сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

5-82-631

А.Двуреченский, Г.А.Ососков

РЕКУРРЕНТНЫЕ СОБЫТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ТРЕБОВАНИЙ, ОБСЛУЖЕННЫХ ЗА ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ СИСТЕМЫ $GI/GI/\infty$

1982

I. Введение

Методы математической теории массового обслуживания для систем с бесконечным числом обслуживающих устройств могут быть с успехом использованы при решении некоторых актуальных проблем ядерной физики.

Например, как показано в /I/, система $M/GI/\infty$ достаточно хорошо описывает структуру следов элементарных частиц в трековых камерах физики высоких энергий и позволяет получить важные статистические оценки в задаче определения первичной ионизации стримерных треков (см. также /2,3/).

Более общая схема $GI/GI/GI/\infty$ позволяет рассматривать и другие вопросы, возникающие в экспериментальной физике, в том числе задачу расчета периода занятости при групповом прибытии заявок /3/.

Одной из прикладных задач является определение числа обслуживаемых требований на протяжении периода занятости системы. Точное решение этой задачи,а также предельные распределения, когда среднее число требований стремится к бесконечности, были впервые получены в работе /4/.

В настоящей заметке точные распределения числа требований получены без решения интегральных уравнений, как в /4/, а элементарным путем при помощи теории рекуррентных событий /5/ .Даны также геометрические оценки точных распределений. Эти результаты вытекают из некоторых полученных нами предельных свойств для рекуррентных событий с невозрастающими вероятностями.

2. Предельные теоремы для рекуррентных событий

Рассмотрим последовательность испытаний, при каждом из которых появляется (или не появляется) событие A . Появление события на n -м шаге будем обозначать как A_n , а его непоявление - $\overline{A}_n$.

Здесь через $\Psi(z)$ обозначена сумма $\Psi(z) = P(A_1)z + \sum_{n=2}^{\infty} (P(A_n) - P(A_{n-1}))z^n$.

Доказательство

Из формулы Коши /6/ вытекает, что

$$P_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\Psi(z)\,dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\Psi(z)\,dz}{(1-z+\Psi(z))z^{n+1}}\ .$$

Используя условие теоремы, можно доказать, что уравнение $1-z+\Psi(z)=0$ имеет единственный (простой) положительный корень $z=\beta>1$, который минимален по модулю, так как

$$1-z+\Psi(z) = 1-z\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad и \quad a_n \geq 0.$$

Пусть $R>1$ – радиус круга, в котором функция $1-z+\Psi(z)$ имеет единственный нуль $z=\beta$.

Тогда

$$r_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{\Psi(z)\,dz}{z^{n+1}} = \frac{\Psi(\beta)}{(\Psi'(\beta)-1)\beta^{n+1}} + P_n\ . \qquad (2.10)$$

Интеграл в левой части (2.10) можно оценить максимумом модуля $|r_n| \leq C R^{-n}$. Обозначая $\beta_1 = 1/(1-\Psi'(\beta))$, из (2.10) получаем формулу (2.9).

Чтобы найти явные выражения для β и β_1, рассмотрим функцию $w = z - \Psi(z)$, которая конформным образом отображает некоторую окрестность точки $w=1$. Поэтому $w=w(z)$ имеет обратную к ней функцию $z=z(w)$. Легко видеть, что $\beta = z(1)$ и $\beta_1 = z'(1)$.

Рассмотрим теперь применение развитой нами теории для одной задачи массового обслуживания.

Требования поступают на систему обслуживания, состоящую из бесконечного числа однотипных приборов в моменты $0<\tau_1<\tau_2<\ldots<\infty$.

Время обслуживания n-го требования – случайная величина x_n, причем все $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – положительны, независимы в совокупности и одинаково распределены с функцией распределения $H(t)=P(x_1<t)$. Предположим, что $\{T_n = \tau_n - \tau_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ $(\tau_0=0)$ – последовательность одинаково распределенных положительных случайных величин с функцией распределения $F(t)=P(T_1<t)$, не зависящих как друг от друга, так и от последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть в – случайная величина, обозначающая период занятости системы GI/GI/∞, т.е. период, когда занят, по крайней мере, один

прибор. Рассмотрим целочисленную случайную величину ν – число требований, которые были обслужены в течение периода B.

Если обозначить через q_n число занятых приборов в момент поступления n-го требования, то

$$P(\nu=1) = P(q_2=0),$$

и

$$P(\nu=n) = P(q_2\geq1,\ldots,q_n\geq1,\ q_{n+1}=0\}, \qquad n\geq2.$$

Рассмотрим последовательность событий $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что

$$A_n = \{q_{n+1}=0\}.$$

Если предположить, что $P(A_1)>0$ ($P(A_1)=0$ соответствует случаю, когда за период занятости обслуживается бесконечное число требований), то события $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ – рекуррентны и удовлетворяют также условию (2.3).

Теорема 3.1. Если $P(A_1)>0$, то вероятность P_n того, что за период занятости системы $GI/GI/\infty$ было обслужено $\nu=n$ требований, вычисляется по формуле (2.4), где

$$P(A_n) = \int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} H(t_1)\ldots H(t_1+\ldots+t_n)\,dF(t_1)\ldots dF(t_n), \qquad (3.1)$$

$$n\geq1,$$

и среднее число – по формуле (2.6) только тогда, когда $p=\lim P(A_n)>0$.

Для того, чтобы случайная величина была собственной (т.е. $P(\nu<\infty)=1$), достаточно, чтобы $p>0$. В работе /4/ дан ряд условий, гарантирующих, что $p>0$. Например, достаточно, чтобы $M(X_n) = \int_0^{\infty} t\,dH(t) < \infty$.

Введение функций q_n позволило нам использовать вышеразвитый простой аппарат рекуррентных событий с невозрастающими вероятностями.

Теперь дадим достаточное условие, чтобы для системы $GI/GI/\infty$ имела место теорема об оценке вероятности числа требований, обслуженных за период занятости.

Лемма 3.2. Пусть случайная величина x_1 ограничена. Тогда имеет место соотношение (2.9) теоремы 2.2.

Доказательство. Имеем следующую цепочку неравенств:

$$0 \le a_n \le P(A_n) - P(A_{n+1}) = P(\chi_1 < \tau_1, \ \chi_2 < \tau_2, \dots, \chi_n < \tau_n, \chi_{n+1} \ge \tau_{n+1}) \le P(\chi_{n+1} \ge \tau_{n+1}).$$

Из ограниченности χ_1 вытекает, что для любого $\lambda > 0$ $M(e^{\lambda \chi_1}) < \infty$ и поэтому

$$P(\chi_{n+1} \ge \tau_{n+1}) \le M(e^{\lambda \chi_1}) M(e^{-\lambda \tau_1})^{n+1},$$

и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет радиус сходимости $R \ge 1/M(e^{-\lambda \tau_1}) > 1$. Устремляя λ к бесконечности, получаем $R = \infty$. Условие теоремы 2.2 выполнено.

В работе /7/ найдены преобразования Лапласа периода занятости для систем $GI/D/\infty$ и $M/GI/\infty$. Общий случай для системы массового обслуживаний $GI/GI/\infty$ авторам пока неизвестен. Но имеется следующая верхняя оценка:

$$B \le \sum_{i=1}^{n-1} T_i = B_2.$$

При этом ясно, что B_2 - это сумма периодов занятости B и простоя B_1.

Теорема 3.3. Преобразование Лапласа цикла обслуживания имеет вид

$$\Phi(s) = \varphi^*(a(s)), \quad s \ge 0, \tag{3.2}$$

где

$$a(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t), \quad s \ge 0, \tag{3.3}$$

и

$\varphi^*(z)$ обозначает производящую функцию $\varphi(z)$, в которой $F(t)$ заменено на

$$F^*(t,s) = \bar{a}^{1}(s) \int_0^t e^{-sx} dF(x).$$

Средняя величина цикла обслуживания $M(B_2)$ имеет вид

$$M(B_2) = M(T_1) M(\nu). \tag{3.4}$$

Доказательство.

$$\Phi(s) = M(e^{-sB_2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{\nu = n\}} e^{-s(\tau_2 + \dots + \tau_{n+1})} dP =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int \dots \int_{C_n} e^{-s(t_2 + \dots + t_{n+1})} dF(t_2) \dots dF(t_{n+1}) dH(x_1) \dots dH(x_n),$$

где область интегрирования C_n имеет вид

$$(x_1 \le t_2)^c, \begin{pmatrix} x_1 < t_3 + t_2 \\ x_2 \le t_3 \end{pmatrix}^c, \dots, \begin{pmatrix} x_1 < t_n + \dots + t_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} < t_n \end{pmatrix}^c,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \le t_{n+1} + \dots + t_2 \\ x_n \le t_{n+1} \end{pmatrix}$$

(здесь знак „c" обозначает дополнение в E^n к множеству, указанному в скобках):

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n(s) P(\nu^* = n) = \varphi^*(a(s)).$$

Используя это тождество или тождество Вальда, можно доказать (3.4). Теорема доказана.

4. Примеры приложений

Используя предельные свойства случайных величин q_n, исследованные Л.Такачем/8/, можно вывести соотношения, полезные в конкретных приложениях.

Пример 4.I. Простейший входной поток (система $M/GI/\infty$).

Пусть

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0,$$

тогда

$$P(A_n) = \lambda^{n+1} / n! \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^t H(x) dx \right\}^n e^{-\lambda t} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и

$$\varphi(z) = 1 - \left(\lambda \int_0^{\infty} \exp\left(-\lambda \int_0^t (1 - z H(x)) dx\right) dt\right)^{-1}.$$

Используя теорему 3.3, можно найти преобразование Лапласа для цикла B_2:

$$\Phi(s)=1-((\lambda+s)\int_0^\infty exp(-st-\lambda\int_0^t(1-H(x))dx)dt)^{-1}, \tag{4.1}$$

а учитывая независимость периодов простоя и занятости, получим также преобразование Лапласа для цикла занятости B

$$\Phi_B(s)=1+s/\lambda-(\lambda\int_0^\infty exp(-st-\lambda\int_0^t(1-H(x))dx)dt)^{-1}. \tag{4.2}$$

Эти выводы отличны от тех, что были сделаны в /7/ и, по-видимому, проще.

Если

$$h=\int_0^\infty t\,dH(t)<\infty,$$

то

$$M(\nu)=e^{\lambda\cdot h}, \tag{4.3}$$

$$M(B_2)=e^{\lambda h}/\lambda, \tag{4.4}$$

$$M(B)=(e^{\lambda h}-1)/\lambda. \tag{4.5}$$

В приложении к задаче об определении параметра ионизации стримерных треков /I/ (4.3) дает нам среднее число первичных центров ионизации в сгустке стримеров, (4.5) – дает среднюю длину сгустка и (4.4) – среднюю длину сгустка и промежутка.

Пример 4.2. Показательное время обслуживания (система GI/M/∞).

Пусть

$$H(t)=1-e^{-\mu t},\quad t\geq 0,$$

тогда

$$M(\nu)=p^{-1},$$

где

$$p=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k B_k,$$

$$B_k=\prod_{i=1}^k\frac{a(i\mu)}{1-a(i\mu)},\quad k>1,\quad B_0=1,$$

$a(s)$ – преобразование Лапласа (3.2).

Пример 4.3. Постоянное время обслуживания (система GI/D/∞).

Пусть $\rho>0$ и

$$H(t)=\begin{cases}0, & t\leq\rho,\\ 1, & t>\rho,\end{cases}$$

тогда

$$P(A_n)=I,\quad n=1,2,\ldots,$$

$$P_n=I(1-I)^{n-1},\quad n=1,2,\ldots,$$

$$M(\nu)=I^{-1},$$

где

$$I=1-F(\rho).$$

Система GI/D/∞ может служить моделью стримерных треков с пузырьковых камер (см., например, /9/).

Пример 4.4. Групповое прибытие заявок (система GI/GI/GI/∞).

Пусть требования приходят на обслуживание партиями объемов $\nu_1,\nu_2,\ldots$, а $\chi_{n_1},\ldots,\chi_{n\nu_n},\ldots$ – случайный вектор времен обслуживаний в n-й партии и $\chi_n=\max_{1\leq i\leq\nu_n}\chi_{ni}$. Тогда $\{\chi_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, и число партий ν, обслуженных за период занятости системы GI/GI/GI/∞, равно числу требований, обслуженных за период занятости системы GI/GI/∞ с тем же входным потоком, но другим временем обслуживания, распределенным по закону

$$\tilde H(t)=P(\chi_1<t)=\sum_{n=1}^\infty H^n(t)\,P(\nu_1=n).$$

Система GI/GI/GI/∞ может служить моделью стримерного трека при учете эффектов сканирования /3/.

Пусть $\varkappa$ – число требований, обслуженных за период занятости системы GI/GI/GI/∞. Тогда по теории о полной вероятности имеет место

$$P(\varkappa=N)=\sum_{n=1}^N\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=N\\ k_1\ldots k_n\geq 1}}P(\nu_1=k_1)\ldots P(\nu_1=k_n)\,P(\nu=n),$$

$$N=1,2,\ldots.$$

В заключение отметим, что в системе GI/GI/m с ожиданием число требований $\nu = n$, обслуженных за период занятости, для $n = 1,\dots,m$ вычисляется по формуле (2.4).

Литература

1. Двуреченский А. и др. ОИЯИ, 5-81-362, Дубна, 1981.
2. Кулюкина Л.А. и др. ОИЯИ, Р5-11143, Дубна, 1976.
3. Dvurečenskij A. et al. JINR E10-82-136, Dubna, 1982.
4. Афанасьева Л.Г., Михайлова И.В. О числе требований, обслуженных за период занятости. Изв. АН СССР, Техн. киберн., № 6, 1978, с.106.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложение, т.I, "Мир", М., 1967.
6. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций, "Наука", М., 1978.
7. Афанасьева Л.Г., Михайлова И.В. Предельные распределения периода занятости в системах $M/G/\infty$ и $GI/D/\infty$ в условиях большой загрузки. В кн.: "Материалы Всесоюзн. симп. по статистике случайных процессов". Изд-во Киевского ун-та, 1973.
8. Takács L. Queues with infinitely many servers. RAIRO Rech Oper., 14, 1980, pp. 109-113.
9. Glückstern R.L. Nucl. Instr. Meth., 45,1965, pp. 196-172.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 августа 1982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Двуреченский А., Осоксов Г.А. 5-82-631
Рекуррентные события и определение числа требований, обслуженных за период занятости системы $GI/GI/\infty$

Методом рекуррентных событий исследуется распределение числа требований, обслуженных за период занятости системы массового обслуживания с бесконечным числом каналов обслуживания. Определены и другие основные характеристики, как, например, среднее число и производящая функция. Предельные теоремы гарантируют при некоторых условиях экспоненциальность предельного распределения и геометрическое поведение хвоста распределения. Результаты применены к решению задачи о числе центров стримеров в стримерном сгустке и определению длины сгустка.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Dvurečenskij A., Osokov G.A. 5-82-631
Recurrent Events and Determination of the Number of Customers Served During the Busy Period of a $GI/GI/\infty$ Queue

By the method of recurrent events the distribution of the number of customers served during the busy period of a queueing system with infinitely many servers is investigated. Some basic characteristics as a mean value and a reproducing function are determined. Under some conditions the limit theorems assure the exponential type of a limit distribution, as well as the geometric type of a distribution queue. The results are applied to a solution of the problem on the number of streamer centres in a streamer blob, and to the blob length determination.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.