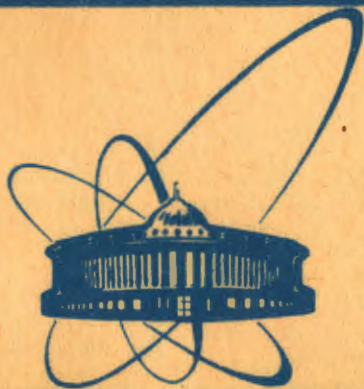


82-456



сообщения
Объединенного
института
ядерных
исследований
Дубна

4546/82

27/9-82

5-82-456

В.Б.Радоманов, Л.М.Сороко

ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ
ПРИ ПОМОЩИ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ.

Результаты моделирования

1982

В данной работе представлены результаты моделирования алгоритма решения системы линейных уравнений

$$[H] \vec{f} = \vec{s} \quad /1/$$

методом псевдообращения, где $[H]$ - матрица системы уравнений, \vec{f} - вектор искоемых данных, \vec{s} - заданный вектор. Сущность метода псевдообращения^{/1,2/} состоит в том, что в качестве оценки решения берут вектор

$$\vec{\hat{f}} = [H]^+ \vec{s}, \quad /2/$$

где

$$[H]^+ = [[H^T H]^{-1}] [H^T] - \quad /3/$$

псевдообратная матрица, которую находят при помощи сингулярного разложения в виде суммы

$$[H]^+ = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i^{-1} \vec{u}_i^T \vec{v}_i, \quad /4/$$

где λ_i - сингулярные числа матрицы $[H]$, а \vec{u}_i и \vec{v}_i - собственные векторы матрицы произведений $[H][H]^T$ и $[H]^T[H]$ соответственно. В силу свойств дискретной циклической свертки^{/3/}

$$v_i = v_{N-i} \quad (i=0, 1, \dots, N-1). \quad /5/$$

Оценка решения задается усеченной суммой

$$\vec{\hat{f}}_k = \sum_{i=0}^k \lambda_i^{-1} (\vec{u}_i^T \vec{s}) \vec{v}_i, \quad /6/$$

в которой слагаемые расположены в порядке убывания сингулярных чисел λ_i . Число слагаемых в усеченной сумме /6/ $k \leq N-1$ определяется условием $\lambda_k \approx 0$. Случай $\lambda_k \approx 0$ может иметь место для гауссовой функции размытия, максимум которой расположен не на главной диагонали, а сдвинут от нее на величину, превышающую полуширину функции размытия. Матрицы такого типа были рассмотрены в^{/4/}. При этом число "почти нулевых" сингулярных чисел равно примерно отношению числа элементов, на которые сдвинута главная диагональ, к числу элементов, характеризующих полуширину функции размытия.

Абсолютная неустойчивость задачи возникает в случае, когда матрица $[H]$ имеет неполный ранг или когда вектор $\{\lambda_i\}$ содер-

жит резкие /более чем на порядок/ изменения значений своих компонент. Обратным сдвигом элементов матрицы [H] можно избавиться от указанной абсолютной неустойчивости задачи.

Как известно^{/5/}, мера устойчивости обратной задачи характеризуется условным числом, равным в методе псевдообращения отношению наибольшего сингулярного числа к наименьшему. Это отношение указывает, во сколько раз ошибки оценки решения уравнения больше среднеквадратичной амплитуды шумов при измерении вектора \vec{s} . В отличие от корректной задачи устойчивость задачи в методе псевдообращения не определяется детерминантом матрицы [H], равным

$$\det[H] = \prod_{i=0}^{N-1} \lambda_i. \quad /7/$$

Используемый в работе метод псевдообращения относится к классу линейных методов решений обратной задачи и, как демонстрирует рассмотренный ниже пример, близок к методу решения обратной задачи при помощи фурье-алгоритма. Итерационный процесс здесь представляет собой суммирование независимых, не связанных по управлению членов. Мы рассмотрим часто встречающийся в практике случай матриц, получивших название осцилляционных, относящихся к классу более широкому, чем матрицы с положительными элементами. Заметим, что матрицы размытия изображения, соответствующие преобразованиям типа свертки, относятся к матрицам осцилляционного типа. Собственные векторы в методе сингулярного разложения для матриц осцилляционного типа^{/8/} образуют базис, близкий к базису из синусоидальных функций, а индекс собственного вектора непосредственно связан с числом изменений знака компонент собственного вектора. Массив сингулярных значений, усеченных сверху по индексу i , эквивалентен конечной полосе пространственных частот, которую подобным образом ограничивают сверху в фурье-алгоритме^{/7/}. При этом частоту обрыва выбирают из условия, чтобы спектральные плотности шума и сигнала были равными. Однако спектр шумов часто неизвестен, и в явном виде указанный критерий невозможно использовать ни в фурье-алгоритме, ни в методе сингулярного разложения. Поэтому итерационный процесс ведут до такого k , при котором норма вектора невязки^{/8/}

$$\|\vec{s} - \vec{s}_k\|, \quad \vec{s}_k = [H]_k \vec{f}_k, \quad /8/$$

$$[H]_k = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \vec{v}_i \vec{u}_i^T,$$

достигает абсолютного минимума, или же обрывают тогда, когда абсолютная величина отрицательных выбросов достигает минимальной величины. В последнем случае алгоритм допускает вычитание плавного фона из вектора \vec{s} .

Возмущения, испытываемые вектором \vec{s} , и соответственно вариации искомого решения \vec{f} , вызванные шумами, можно было бы компенсировать, если варьировать матрицу задачи [H] или, что эквивалентно, значения сингулярных чисел. Цель этих вариаций состоит в том, чтобы преобразовать нулевые сингулярные значения в ненулевые, оставаясь в рамках известных данных о шумах. Число нулевых сингулярных значений матрицы [H] должно быть равно числу свободных параметров той однородной системы уравнений, которую добавляют к псевдообратной системе уравнений. Этот подход перекликается с методами регуляризации линейных алгоритмов решения обратных задач^{/9,10/}, когда исходную задачу заменяют на эквивалентную, в которой значения сингулярных чисел ограничены снизу.

Та же цель достигается при помощи фильтрации Винера^{/7/} путем замены сингулярных чисел λ_i на скорректированные значения $\tilde{\lambda}_i$ так, что

$$\tilde{\lambda}_i^{-1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \sigma}, \quad /9/$$

где σ - параметр, определяемый отношением спектральной плотности шума к средней амплитуде полезного сигнала.

Соотношение /9/ можно рассматривать как частный случай более общего алгоритма фильтрации. А именно, если в задаче требуется выделить эффект на гладком фоне, то накладывают требование непрерывности второй производной. Связь между дискретными и непрерывными задачами здесь не рассматривается. По этому поводу см., например,^{/10,11/}.

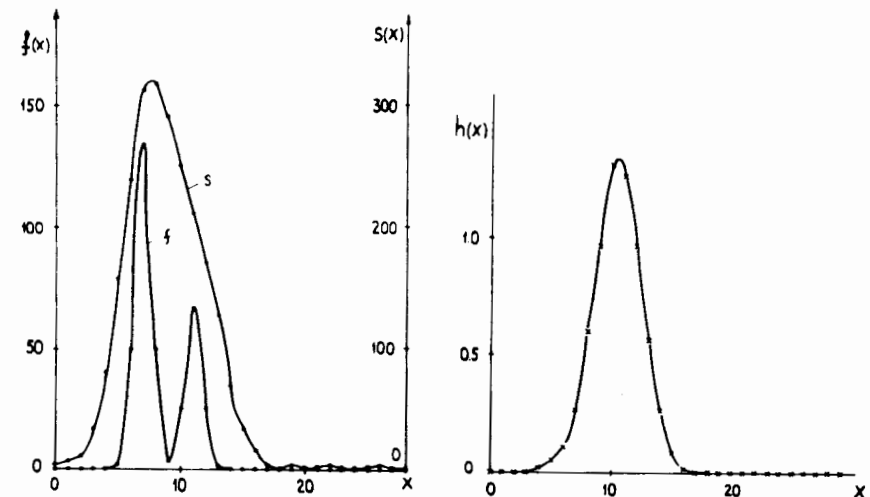


Рис.1. а/ Исходная функция $f(x)$, измеренная функция $s(x)$ и оценка исходной функции $f(x)$; б/ функция размытия $h(x)$.

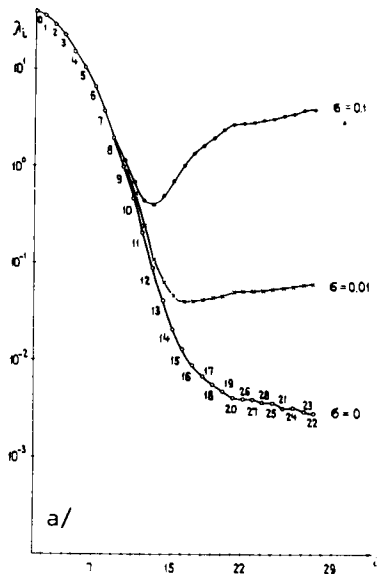


Рис.2. а/ Сингулярные числа λ_k задачи для трех значений параметра Винера σ ; б/ собственные векторы матриц $[H][H]^T$ и $[H]^T[H]$.

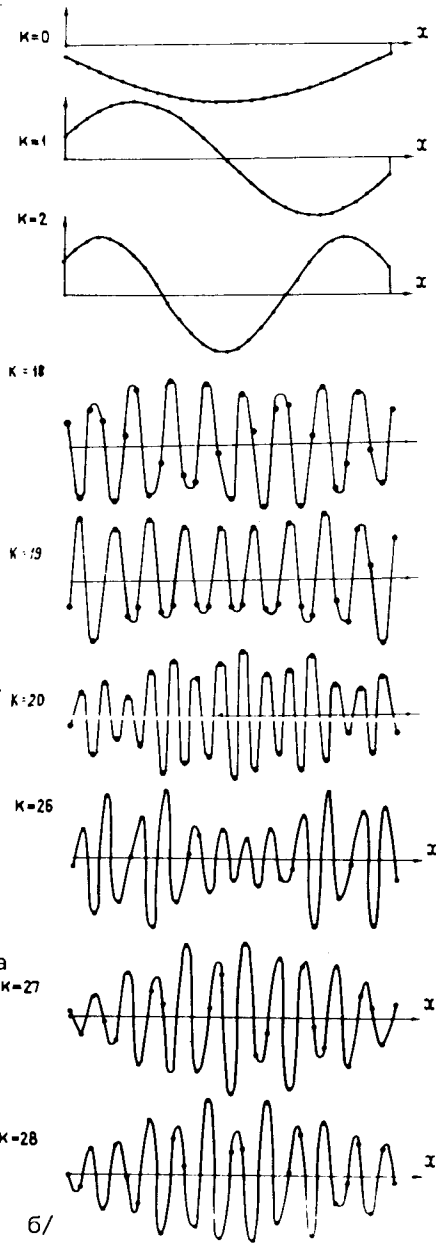
Переход /9/ эквивалентен переходу

$$[H]^+ \rightarrow [\tilde{H}]^+ = [[H]^T[H] + [F]][H]^T, \quad /10/$$

где $[F]$ - симметричная матрица вида

$$[F] = \sum_{i=0}^p a_i [Q_i], \quad /11/$$

а $[Q_i]$ - симметричные ленточные матрицы /6,12/ с $(2i+1)$ диагоналями, элементы которых отличны от нуля, причем $[Q_0] = [I]$ - единичная матрица. Число p выбирают из условия непрерывности p -й производной. В дискретных задачах обычно учитывают только первое слагаемое с $p=0$. В случае, если решение подвергают последующей обработке, требуется стабилизатор более высокого порядка в соответствии со сделанным выше замечанием.



б/

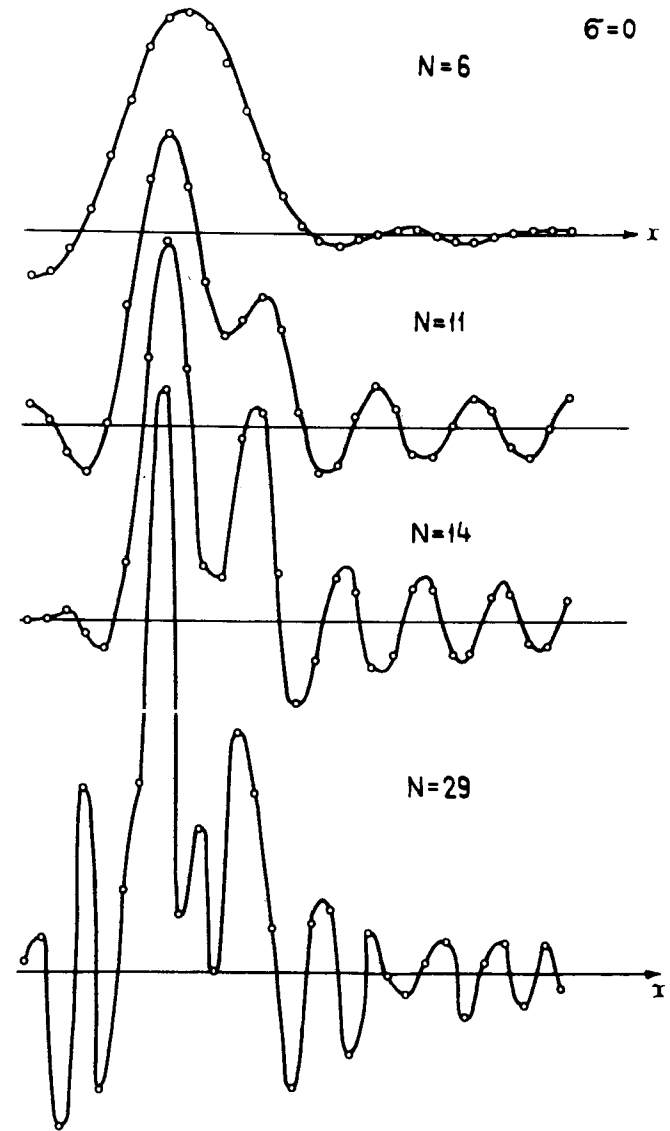


Рис.3а. Динамика нахождения искомого решения ($\sigma=0$).

В условиях, когда о шуме ничего неизвестно, вместо σ в /9/ можно ввести стабилизатор /7,9,13/

$$U_p = \sum_{i=0}^p a_i \omega_i^{2p},$$

/12/

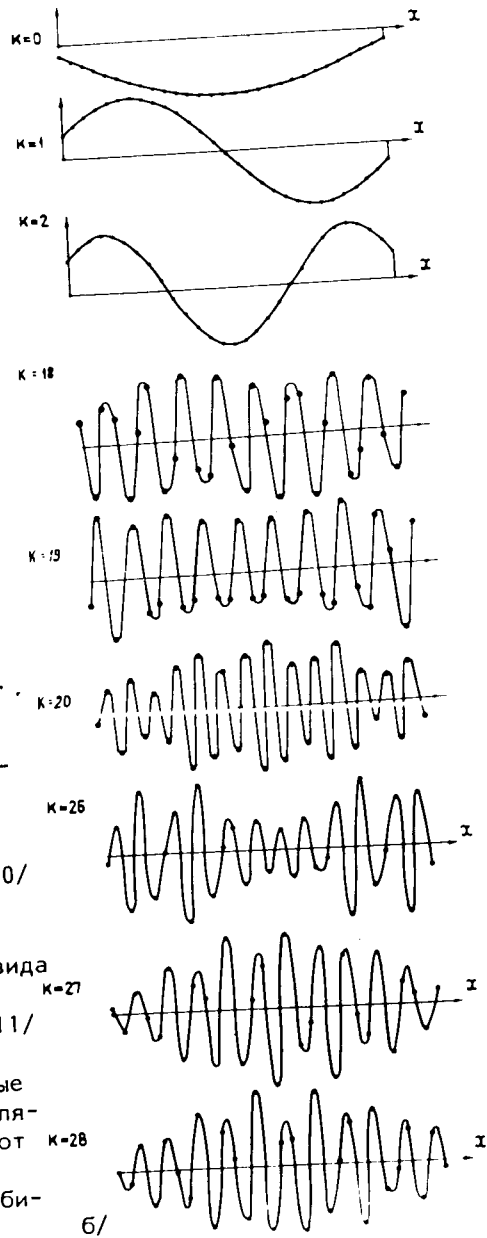
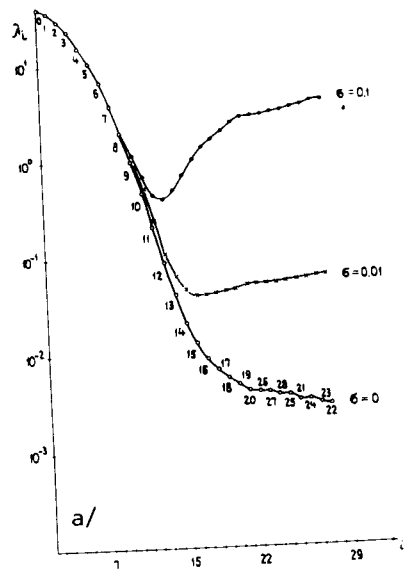


Рис.2. а/ Сингулярные числа λ_k задачи для трех значений параметра Винера σ ; б/ собственные векторы матриц $[H][H]^T$ и $[H]^T[H]$.

Переход /9/ эквивалентен переходу

$$[H]^+ \rightarrow [\tilde{H}]^+ = [[H]^T[H] + [F]][H]^T, \quad /10/$$

где $[F]$ - симметричная матрица вида

$$[F] = \sum_{i=0}^p a_i [Q_i], \quad /11/$$

а $[Q_i]$ - симметричные ленточные матрицы /6,12/ с $(2i+1)$ диагоналями, элементы которых отличны от нуля, причем $[Q_0] = [I]$ - единичная матрица. Число p выбирают из условия непрерывности p -й производной. В дискретных задачах обычно учитывают только первое слагаемое с $p=0$. В случае, если решение подвергают последующей обработке, требуется стабилизатор более высокого порядка в соответствии со сделанным выше замечанием.

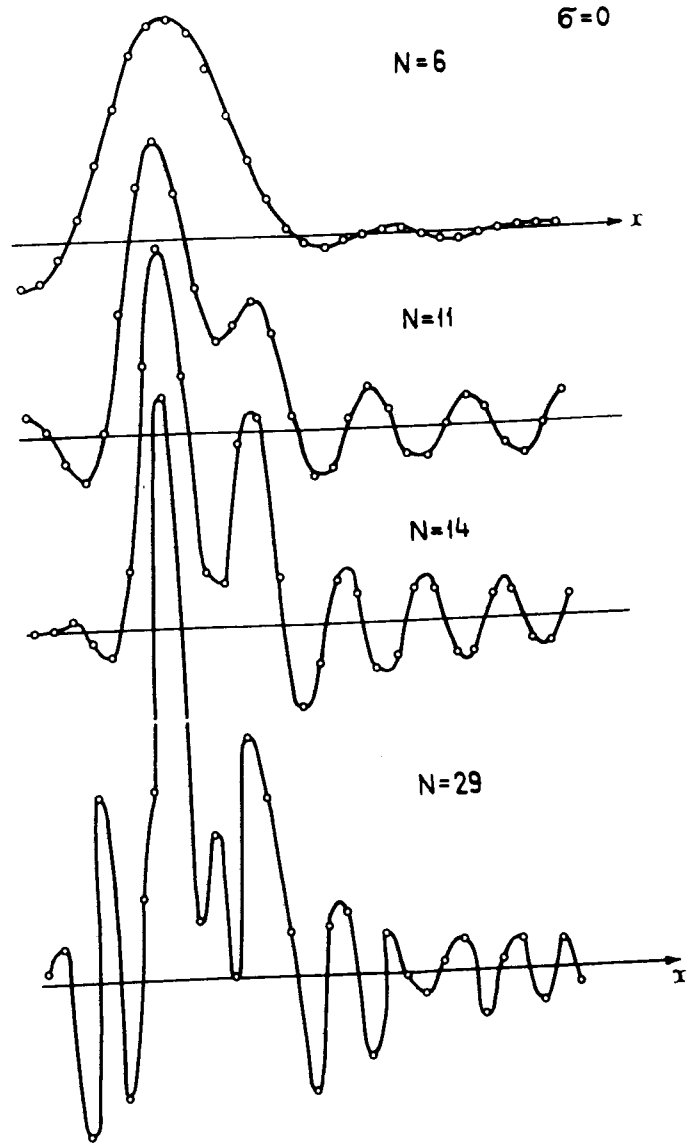


Рис.3а. Динамика нахождения искомого решения ($\sigma=0$).

В условиях, когда о шуме ничего неизвестно, вместо σ в /9/ можно ввести стабилизатор /7,9,13/

$$U_p = \sum_{i=0}^p a_i \omega_i^{2p},$$

где α_i - коэффициенты, которые подбирают по критерию минимума невязки, а ω_i - дискретная переменная, имеющая смысл частоты в обобщенном преобразовании Фурье.

В моделирующих расчетах был рассмотрен случай матрицы $[H]$ полного ранга с неотрицательными элементами, причем элементы главной и двух соседних диагоналей положительны, т.е. матрица является осцилляционной ^{/12/}. Сингулярные числа у таких матриц различны, и если их расположить в убывающем порядке, то соответствующие собственные векторы характеризуются числом перемен знака, равным порядковому номеру сингулярного числа.

В рассмотренном примере была взята квадратная матрица $[H]$ размером $N \times N = 29 \times 29$, задающая преобразование /1/ в виде свертки /3/ и поэтому являющаяся циклической. Каждая строка $[H]$ яв-

ляется дискретным представлением функции размытия h^* /рис.1а/. Вектор \vec{s} был вычислен по заданной $[H]$ и исходному вектору \vec{f} , описывающему спектр в виде дублета, при помощи /1/ с добавлением пуассоновского шума. Компоненты векторов \vec{f} и \vec{s} даны на рис.1б.

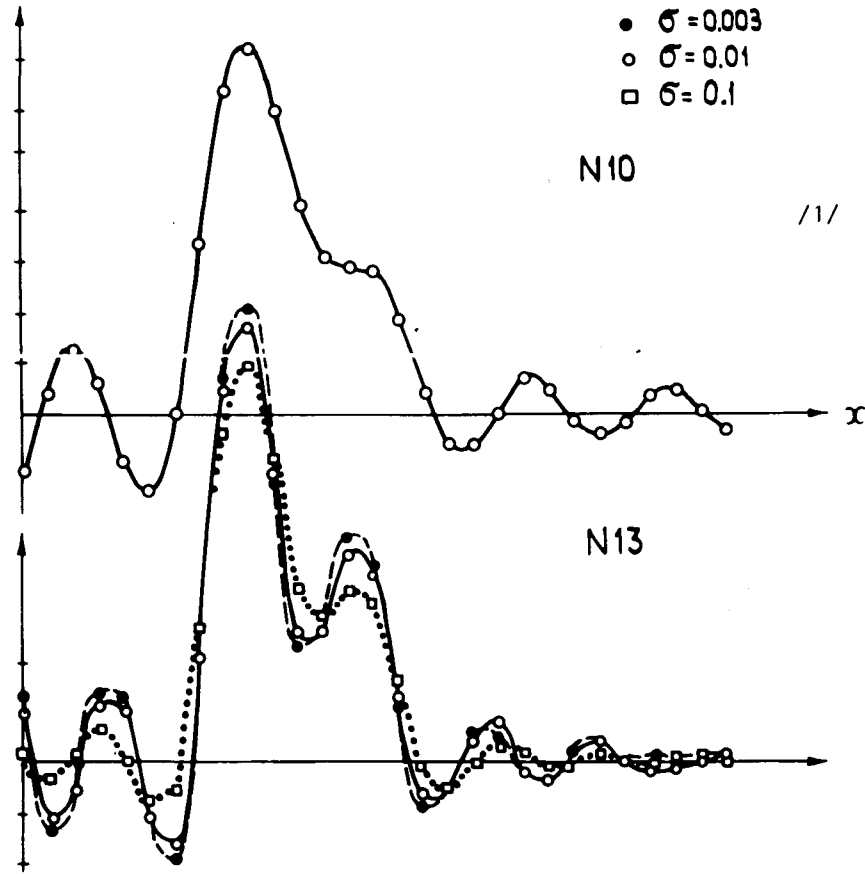
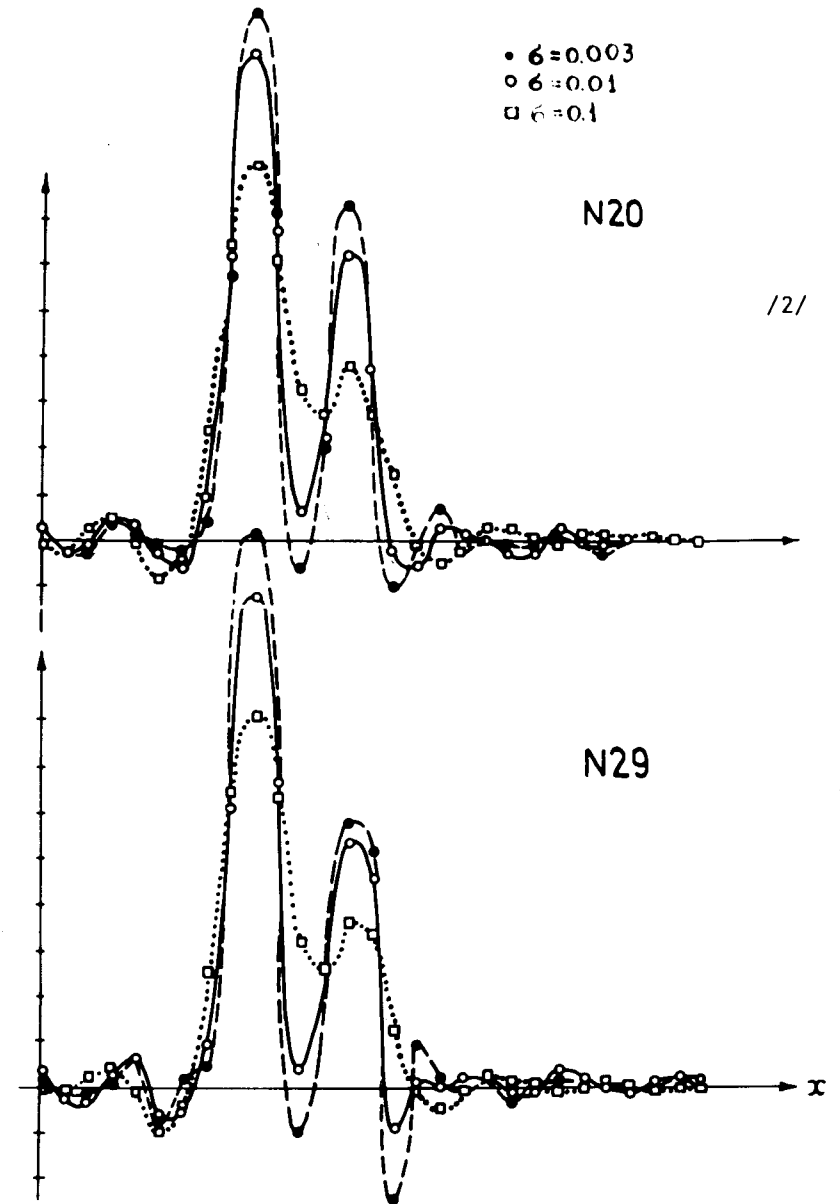


Рис.3б. Динамика нахождения решения с использованием алгоритма Винера ($\sigma \neq 0$).



Отношение интенсивностей компонент дублета равно 2:1. Расщепление в дублете составляет $\Delta x = 4a$, где a - шаг дискретизации. Дисперсия каждой спектральной линии $\sigma_0 = a$. Ширина функции размытия на полувысоте была достаточно большой и составляла $\delta = 4,4a$. Число событий в максимуме $s(x)$ равно 320. Отметим, что выбранные в рассматриваемом примере условия являются достаточно трудными для задач такого типа.

На рис.2а представлен спектр сингулярных значений $\tilde{\lambda}_i$ моделированной задачи при трех значениях параметра σ . На рис.2б приведены выборочно собственные векторы матрицы [H]. Заметим, что в случае гауссовой функции размытия спектр сингулярных значений $\{\lambda_i\}$ описывается также гауссовой функцией. Отступление от гауссовой функции размытия приводит к появлению "хвостов" в спектре сингулярных значений.

На рис.3 показана динамика получения искомого решения, причем каждый шаг соответствует результату на итерации с индексом "k" в /6/ без какой-либо дополнительной обработки.

На рис.4 приведены заданная искомая функция \tilde{f} и оценка решения задачи, полученная псевдообращением с параметром $\sigma = 0,01$. На рис.5 показана динамика приближения к истинному, нулевому, значению отрицательных выбросов функции $f(x)$ в двух точках, одна из которых расположена слева от дублета, а вторая - справа, для случаев $\sigma = 0$ и $\sigma = 0,01$. Из рис.5 видно, что отклонения от нуля изменяются немонотонно с номером итерации и имеется оптимальный номер итерации k , на которой целесообразно прервать процесс нахождения оценки искомого решения.

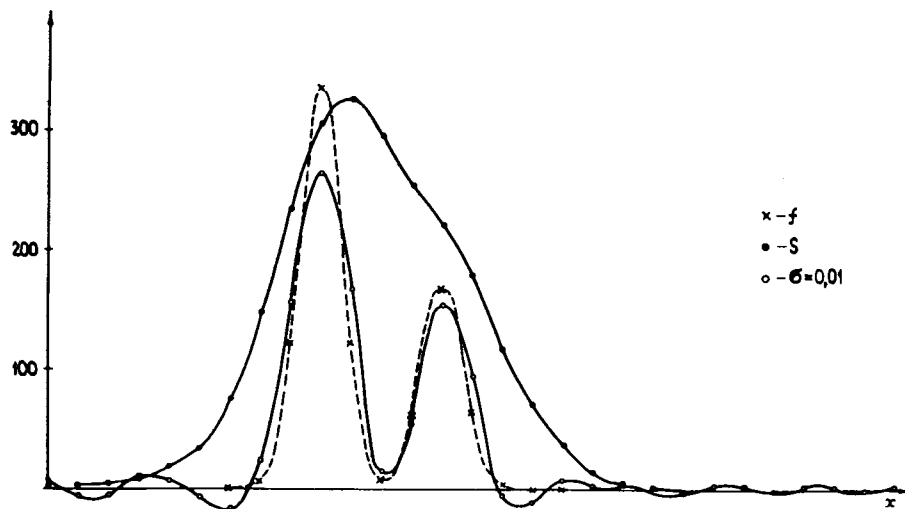


Рис.4. Исходная функция $f(x)$ и ее оценка, полученная для $\sigma = 0,01$.

Рис.5. Амплитуда выбросов относительно нулевых значений исходной функции в точках, расположенных справа и слева от дублета.

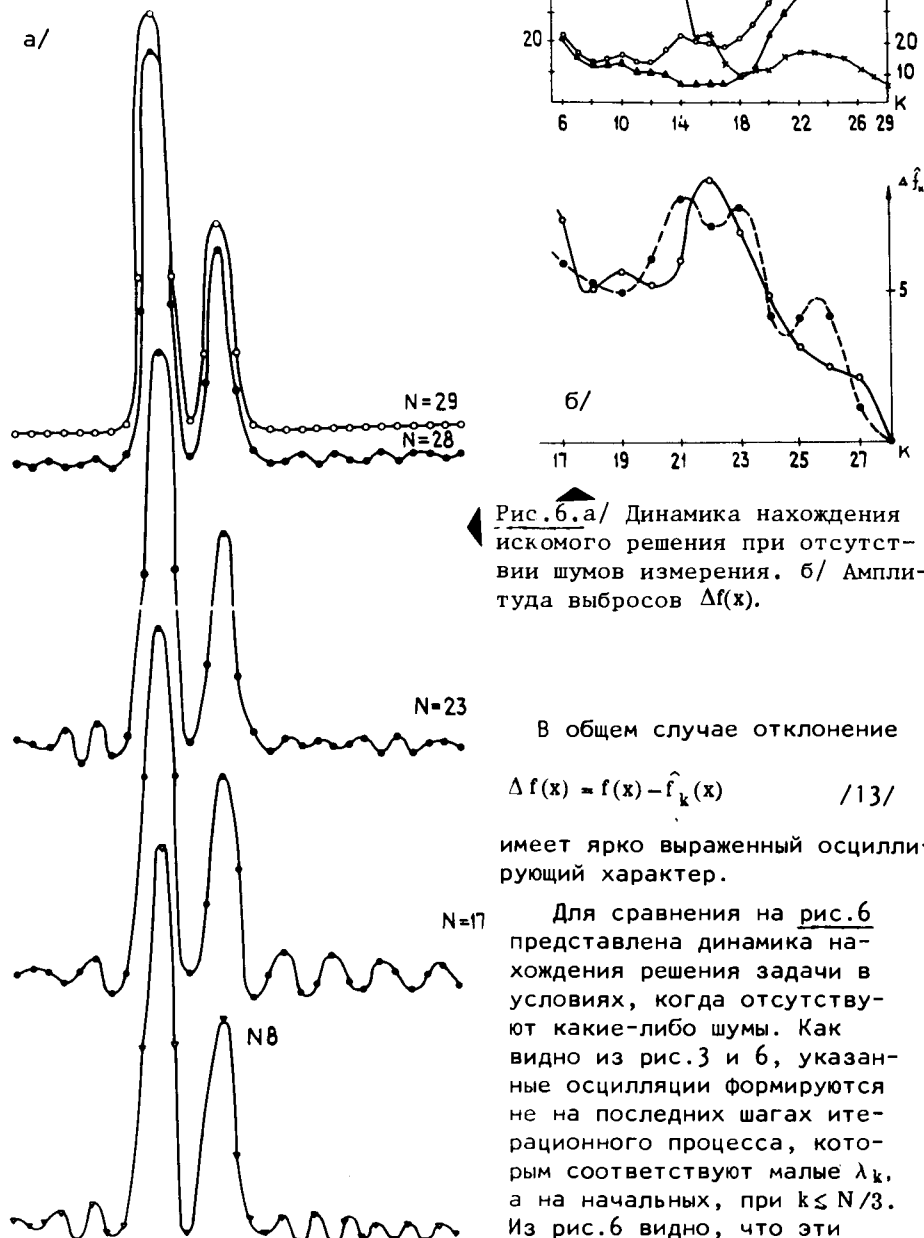


Рис.6. а/ Динамика нахождения искомого решения при отсутствии шумов измерения. б/ Амплитуда выбросов $\Delta f(x)$.

В общем случае отклонение

$$\Delta f(x) = f(x) - \hat{f}_k(x) \quad /13/$$

имеет ярко выраженный осциллирующий характер.

Для сравнения на рис.6 представлена динамика нахождения решения задачи в условиях, когда отсутствуют какие-либо шумы. Как видно из рис.3 и 6, указанные осцилляции формируются не на последних шагах итерационного процесса, которым соответствуют малые λ_k , а на начальных, при $k \leq N/3$. Из рис.6 видно, что эти

осцилляции, исчезают полностью только на последней итерации /в случае шума $\Delta \vec{b} = 0$ /.

Наблюдения за динамикой процесса итерационного нахождения решения и за структурой псевдообращения позволяют выделить характерные особенности решения любой другой обратной задачи.

Авторы выражают благодарность Б.З.Белашеву за подробное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альберт А. Регрессия, псевдообращение и рекурсивное оценивание. "Наука", М., 1977.
2. Сороко Л.М. ОИЯИ, Р10-80-702, Дубна, 1980.
3. Хиршмин И.И., Уиддер Д.В. Преобразование типа свертки. ИИЛ, М., 1958.
4. Воеводин В.В. В кн.: Проблемы матфизики и вычислительной математики. "Наука", М., 1977, с.91.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы. "Наука", М., 1973, т.1.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. "Наука", М., 1967.
7. Фриден Б. В кн.: Обработка изображений и цифровая фильтрация /под ред. Хуанга, пер.с англ./ "Мир", М., 1979.
8. Adler N., Andrews H.C. Report 530 Los Angeles. Univ. South Calif. Image Proc. Inst., 1974, p.50.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. "Наука", М., 1979, 2-е издание.
10. Иванов В.К. и др. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. "Наука", М., 1978.
11. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. "Мир", М., 1976.
12. Гольфанд А.О. Исчисление конечных разностей. Физматгиз, М., 1959.
13. Василенко Г.И. Теория восстановления сигналов. "Советское радио", М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июня 1982 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

| | | |
|---------------|---|------------|
| Д13-11182 | Труды IX Международного симпозиума по ядерной электронике. Варна, 1977. | 5 р. 00 к. |
| Д17-11490 | Труды Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1977. | 6 р. 00 к. |
| Д6-11574 | Сборник аннотаций XV совещания по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна, 1978. | 2 р. 50 к. |
| Д3-11787 | Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978. | 3 р. 00 к. |
| Д13-11807 | Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978. | 6 р. 00 к. |
| | Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/ | 7 р. 40 к. |
| Д1,2-12036 | Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978 | 5 р. 00 к. |
| Д1,2-12450 | Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978. | 3 р. 00 к. |
| | Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1980 /2 тома/ | 8 р. 00 к. |
| Д11-80-13 | Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979 | 3 р. 50 к. |
| Д4-80-271 | Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979. | 3 р. 00 к. |
| Д4-80-385 | Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980. | 5 р. 00 к. |
| Д2-81-543 | Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981 | 2 р. 50 к. |
| Д10,11-81-622 | Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980 | 2 р. 50 к. |
| Д1,2-81-728 | Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981. | 3 р. 60 к. |
| Д17-81-758 | Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981. | 5 р. 40 к. |
| Д1,2-82-27 | Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981. | 3 р. 20 к. |
| Р18-82-117 | Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981. | 3 р. 80 к. |

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

| Индекс | Тематика |
|--------|--|
| 1. | Экспериментальная физика высоких энергий |
| 2. | Теоретическая физика высоких энергий |
| 3. | Экспериментальная нейтронная физика |
| 4. | Теоретическая физика низких энергий |
| 5. | Математика |
| 6. | Ядерная спектроскопия и радиохимия |
| 7. | Физика тяжелых ионов |
| 8. | Криогеника |
| 9. | Ускорители |
| 10. | Автоматизация обработки экспериментальных данных |
| 11. | Вычислительная математика и техника |
| 12. | Химия |
| 13. | Техника физического эксперимента |
| 14. | Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами |
| 15. | Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях |
| 16. | Дозиметрия и физика защиты |
| 17. | Теория конденсированного состояния |
| 18. | Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники |
| 19. | Биофизика |

Радоманов В.Б., Сороко Л.М. 5-82-456
Псевдообращение при помощи сингулярного разложения.
Результаты моделирования

Изложены результаты моделирования алгоритма решения обратной задачи линейных уравнений при помощи сингулярного разложения. Показана динамика получения оценки искомой функции как при наличии шумов, так и в идеализированном случае их отсутствия. Наблюдение за динамикой процесса итерационного нахождения решения позволяет выделить характерные особенности решения обратной задачи и причины ее неустойчивости. Метод разложения по сингулярным векторам можно рассматривать с идейной точки зрения как обобщение фурье-алгоритма. Результаты моделирования представлены на примере матрицы преобразования типа свертки размером 29x29. Как видно из примера, неустойчивость решения связана с появлением осциллирующей добавки, амплитуда которой модулирована амплитудой шума.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Radomanov V.B., Soroko L.M. 5-82-456
Pseudoinversion by Means of Singular Value Decomposition.
Simulation Results.

Results are presented of the simulation of algorithm of solution of reverse problem for linear equations by means of the singular value decomposition. The dynamics is shown of obtaining an estimation of the searched function both with noise and for the ideal case of the absence of the latter. The observation for the dynamics of iteration process of finding a solution allows one to deduce the characteristic peculiarities of solving the reverse problem and reasons of its instability. The method of decomposition into singular vectors must be considered from the ideological point of view as a generalization of the Fourier algorithm. The results of the simulation are presented as an example of the matrix of the convolution transform 29x29 in size. As is seen from the example, the instability of the solution is due to appearing oscillations, the amplitude of which is modulated by the amplitude of noise.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод авторов.