сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

5-82-68

П.Е.Жидков

# СУЩЕСТВОВАНИЕ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЗИКИ

1982

В работе рассматривается следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$y'' + a(x)y' = f(y) \quad , \quad 0 \le x < \infty . \qquad (I)$$

Данное уравнение возникает при рассмотрении ряда моделей физики элементарных частиц (см. /I-4/; /I3-I4/). Для него получены достаточные условия существования ограниченного решения, а также достаточные условия существования решения с произвольным числом К корней, удовлетворяющего краевым условиям $y'(0)=0$, $y(+\infty)=0$ (такое решение принято называть частицеподобным с К узлами). При этом относительно коэффициента $a(x)$ предполагается, что он положителен и ограничен.

Ранее уравнение (I) рассматривалось в связи с вопросом существования частицеподобных решений в ряде работ (см. /5/-/12/) в случае, когда $a(x) = \frac{2}{x}$ . В работах /5/-/I0/ изучался случай

$f(y) = y - y^n$ , $n > 0$ .

Наиболее полный результат был получен в работах /8,9/, где было показано, что для любого $n = \frac{2p+1}{2g+1}$ ( $p$ , $g$ - натуральные), $1 < n < 4$ , и для любого натурального $i$ уравнение (I) имеет частицеподобное решение с $i$ узлами, а также, что не существует частицеподобных решений при любом $n > 5$ .

Позднее было показано (см. /I0/) существование счетного множества частицеподобных решений при $n \in [4,5)$ , $f(y) = y - |y|^{n-1}$ . Однако остался неисследованным вопрос о существовании частицеподобных решений с любым числом узлов.

В работах /II,I2/ изучается случай $a(x) = \frac{2}{x}$ , $f(y)$ обладает, по крайней мере, пятью корнями: $\alpha_{-2} < \alpha_{-1} < 0 < \alpha_1 < \alpha_2$, $f(\alpha_{-2}) = f(\alpha_{-1}) = f(0) = f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$ , причем $f(y) > 0$ при $y \in \{(\alpha_{-2},\alpha_{-1}) \cup (0,\alpha_1)\}$, $f(y) < 0$ при $y \in \{(\alpha_{-1},0) \cup (\alpha_1,\alpha_2)\}$ . Получены достаточные условия существования частицеподобных решений с произвольным числом узлов для широкого класса функций $f$ .

Существует целый ряд моделей нелинейной физики, приводящих к уравнению (I) с ограниченным положительным коэффициентом $a(x)$. Например, в /13/ рассматривается случай $a(x)=\alpha>0$, а в работе /14/ – случай $a(x)=\alpha\tanh x$, где $\alpha>0$. В обоих случаях $f(y)=y-y^3$. Из результатов настоящей работы вытекает, в частности, существование частицеподобных решений с произвольным числом узлов в этих случаях.

Уточним теперь задачу. Относительно функции $f(y)$ мы будем пердполагать, что она удовлетворяет условию Липшица на любом интервале конечной длины. Коэффициент $a(x)$ непрерывен на полупрямой $[0,\infty)$. Будем рассматривать два вида начальных условий для этого уравнения:

$$y(0)=y_0\ ,\quad y'(0)=0 \tag{2}$$

и

$$y(0)=y_0\ ,\quad y'(0)=b. \tag{3}$$

Соответственно будем говорить о задаче Коши (I),(2) либо (I),(3).

Пусть некоторая функция $y(x)$, определенная на интервале $(c,d)$, удовлетворяет на этом интервале уравнению (I). Тогда, как это нетрудно проверить, для этой функции на интервале $(c,d)$ выполняется следующее тождество:

$$\left\{[y'(x)]^2+U(y(x))\right\}'=-2a(x)\cdot[y'(x)]^2\ , \tag{4}$$

где

$$U(y)=-2\int_0^y f(t)dt\ . \tag{5}$$

Функцию $U(t)$ иногда называют потенциалом.

Следующая теорема отвечает на вопрос о существовании ограниченных решений $y$ уравнения (I) на полупрямой $[0,\infty)$.

<u>Теорема I</u>. Пусть функция $U(y)$ удовлетворяет следующему условию: существуют числа $\alpha_{-1}$ и $\alpha_1$ такие, что

а) $\alpha_{-1}<0<\alpha_1$ ;

б) $U(\alpha_{-1})\geq U(\alpha_1)>0$ .

Пусть коэффициент $a(x)$ непрерывен на полупрямой $[0,\infty)$ и неотрицателен на ней. Тогда для любых $y_0$, $b$ : $y_0\in(0,\alpha_1)$ таких, что

$$b^2+U(y_0)<U(\alpha_1)\ , \tag{6}$$

существует соответствующее им решение $y(x)$ задачи (I),(3), определенное на полупрямой $[0,\infty)$, причем это решение ограничено:

$$\alpha_{-1}<y(x)<\alpha_1. \tag{7}$$



<u>Доказательство</u>.

Пусть $y_0$, $b$ удовлетворяют неравенству (6), причем $y_0\in(0,\alpha_1)$. По локальной теореме существования есть решение $y(x)$ задачи (I),(3) на некотором полуинтервале $[0,c_1)$, где $c_1>0$. Предположим, что это решение нельзя продолжить на всю полупрямую $[0,\infty)$. Обозначим через $c$ точную верхнюю грань множества всех правых концов $c_1$ полуинтервалов $[0,c_1)$, на которые можно продолжить данное решение.

Докажем, что само решение $y(x)$ и его первая производная $y'(x)$ ограничены на полуинтервале $[0,c)$. Для этого обратимся к тождеству (4). Из него вытекает, что величина $\{[y'(x)]^2+U(y(x))\}$ не возрастает как функция $x$. Отсюда, в частности, вытекает:

$$\left\{[y'(x)]^2+U(y(x))\right\}\leq\left\{b^2+U(y_0)\right\} \tag{8}$$

для любого $x\in[0,c)$. Учитывая неравенство (6), отсюда получаем:

$$U(y(x))<U(\alpha_1)\ ,$$

а поэтому функция $y(x)$ не может с увеличением $x$ достичь величины $\alpha_1$, либо $\alpha_{-1}$, поскольку $U(\alpha_{-1})\geq U(\alpha_1)>U(y(x))$. Получаем: при $x\in[0,c)$

$$\alpha_{-1}<y(x)<\alpha_1. \tag{9}$$

Отсюда и из неравенства (8) следует, что производная $y'(x)$ также ограничена на полуинтервале $[0,c)$ :

$$[y'(x)]^2\leq\left\{b^2+U(y_0)-\min_{y\in[\alpha_{-1},\alpha_1]}U(y)\right\}. \tag{10}$$

Если учесть теперь (9) и (10), из уравнения (I) вытекает, что вторая производная $y''(x)$ также ограничена на $[0,c)$.

Доопределим решение $y(x)$ и его первую производную $y'(x)$ в точке $x=c$ следующим образом: положим

$$y(c)=y_0+\int_0^c y'(x)dx\ ,\quad y'(c)=b+\int_0^c y''(x)dx\ .$$

Рассматривая теперь $y(c), y'(c)$ как новые начальные условия для уравнения (I), получаем, что его решение, соответствующее условиям (3), может быть продолжено за точку $x=c$ на полуинтервал $[0,\bar{c})$, где $\bar{c}>c$. Получено противоречие, которое доказывает, что решение $y(x)$ задачи (I),(3) может быть продолжено на всю полупрямую $[0,\infty)$. Его ограниченность доказывается так же, как доказывалось неравенство (9) для полуинтервала $[0,c)$.

Теорема I доказана.

Для приложений теоремы (I) важен случай $f(y) = y - y^3$ и $a(x) = \alpha = const > 0$, либо $a(x) = \alpha \cdot \tanh \alpha x$, $\alpha > 0$. Оба случая удовлетворяют условиям теоремы I. Более того, поскольку $U(y) = -y^2 + 1/2y^4$ и, следовательно $\lim_{y \to \pm\infty} U(y) = +\infty$, любое решение задачи (I),(3) ограничено.

Теперь рассмотрим вопрос о существовании частицеподобных решений уравнения (I).

<u>Определение</u>. Решение $y(x)$ задачи (I)-(2) называется частицеподобным, если оно определено на полупрямой $[0, \infty)$ и $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$. Корни частицеподобного решения принято называть узлами.

Совершенно так же, как в работах /II,I2/, доказываются приводимые ниже теоремы 2-4 для уравнения (I). Далее будем считать, что коэффициент $a(x)$ непрерывен и ограничен:

$$0 \le a(x) \le A .$$

<u>Теорема 2</u>. Пусть существуют $\alpha_{-1}$, $\alpha_1$ такие, что

а) $\alpha_{-1} < 0 < \alpha_1$ ;

б) $y \cdot f(y) < 0$ при $y \in (\alpha_{-1}, \alpha_1)$, $y \neq 0$ ;

в) $a(x)$ - монотонная функция, $\int_{a_0}^{+\infty} a(x)dx = +\infty$, где $a_0 > 0$ .

г) $U(\alpha_{-1}) \geq U(\alpha_1)$ .

Тогда для любого $y_0 \in (0, \alpha_1)$ соответствующее решение $y(x)$ задачи (I)-(2) является частицеподобным.

<u>Теорема 3</u>. Пусть существуют $\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_1, \alpha_2$ такие, что

а) $\alpha_{-2} < \alpha_{-1} < 0 < \alpha_1 < \alpha_2$ ;

б) $f(y) > 0$ при $y \in \{(\alpha_{-2}, \alpha_{-1}) \cup (0, \alpha_1)\}$,
$f(y) < 0$ при $y \in \{(\alpha_{-1}, 0) \cup (\alpha_1, \alpha_2)\}$ ;

в) $U(\alpha_{-2}) \geq U(\alpha_2) > 0$ ;

г) $a \in C^1[a_0, +\infty)$, где $a_0 > 0$ ;

д) $\lim_{x \to +\infty} a'(x) = 0$ ;

е) $\lim \frac{e^{-\gamma\sqrt{\eta x}}}{a(x)} = 0$ для некоторого $\gamma \in (0,1)$, $\eta = const > 0$

ж) $f(y)$ возрастает на $[-\varepsilon, \varepsilon]$, $|f(y)| \geq \eta \cdot |y|$ при $y \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon = const > 0$.

Пусть существует $\bar{a}(\alpha_1, \alpha_2)$ такое, что при $y_0 = \bar{a}$ соответствующее решение задачи (I)-(2) имеет $r$ корней, где $r > 0$ - целое.

Тогда для любого целого $K$ : $0 \leq K \leq r-1$ существует частицеподобное решение задачи (I)-(2) с $K$ узлами, причем $y(0) \in (\alpha_1, \alpha_2)$.



<u>Теорема 4</u>. Пусть $\alpha_2$ - корень функции $f(y)$ и существуют $\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_1$ такие, что

а) $\alpha_{-2} < \alpha_{-1} < 0 < \alpha_1 < \alpha_2$ ;

б) $U(\alpha_{-2}) \geq U(\alpha_2) > \max_{y \in [\alpha_{-1}, \alpha_1]} U(y)$, $U(\alpha_2) > 0$

в) $f(y) > 0$ при $y \in (\alpha_{-2}, \alpha_{-1})$,
$f(y) < 0$ при $y \in (\alpha_1, \alpha_2)$ .

г) $\lim_{x \to \infty} a(x) = 0$

Тогда для любого натурального $r$ существует решение $y(x)$ задачи (I)-(2), имеющее не менее $r$ корней, причем $y(0) \in (\alpha_1, \alpha_2)$ .

Теорема 4 вместе с теоремой 3 дает достаточно общие условия существования частицеподобных решений с произвольным числом узлов исходя из свойств функции $f(y)$ в ограниченном интервале, содержащем точку $y = 0$. Следующая теорема, также вместе с теоремой 3, дает достаточные условия существования частицеподобных решений, но, в отличие от теоремы 4, исходя из асимптотических свойств функций $f(y)$ и $U(y)$ при $y \to \infty$.

<u>Теорема 5</u>. Пусть выполнены следующие условия:

а) функция $f$ нечетна;

б) существует $R > 0$ такое, что
$f(y) < 0$ при $y \geq R$ ;

в) $\lim_{y \to \infty} \frac{y^2}{U(y)} = 0$ .

Тогда для любого натурального $K$ найдется решение задачи Коши, имеющее не менее $K$ корней.

<u>Доказательство</u>.

Зафиксируем произвольное натуральное $K$ . Положим $D = \max_{y \in [-R,R]} U(y)$, $d = \min_{y \in [-R,R]} U(y)$ . Из тождества (4) получаем:

$$[y'(x)]^2 \leq U(y_0) - U(y(x)) \leq U(y_0) - d . \qquad (II)$$

Пусть теперь известно, что на некотором отрезке $[x_1, x_2]$ функция $y(x)$ монотонна и удовлетворяет уравнению (I). Имеем:

$$2\int_{x_1}^{x_2} a(x)[y'(x)]^2 dx \leq 2A \int_{x_1}^{x_2} |y'(x)| \cdot |y'(x)| dx \leq 2A \cdot \sqrt{U(y)-d}\,|y(x_1) - y(x_2)| . \qquad (I2)$$

Из теоремы I вытекает, что для достаточно большого значения $y_0$ выполняется следующее неравенство для всех $x \geq 0$ :

$$|y(x)| \leq y_0 \qquad (I3)$$

Поэтому для данного $y_0$

$$|y(x_1) - y(x_2)| \leq 2y_0, \tag{I4}$$

где $x_1$ и $x_2$ выбраны так же, как в неравенстве (I2).

В силу условия (в) теоремы имеем:

$$2A\sqrt{U(y_0) - d}\cdot 2y_0/[U(y_0) - D] \to 0 \quad \text{при} \quad y_0 \to \infty.$$

Поэтому найдется $y_0 > R$ такое, что выполняется неравенство

$$4y_0 A\cdot\sqrt{U(y_0) - d}\,/[U(y_0) - D] < \frac{1}{k+1}. \tag{I5}$$

Докажем, что для данного $y_0$ соответствующее решение $y(x)$ задачи (I)-(2) определено на полупрямой $[0, \infty)$ и имеет не менее $k$ корней.

Сначала докажем, что функция $y(x)$ имеет на полупрямой $[0, \infty)$ не менее $(k+1)$ точек экстремума, включая точку $x=0$. Предположим противное. Пусть $0=x_1, x_2, \ldots, x_m$ все точки экстремума функции $y(x)$ на полупрямой $[0, \infty)$, причем $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ и $m < k+1$. Положим $x_{m+1} = +\infty$. Оценим $2\int_0^\infty a(x)[y'(x)]^2 dx = I$.

Используя неравенства (I2) и (I4), получаем:

$$I = 2\sum_{i=1}^{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x)[y'(x)]^2\, dx \leq 2Am\cdot\sqrt{U(y_0) - d}\cdot 2y_0. \tag{I6}$$

Сопоставляя неравенства (I5) и (I6), получаем:

$$I < U(y_0) - D. \tag{I7}$$

Теперь докажем, что для любого $i: 1 \leq i \leq m$ $|y(x_i)| > R$.

В самом деле, $U(y(x_i)) = U(y_0) - 2\int_0^{x_i} a(x)[y'(x)]^2 dx \geq U(y_0) - 2\int_0^\infty a(x)[y'(x)]^2 dx$.

Отсюда, если учесть (I7), вытекает: $U(y(x_i)) > D$, и, следовательно, действительно $|y(x_i)| > R$.

Теперь докажем, что $y(x_i)$ и $y(x_{i+1})$ имеют разные знаки для любого $i = 1, 2, \ldots, m$. Предположим противное. Пусть также для определенности $y(x_i) > 0$. Из двух точек $x_i$ и $x_{i+1}$ одна (обозначим ее через $x_n$) заведомо является точкой локального минимума функции $y(x)$. Но тогда в этой точке $y''(x_n) = f(y(x_n)) < 0$, что противоречит необходимому условию минимума $y''(x_n) \geq 0$. Поэтому действительно $y(x_i)$ и $y(x_{i+1})$ имеют разные знаки. Наконец, докажем, что для всех достаточно больших $x$ $|y(x)| \leq R$. Поскольку $|y(x)| \leq y_0$ для всех $x \geq 0$ и функция $y(x)$ не имеет экстремумов при $x > x_m$, то функция $y(x)$ имеет горизонтальную асимптотику $y=c$. Поскольку должно выполняться условие $f(c) = 0$, то



$|c| < R$. Следовательно, для достаточно больших значений $x$ $|y(x)| \leq R$.

Из тождества (4) следует:

$$U(y_0) - \left\{U(y(x)) + [y'(x)]^2\right\}\Big|_{x=\infty} = 2\int_0^\infty a(x)[y'(x)]^2\, dx. \tag{I8}$$

Рассмотрим левую часть равенства (I8):

$$U(y_0) - \left\{U(y(x)) + [y'(x)]^2\right\}\Big|_{x=+\infty} = U(y_0) - U(c) \geq U(y_0) - D. \tag{I9}$$

Правая часть равенства (I8) была оценена в неравенстве (I7). Мы получаем протеворечие, ибо $U(y_0) - U(c) \geq U(y_0) - D$, то есть левая и правая части в (I8) не равны. Тем самым доказано, что число $m$ точек экстремума функции $y(x)$ на полупрямой $[0, \infty)$ не меньше $k+1$.

Пусть $0=x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ – наименьшие точки из множества точек экстремума функции $y(x)$, причем $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k+1}$.
Как и выше, доказывается, что $y(x_i)$ и $y(x_{i+1})$ разных знаков для любого $i = 1, 2, \ldots, k$. Поэтому функция $y(x)$ имеет не менее $k$ корней, которые расположены на интервалах $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_k, x_{k+1})$.

Теорема 5 доказана.

Из теорем 3 и 5 следует существование частицеподобных решений с любым числом узлов у следующих двух уравнений, о которых подробнее см. /I3-I4/:

1. $\varphi_{xx} - \varphi + \varphi^3 = -\alpha\varphi_x, \quad \alpha > 0$
2. $\varphi_{xx} - \varphi + \varphi^3 = -\alpha \tanh x\cdot\varphi_x, \quad \alpha > 0.$

## Литература


I. Finkelstein R.J., Lelevier R., Ruderman M. Phys.rev., 1951, 83, N°2, p.326-332.

2. Rosen N., Rosenstock H.B. Rhys.Rev., 1952, 85, N°2, 257-259.

3. Finkelstein R.J., Fronsdal C., P.Kaus. Phys.Rev., 1956, 103, N°5, 1571-1579.

4. Гласко В.Б. и др. ЖЭТФ, 1958, 35, № 2(8), 452-457.

5. Nehari Z., Proc.Royal Arish.Acad, 1963, N°9, A62, 118-135.

6. Жидков Е.П., Шириков В.П. ОИЯИ, Р-1319, Дубна, 1963.

7. Жидков Е.П., Шириков В.П. ЖВМ и МФ, 4, № 5, 1964, 804-816.
8. Жидков Е.П., Шириков В.П., Пузынин И.В. ОИЯИ, 2005, Дубна, 1965.
9. Ryder G.H. Pacific J.Math.22,477(1967) , 477-503 .
10. Strauss W. Commun.in math Phys. 55 , 149-162 (1977) .
11. Жидков Е.П., Жидков П.Е. ОИЯИ, Р5-12609, Дубна, 1979.
12. Жидков Е.П., Жидков П.Е. ОИЯИ, Р5-12610, Дубна, 1979.
13. Makhankov V.G. Phys.Reports,vol 35 , N°1 ,1978 .
14. Fedyanin V.K. , Makhankov V.G. Phisica Scripta (Sweden) 18, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 января 1982 года.



Жидков П.Е. 5-82-68
Существование частицеподобных решений в некоторых моделях нелинейной физики

Исследуется нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Используется метод качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены достаточные условия существования частицеподобных решений с произвольным числом узлов. Исследовано их качественное поведение. Результат применен к двум физическим моделям.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Zhidkov P.E. 5-82-68
On Particle-Like Solutions in Some Models of Nonlinear Physics

The nonlinear common 2-nd order differential equation is studied. The method of qualitative theory of usual differential equations is used. The sufficient conditions of the existence of particle-like solutions with some zeros are obtained. Their qualitative properties are investigated. The result is applied to two physical models.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.