СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

С.И.Сердюкова

ОБ ОЦЕНКЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИНТЕГРАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ ПСЕВДОРЯДЫ ФУРЬЕ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

5 - 8247

С.И.Сердюкова

ОБ ОЦЕНКЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИНТЕГРАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ ПСЕВДОРЯДЫ ФУРЬЕ

Сердюкова С.И. 5 - 8247

Об оценке последовательностей интегралов, содержащих псевдоряды Фурье

Исследуется два тонких аналитических случая в теории разностных краевых задач. Исследование устойчивости сводится к оценке интегралов, содержащих ряды по степеням собственных значений резольвентной матрицы с коэффициентами из L_2 .

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1974

Работа посвящена исследованию двух тонких аналитических случаев в теории разностных краевых задач. Исследование устойчивости сводится к оценке последовательностей интегралов, содержащих ряды по степеням собственных значений резольвентной матрицы с коэффициентами из L_2. Известно /1/, что собственные значения резольвентной матрицы систем с наклонными характеристиками в окрестности определяющих точек допускают разложение вида

$$\kappa(\phi) = \exp\{ i\psi_0 + i\gamma\phi + i\sum_{j=p}^{2\mu} a_j \phi^j - \beta\phi^{2\mu} + \dots \}. \qquad /1/$$

$\gamma, a_j, \beta, p, \mu$ - определяющие параметры $\kappa(\phi)$; γ, a_j - вещественные, $\gamma \neq 0$, $\beta > 0$; j , p , μ - целые. Пусть $\{c_\ell\}$ - произвольная последовательность из L_2 : $\|c_\ell\|^2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} |c_\ell|^2 < \infty$. Ряды вида $\sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell \kappa^\ell$ будем называть псевдорядами Фурье.

В первом случае исследование устойчивости сводится к оценке L_2 - нормы интегралов

$$I_\nu^n = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi^{-1/2} \Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell \kappa^\ell \Big) \tilde{\kappa}^\nu e^{in\phi} d\phi \qquad (\nu = 1, 2, \dots, \infty)$$

при $n \to \infty$. Здесь $|\tilde{\kappa}(\phi)| \leq a < 1$ при $|\phi| < \epsilon$, $\tilde{\kappa}(0) \neq 0$. Оценка $\|I_\nu^n\| \leq c \|c_\ell\|$ с константой c , не зависящей от n , означает устойчивость. На самом деле в рассматриваемом случае при $p < 2\mu$ устойчивости нет. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если в разложении /1/ $p < 2\mu$, то найдется последовательность $\{c_\ell^*\}$ с $\|c_\ell^*\| = 1$ такая, что $\|I_\nu^n\|^2 > a\ln n$. Для произвольной последовательности $\{c_\ell\}$ из L_2 справедлива такая оценка: $\|I_\nu^n\|^2 < b\ln n\,\|c_\ell\|^2$. Если $p=2\mu$, то есть устойчивость $\|I_\nu^n\|^2 \le c\|c_\ell\|^2$. Постоянные a, b, c - положительные и зависят только от определяющих параметров разложения $\kappa(\phi)$.

Доказательство. Доказательство сводится к построению асимптотик интегралов

$$\gamma_\ell^n = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi^{-1/2}\kappa^\ell e^{in\phi}\,d\phi, \qquad \ell=1,2,\dots,\infty .$$

При $p<2\mu$ $\|\gamma_\ell^n\|^2 \supset c\ln n$, и такой рост обеспечивает осциллирующая зона, расположенная в окрестности характеристики: $an^{\frac{1}{p}} < |\gamma\ell+n| < bn^{\frac{2\mu-p+1}{2\mu}}$. Для $|\gamma\ell+n| > an^{\frac{1}{p}}$ асимптотики γ_ℓ^n находим с помощью метода перевала. Используя главный член асимптотики, строим $\{c_\ell^*\}$. С помощью этих же асимптотик в общем случае получаем оценку сверху. Для $|\gamma\ell+n|\le an^{\frac{1}{p}}$ достаточно такой оценки $|\gamma_\ell^n|\le cn^{-\frac{1}{p}}$. При $p=2\mu$ $\|\gamma_\ell^n\|\le c$. В этом случае γ_ℓ^n экспоненциально малы вне $|\gamma\ell+n|\le an^{\frac{1}{p}}$, и такое поведение γ_ℓ^n обеспечивает устойчивость.

Во втором случае исследование устойчивости сводится к оценке L_2- нормы таких интегралов:

$$J_\nu^n = \int_{-\epsilon}^{\epsilon}\Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell\kappa^\ell\Big)\tilde\kappa^{-\nu} e^{in\phi}d\phi, \quad \nu=1,2,\dots,\infty .$$

В этом случае под знаком интеграла нет $\phi^{-1/2}$. Зато $\tilde\kappa(\phi)$ имеет вид /1/, вообще говоря, с другими определяющими параметрами: $\tilde\gamma$, $\tilde\alpha_j$, $\tilde\beta$, $\tilde p$, $\tilde\mu$.

Теорема 2. Для произвольной последовательности $\{c_\ell\}\subset L_2$ справедлива оценка: $\|J_\nu^n\|\le c\,\|c_\ell\|$.

Постоянная c зависит только от определяющих параметров разложения κ и $\tilde\kappa$.

Доказательство. J_ν^n удается представить в виде суммы интегралов, содержащих обычные ряды Фурье, и неких добавок, которые оцениваются довольно просто. Приведем подробное доказательство.

Лемма. Пусть $\rho(\phi)=0$ при $|\phi|\le\epsilon$ и $\rho(\phi)=0$ при $|\phi|>\epsilon$. Тогда

$$\mathcal{F}(\phi)=\rho(\phi)\sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell\kappa^\ell(\phi)\subset \mathcal{L}_2(-\pi,\pi) \quad \text{и} \quad \|\mathcal{F}\|\le c\,\|c_\ell\|.$$

Постоянная c зависит только от определяющих параметров разложения $\kappa(\phi)$.

Доказательство леммы. Прежде всего заметим, что вещественная замена переменных

$$\psi=\phi+\frac{a_p}{\gamma}\phi^p+\dots,\quad |\phi'_\psi|<c \qquad \text{при} \quad |\phi|\le\epsilon$$

позволяет перейти к C-устойчивым κ. Далее, если $\mathcal{F}=\sum_{-\infty}^{\infty} f_\nu e^{i\nu\phi}$, то для $\mathcal{F}_+=\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu e^{i\nu\phi}$ искомая оценка получается простым интегрированием по частям. В самом деле,

$$f_\nu=\sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell\int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{i\ell\gamma\phi-\ell\beta\phi^{2\mu}+\dots-i\nu\phi}\,d\phi,\quad \gamma<0.$$

После трехкратного интегрирования по частям получаем такую оценку:

$$|f_\nu|\le a\Big(\sum_{\ell=1}^{\infty}|c_\ell|\,\frac{e^{-b\ell}}{|\gamma\ell-\nu|}+\sum_{\ell=1}^{\infty}|c_\ell|\,\ell^{\frac{1}{\mu}}\,/\,|\gamma\ell-\nu|^3\Big).$$

Здесь и ниже постоянные a, b, c - положительные и зависят только от определяющих параметров разложения собственных значений κ и $\tilde\kappa$. Далее, так как $\ell^{\frac{1}{\mu}}/|\gamma\ell-\nu|\le|\gamma|$, справедлива такая оценка:

$$|f_\nu|^2\le\frac{2a^2}{|\gamma|\cdot|\gamma-\nu|^2}\,\|c_\ell\|^2\Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} e^{-2b\ell}+\sum_{\ell=1}\frac{1}{|\gamma\ell-\nu|^2}\Big)\le\frac{c}{|\gamma-\nu|^2}\,\|c_\ell\|^2.$$

Отсюда следует, что $\|\mathcal{F}_+\| \le c\|c_\ell\|$. Для $\mathcal{F}_-$ нужны более тонкие оценки. Отрезок интегрирования $[-\epsilon, \epsilon]$ заменяем на дугу линии уровня $|\kappa| = 1$ и соединяющие дуги $\phi = \epsilon e^{i\omega}$, $0 \le \omega \le \omega_1$, $\pi - \omega_2 \le \omega \le \pi$. Прежде всего найдем асимптотику ω_1, ω_2 по ϵ. Рассматриваемая линия уровня удовлетворяет соотношению

$$\omega = -\frac{\beta}{\gamma}\rho^{2\mu-1}(1+O(\rho))(1+(\frac{1}{6}-2\mu^2)\omega^2+\ldots).$$

Отсюда находим точки пересечения линии уровня $|\kappa| = 1$ с окружностью $|\phi| = \rho = \epsilon$:

$$\omega_i = -\frac{\beta}{\gamma}\epsilon^{2\mu-1}(1+O(\epsilon))(1+(\frac{1}{6}-2\mu^2)\omega_i^2+\ldots),\quad i=1,2.$$

Далее можно сыграть на том, что $e^{i\nu\phi}$ экспоненциально мало на одном конце дуги, а κ^ℓ - на другом. Соответственно используем разные оценки на дугах $0 \le \omega \le \frac{\omega_1}{2}$ и $\frac{\omega_1}{2} \le \omega \le \omega_1$:

$$|\kappa^\ell e^{i\nu\phi}| \le \begin{cases} \exp(\nu\epsilon\frac{\omega}{2} - \beta\ell\frac{\epsilon^{2\mu}}{4}), & 0 \le \omega \le \frac{\omega_1}{2}, \\ \exp(-\nu\beta\frac{\epsilon^{2\mu}}{4\gamma} + \gamma\ell\epsilon\frac{\omega_1-\omega}{2}), & \frac{\omega_1}{2} \le \omega \le \omega_1. \end{cases}$$

Для $\pi - \omega_2 \le \omega \le \pi$ справедлива аналогичная оценка. Теперь нетрудно оценить интегралы по соединяющим дугам:

$$|I_\nu|^2 \le c\|c_\ell\|^2(\frac{1}{\nu^2}\sum_{\ell=1}^{\infty} e^{-\beta\ell\epsilon^{2\mu}/2} + e^{\nu\beta\frac{\epsilon^{2\mu}}{2\gamma}}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{\ell^2}).$$

Что касается интегралов по дуге линии уровня, то здесь мы получаем коэффициенты Фурье произведения функции из $\mathcal{L}_2$ на ограниченную функцию. Такая функция принадлежит /2/ $\mathcal{L}_2$, и ее норма не превосходит $c\|c_\ell\|$. Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы 2. С помощью вещественной замены переменных получаем c-устойчивое $\tilde{\kappa}$. При этом псевдоряд $\sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell\kappa^\ell(\phi)$ переходит в псевдоряд

$$f(\psi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell\kappa^\ell(\phi(\psi)).$$

Согласно лемме $\|f\| \le c\|c_\ell\|$. Далее, так как $\phi_\psi' e^{in\phi(\psi)}$ ограничена на $[-\epsilon, \epsilon]$,

$$\mathcal{F} = \phi_\psi' e^{in\phi(\psi)} f(\psi) \subset \mathcal{L}_2 \quad \text{и} \quad \|\mathcal{F}\| \le c\|c_\ell\|.$$

Положим $\mathcal{F} = \sum_{-\infty}^{\infty} f_\ell e^{i\ell\psi} = \sum_{-\infty}^{0} + \sum_{1}^{\infty} = \mathcal{F}_- + \mathcal{F}_+$.

Тогда, так как $\tilde{\gamma} < 0$ для интегралов, содержащих $\mathcal{F}_-$, искомая оценка получается простым интегрированием по частям, как это было сделано в лемме. Для оценки интегралов, содержащих $\mathcal{F}_+$, отрезок интегрирования деформируем в дугу линии уровня $|\tilde{\kappa}| = 1$ и соединяющие дуги. Интегралы по соединяющим дугам оцениваются так же, как в лемме. В интегралах по дуге линии уровня делаем замену переменных:

$$i\gamma\psi - \beta\psi^{2\mu} + \ldots = -i\xi.$$

Для вещественных ξ $\mathcal{F}_+(\psi(\xi))$ является псевдорядом Фурье:

$$\mathcal{F}_+(\psi(\xi)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} f_\ell e^{i\ell\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma}\xi - \ell\frac{\beta}{\gamma^{2\mu}}\xi^{2\mu} + \ldots},$$

и доказательство сводится к оценке таких интегралов:

$$j_\nu = \int_{-\epsilon_1}^{\epsilon_2} \psi_\xi' \mathcal{F}_+(\psi(\xi)) e^{-i\nu\xi} d\xi.$$

Согласно лемме $\mathcal{F}_+(\psi(\xi)) \subset \mathcal{L}_2$ и $\|\mathcal{F}_+\| \le a\|f_\ell\| \le b\|c_\ell\|$. Так как $|\psi_\xi'| \le c$, функция $\psi_\xi' \mathcal{F}_+$ также принадлежит $\mathcal{L}_2$ и $\{j_\nu\}$, как последовательность коэффициентов Фурье этой функции, допускает искомую оценку сверху: $\|j_\nu\| \le c\|c_\ell\|$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. *С.И.Сердюкова. Необходимое и достаточное условие устойчивости одного класса разностных краевых задач. ДАН СССР, т.208, №1, 52-55 /1973/.*
2. *Г.Е.Шилов. Математический анализ. М., Физматгиз, 1960, 307-324.*

Рукопись поступила в издательский отдел 4 сентября 1974 года.