}(k+1)$  сокращается по сравнению с  $\mathbf{H}(k)$  вычеркиванием\*\*\* из  $\mathbf{H}(k)$  соответствующих столбцов, а сами параметры  $x_i < 0$  временно фиксируются равными нулю. Очевидно, что число необходимых для получения решения итераций в таком случае возрастает, так как упомянутые параметры требуется определить заново.

В программе вычисляются величины  $\delta_i \equiv \delta(x_i) = \sqrt{C_{ii}}$ , являющиеся верхней оценкой границы дисперсии параметра  $x_i$ . Очевидно, нижняя граница определяется в наших примерах исходя из чисто статистических свойств пуассоновского процесса, как  $\sqrt{x_i}$ .

Эффективность программы проверялась на модели, в которой в качестве исходной информации была взята функция с двумя близкорасположенными максимумами /сплошная кривая на рис.2/. На рис.2 пунктирной линией представлен результат размытия этой функции, моделирующей аппаратный эффект с функцией размытия, определяемой из экспериментальных данных. Каждая компонента вектора  $\vec{Z} / n = 60 /$  в правой части уравнения /3/ представляет из себя случайную величину, разыгранную по пуассоновскому закону со средним значением  $(z_i)_0$ . Результат восстановления спектра с помощью нашей программы приведен на рис.3 точечной кривой /сплошная кривая - исходный спектр/.

Из рис.3 видно, что качество восстановления спектра вполне удовлетворительное. Во всех представленных на рис.3  $\div 5$  случаях

\* Для простоты приведена формула для стабилизатора  $\Omega_0$ . Реальная программа содержит также и стабилизатор  $\Omega_1$  /подробно по поводу стабилизаторов более высокого порядка см. /10/ /.

\*\* Прямоугольная матрица  $\mathbf{H}(k)$  состоит из столбцов матрицы  $\mathbf{H}$ , соответствующих ранее определенным параметрам.

\*\*\* Операция сокращения размера матрицы  $\mathbf{H}(k) \rightarrow \mathbf{H}(k+1)$  производится последовательно, пока не перестанут появляться  $x_i < 0$ .

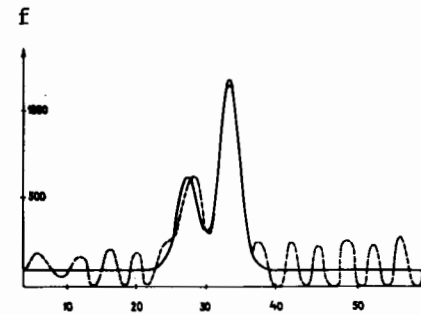


Рис.4. Исходная функция  $f$  с постоянным фоном /сплошная кривая/ и ее оценка /пунктирная линия/, полученная при условии  $f \geq 0$ .

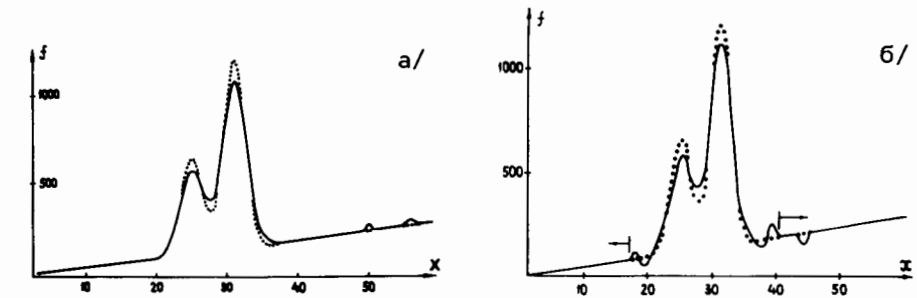


Рис.5. Исходная функция  $f$  с линейным фоном /точечная линия/ и ее оценка, полученная при условии: а/  $f(x) \geq 5x$ ; б/  $f(x) \leq 5x$  для  $x \leq 17$  и  $x \geq 40$  /границы интервалов указаны на рис. 5б/.

$\gamma_{opt} = 5 \cdot 10^{-6}$ . На рис.4 представлен тот же модельный пример с добавлением фона /сплошная кривая/ и восстановленный нашей программой /с условием /5// спектр /пунктирная кривая/. Как видно из рис.4, восстановленный спектр содержит осциллирующую компоненту, амплитуда которой пропорциональна уровню фона\*, а в общем случае шуму или флуктуации\*\* /напомним, что в пуассоновском процессе  $\langle \Delta Z^2 \rangle = \langle Z \rangle$ . Изменение условия /5/ к виду  $x_i > a_i$ , где  $a_i$  - величина фона в  $i$ -й компоненте вектора  $\vec{Z}$ , приводит к исчезновению осцилляций /см. рис.5/. Из интуитивных соображений можно было ожидать, что решение  $\vec{X} = \{x_i\}_1^n$ , представляющее собой линейную комбинацию независимых пуассоновских распределений  $\{z_i\}_1^n$ , также будет набором независимых распределений. Присутствие осцилляций свидетельствует о наличии корреляций между параметрами  $\{x_i\}_1^n$ . Причем, как было выяснено, наличие такой осцилляции не зависит от метода решения, если этот

\* Нижняя граница фона определяется значениями задаваемых констант  $\{a_i\}_1^n$ .

\*\* Коэффициент пропорциональности, связывающий амплитуды шумовых сигналов измерений и получаемого решения /11/,  $\kappa = \lambda_{max} / \lambda_{min}$ , где  $\lambda_m$  - собственные числа симметричной матрицы  $(\mathbf{H}^T \mathbf{H})$ . В случае корректной задачи амплитуда осцилляций определяется погрешностью вычислений и зависит как от алгоритма решения, так и от матрицы  $\mathbf{H}$ .

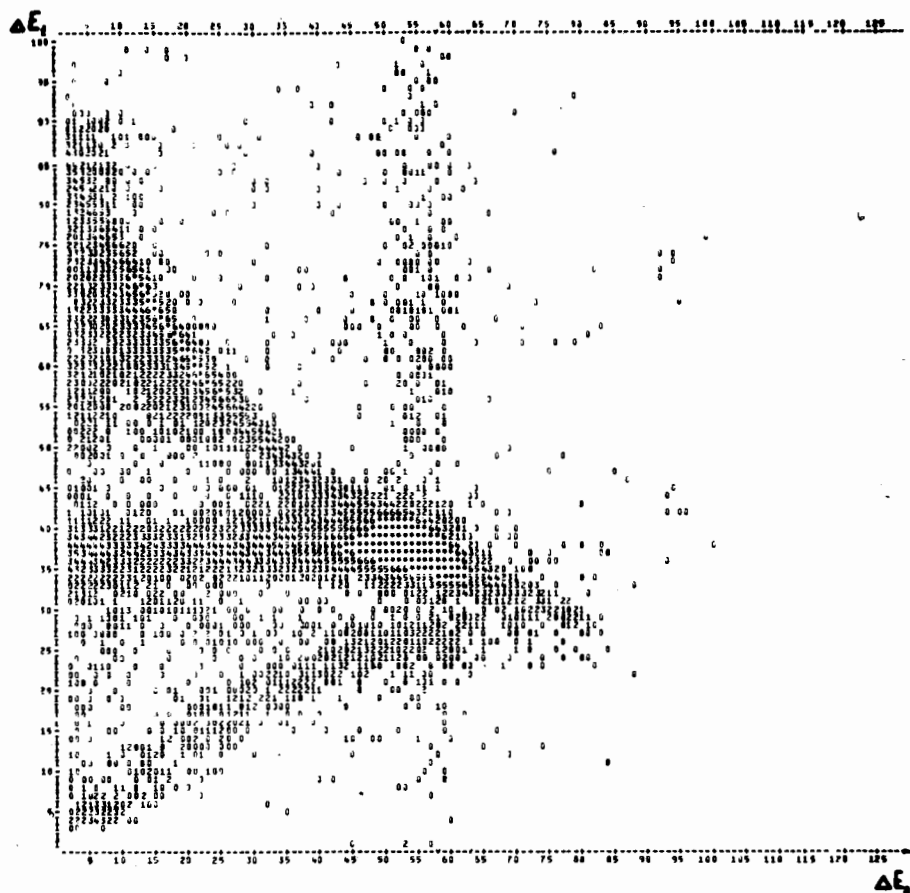


Рис.6а. Двумерное распределение, полученное в эксперименте /5/, в представлении "line-printer"а ЭВМ. Цифра  $N_i$  в отдельной клетке  $N_i = \log_2 M_i$ , где  $M_i$  - число зарегистрированных событий в интервале  $(\Delta E_1, \Delta E_2)_i$ .

метод использует обращение исходного оператора прямой задачи /3/. Ранее в работе /8/ аналогичный пример решался методом сингулярного разложения и возникающая в решении осцилляция имела тот же самый вид.

Присутствие осцилляций может маскировать или имитировать физические эффекты типа резонансов, выделение которых производится методикой, достоверность которой не может быть гарантирована /12/. В то же время наличие осцилляций в решении может служить указанием на присутствие физического фона.

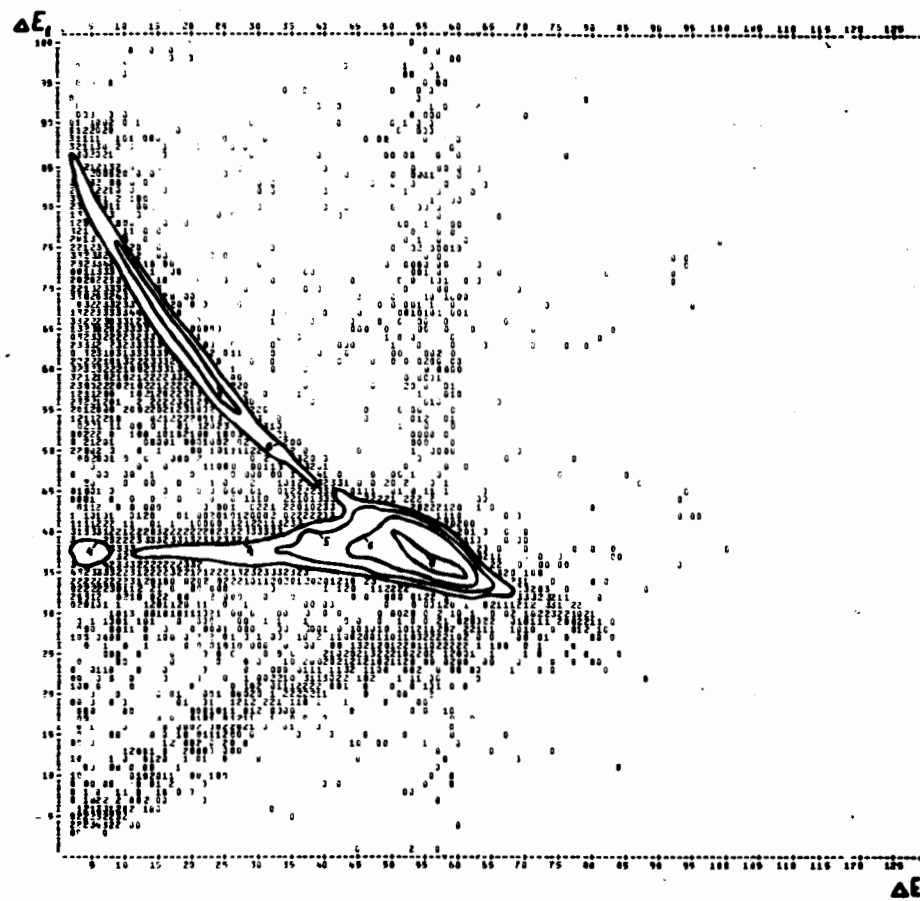


Рис.6б. То же, что и на рис.6а, с обозначенными линиями уровня для  $N_i \geq 4$ .

Для вычитания физического фона необходимо располагать дополнительной информацией, например, знать вид аналитической зависимости, описывающей этот фон. Достаточно также знать, что фурье-спектры измеряемого эффекта и физического фона принадлежат к разным частотным интервалам, как в наших примерах на рис.4 и 5.

Задачу можно обратить и по наличию осцилляций в восстановленном спектре судить о правильности процедуры вычитания фона.

На рис.6 представлено одно из распределений, полученных в эксперименте /5/, а на рис.7 - результат восстановления, проведенного согласно двухэтапному методу /8/.

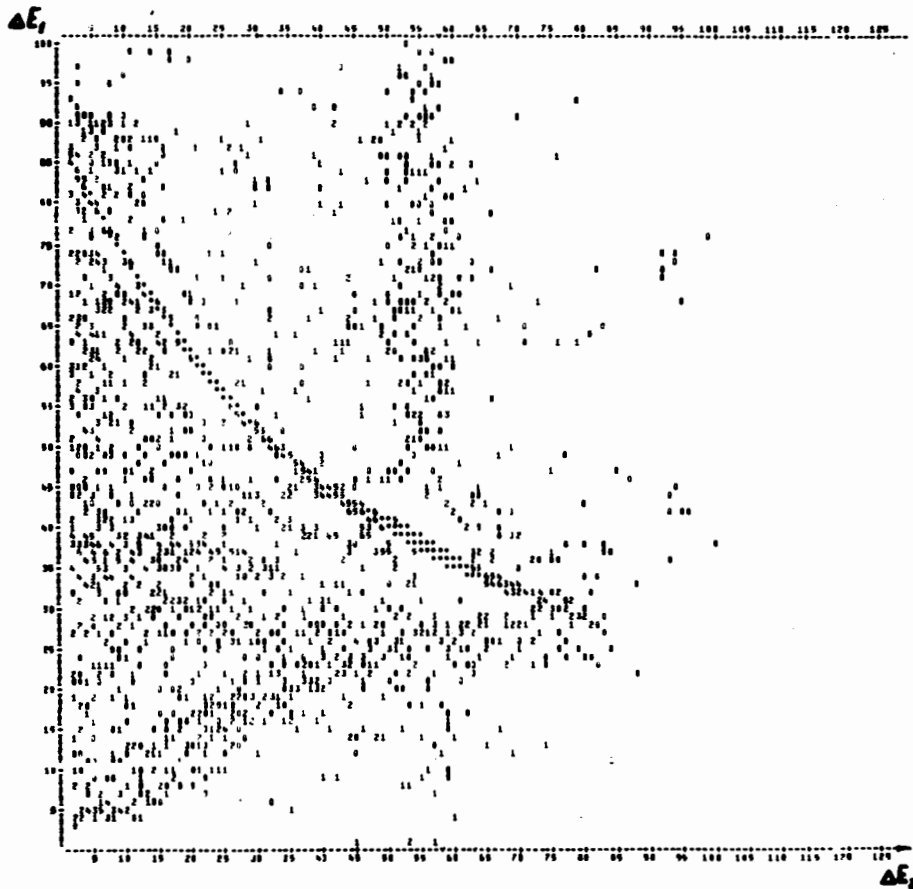


Рис.7. Двумерное распределение, восстановленное по распределению, представленному на рис.6.

Таким образом, в работе продемонстрирована возможность восстановления исходного спектра при известных аппаратурных функциях размытия.

В заключение заметим, что появление корреляций между компонентами вектора решения в задаче обращения линейного оператора представляет самостоятельный интерес. Выяснение природы осцилляций и построение в дальнейшем математической модели, описывающей механизм их возникновения, может помочь в создании новых, более тонких методов, эффективно отфильтровывающих упомянутую осцилляцию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хиршман И.И., Уиддер Д.В. Преобразования типа свертки. ИЛ, М., 1958.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. 2-е издание, "Наука", М., 1979.
3. Иванов В.К. и др. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. "Наука", М., 1978.
4. Фриден Б. В кн.: Обработка изображений и цифровая фильтрация /под ред. Хуанга, пер. с англ./, "Мир", М., 1979.
5. Akimov Y. et al. Phys.Rev. D12, 1975, p. 3399; Мухин С.В., Царев В.А. ЭЧАЯ, 8, с. 989, Дубна, 1977.
6. Avdeichikov V.V. et al. Nucl.Instr. and Methods, 1975, 131, p. 61.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц, "Наука", М., 1967, с. 398.
8. Радоманов В.Б., Сороко Л.М. ОИЯИ, 5-82-456, Дубна, 1982.
9. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Изд. 2-е, Гостехиздат, М.-Л., 1963, с. 196.
10. Василенко Г.И. Теория восстановления сигналов, "Сов. радио", М., 1979, с. 95.
11. Бахвалов Н.С. Численные методы 1, "Наука", М., 1973, с.390.
12. Аношин А.И. и др. ОИЯИ, P1-81-579, Дубна, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел  
3 ноября 1983 года.

## НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д2,4-83-179	Труды XV Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Дубна, 1982.	4 р. 80 к.
	Труды УШ Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Протвино, 1982 /2 тома/	11 р. 40 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:  
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79  
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Изьюров В.М., Мухин С.В., Радоманов В.Б. 5-83-756  
Восстановление исходных спектров с учетом аппаратной функции прибора

Предложен алгоритм решения задачи о восстановлении исходных спектров по результатам экспериментальных измерений /имеющих статистические ошибки/ с помощью аппаратуры, конечное разрешение которой приводит к размытию исходных спектров. Задача сводится к решению системы линейных уравнений с дополнительными условиями, задаваемыми системой неравенств. Алгоритм обладает высоким быстродействием, дающим возможность эффективно решать многомерные задачи такого рода на современных ЭВМ.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Izyurov V.M., Mukhin S.V., Radomanov V.B. 5-83-756  
Initial Spectrum Reconstruction According to the Apparatus Function of the Device

The algorithm is suggested of solving the problem of initial spectrum reconstruction according to measurement (with statistical errors) by the device the finite resolution of which leads to spreading of initial spectra. The task reduces to the solution of a system of linear equations with additional conditions set by a system of inequalities. The algorithm possesses a high-speed response, which makes it possible to solve multidimensional problems of such a kind on up-to-date computers.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод авторов