ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

5-82-164

ДИКУСАР

Василий Васильевич

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.07 – вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1982

Работа выполнена в Институте проблем управления (автоматики и телемеханики).

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
профессор Р.П. Федоренко,

доктор физико-математических наук
профессор Е.П. Жидков,

доктор физико-математических наук
профессор Н.Т. Тынянский.

Ведущая организация: Вычислительный центр АН СССР.

Защита состоится "   " ____________ 198   г. в ________ час.
на заседании специализированного Совета Д.047.01.04 при Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ по адресу:
г. Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "   " ____________ 1982 г.

Ученый секретарь специализированного Совета
кандидат физико-математических наук

З.М. Иванченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Появление электронно-вычислительной техники привело к качественному скачку в развитии теории управления и позволило практически подойти к созданию эффективных алгоритмов управления и, в частности, отысканию оптимальных управлений в детерминированных динамических задачах. Большую актуальность в связи с этим приобретает проблема построения и исследования новых алгоритмов оптимизации, ориентированных на решение задач управления с фазовыми и смешанными ограничениями. Однако, если общая теория таких задач разработана достаточно хорошо, то конкретную практику анализа и получения численных решений, несмотря на значительные достижения в этой области, еще нельзя считать завершенной. На этом пути имеется еще целый ряд принципиальных затруднений, которые сдерживают внедрение общетеоретических методов в расчетную практику. Особый интерес представляет использование принципа максимума для решения задач с ограничениями общего вида. Это связано с тем, что указанные задачи включают в себя так называемые нерегулярные ситуации, которые представляют известную трудность как в вычислительном плане, так и в методическом.
В настоящее время над данной проблемой работает большое количество научных коллективов.

Целью работы является:

1. Анализ с практической точки зрения теоретических методов оптимизации на базе единого подхода в детерминированном случае.

2. Расшифровка принципа максимума при наличии фазовых и смешанных ограничений до уровня решения конкретных задач.

3. Разработка численных методов, ориентированных на решение нелинейных задач оптимального управления на базе принципа максимума.

4. Решение прикладных задач оптимизации.

Методика исследования состоит в применении принципа максимума Понтрягина Л.С. и схемы Дубовицкого-Милютина для анализа общей задачи оптимального управления с целью ее последующей редукции к краевой задаче. Область исследования ограничивается принципом максимума минимального индекса. На его основе поставленная задача сводится к трем основным проблемам:
1) задаче нелинейного (линейного) непрерывного и дискретного программирования; 2) задаче Коши; 3) поиску нулей трансцендентных функций.
В дополнение к перечисленным проблемам проводится исследование аналитического эквивалента нерегулярной ситуации, предложенного Дубо-

вицким А.Я. и Милютиным А.А. С помощью указанного подхода решен ряд важных прикладных задач оптимизации.

Научная новизна. Разработана методика, ориентированная на решение вариационных задач со смешанными и фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств. Указанная методика выделяет следующие группы задач: I) задачи со смешанными ограничениями регулярной структуры; 2) задачи с фазовыми и с нерегулярными смешанными ограничениями; 3) задачи с большим параметром. Основу численного решения всех перечисленных задач составляют методы введения и возмущения параметра. Впервые рассмотрены методические особенности численного решения задач с нерегулярными смешанными ограничениями. Проводится расшифровка принципа максимума и предлагаются методы определения числа активных индексов для ограничений типа неравенств. Вариационные задачи на быстродействие и с концевыми многообразиями сводятся к последовательности краевых задач с фиксированными начальными и краевыми условиями. Методы введения параметра применяются для задачи Коши и при решении алгебраических и трансцендентных уравнений. Предложены методы решения краевых задач с плохо обусловленными или вырожденными матрицами Якоби. Для решения нелинейных систем предлагается использовать методы факторного анализа. Сформулирована и доказана теорема существования оптимального управления для канонической задачи оптимального управления.

Практическая значимость. Предложенная методика численного решения задач оптимального управления при наличии ограничений общего вида на основе принципа максимума позволяет в конкретной ситуации оценить трудности вычислений и выбрать наиболее целесообразные методы решения данного класса задач. Она также дает возможность сравнить другие методы решения подобного рода задач и в известной мере указывает границы их применимости.

Предложенные в работе приемы и методы были успешно использованы при решении конкретных задач в Институте проблем управления и в ряде других организаций, в частности, при решении задач динамики полета и управления технологическими процессами.

Кроме того, разработанная методика может быть применена при решении разнообразных практических задач, возникающих в экономике, в экологии, в различных системах автоматизированного проектирования, в управлении механическими системами и т.п.

Реализация результатов работы. Работа выполнена в соответствии с планом научных работ Института проблем управления.

Теоретические и практические результаты работы получили научное

признание - на них имеются ссылки в отечественных и зарубежных работах, посвященных данной тематике. Работы автора стимулировали новые исследования других ученых, посвященные предложенным методам.

Различные виды программ, оформленные по модульному принципу, включены в библиотеку программ универсальной моделирующей системы в Институте проблем управления. Идеи и методы, предложенные в работе, широко используются во многих организациях для решения прикладных задач оптимизации (Московский физико-технический институт, Институт космических исследований АН СССР, Институт прикладной математики АН СССР, Всесоюзный научно-исследовательский институт системных исследований, Центральный аэро-гидродинамический институт, Институт атомной энергии, Госплан СССР, Госбанк и Внешторгбанк СССР, Минавтотранс). Акты и справки о внедрении результатов прилагаются к диссертации.

Результаты работы использовались также при решении ряда других прикладных задач.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на Всесоюзных школах-семинарах по оптимизации (г.Тирасполь,1970; г.Шемаха, 1972), на II-III Всесоюзных конференциях по оптимальному управлению в механических системах (Казань, 1977; Киев, 1979), на Всесоюзной конференции по нелинейному программированию (Харьков, 1975), на УШ Всесоюзном совещании по проблемам управления (Таллин, 1980), а также на ряде семинаров в Институте проблем управления, Московском государственном университете, Вычислительном центре АН СССР, Центральном экономико-математическом институте АН СССР, Институте космических исследований АН СССР, Институте проблем механики АН СССР,Объединенном институте ядерных исследований, Математическом институте АН СССР на семинаре у Л.С. Понтрягина, Всесоюзном научно-исследовательском институте системных исследований, Центральном аэрогидродинамическом институте, Институте прикладной математики АН СССР, Московском физико-техническом институте. Апробация диссертации в целом проведена на межлабораторном семинаре Института проблем управления (февраль 1981 г.).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, выводов, списка литературы из 122 наименований и четырех приложений. Основная часть работы изложена на 202 страницах, в приложении дано 5 рисунков, 3 таблицы.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ (их список приведен в конце автореферата). Личный вклад автора в совместных работах следующий: в /I/ - методы поиска и программная реализация оптимальной траектории в случае плохо обусловленной матрицы Якоби при решении краевой задачи; в [2] – анализ необходимых условий экстремума в нерегулярном случае и разработка методики численного решения поставленной задачи; в [3] – применение в качестве первого приближения нерегулярной траектории для поиска решения, близкого к нерегулярному; в [8] – методика применения факторного анализа и оценка параметров в модели Холта для прогноза.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во <u>введении</u> показана актуальность темы исследования, приведены цели работы и кратко описано содержание диссертации.

В <u>первой главе</u> приведены различные постановки задач оптимального управления для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Свойства и методы получения необходимых условий экстремума рассматривались Л.С. Понтрягиным, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко, В.Г. Болтянским, А.Я. Дубовицким, А.А. Милютиным, В.П. Аноровым, А.М. Тер-Крикоровым, Э.Р. Смольяковым, Г.Л. Харатишвили, Н.Т. Тынянским, Э.Б. Ли, Л. Маркусом, Н. Нойштадтом, К. Вирсаном и многими другими. Необходимые условия наиболее полно исследованы для следующих классов задач:

1. Задача Понтрягина.
2. Задача Блисса-Больца (Майера).
3. Каноническая задача Дубовицкого-Милютина.

<u>Задача Понтрягина</u>. Найти $\min \mathcal{J}(P)$ при наличии следующих ограничений:

$$\dot{x} = f(x,u,t)\ , \quad \mathcal{K}(P)=0, \quad P=(x(t_0),x(t_1),t_0,t_1), \quad u\in R. \qquad (1)$$

Здесь R – произвольное множество пространства u ; x – фазовый вектор; u – вектор управления; $\mathcal{J}$ – функционал. Правая часть $f(x,u,t)$ (1) непрерывно дифференцируема по переменным x и t и непрерывна по управлению, размерность $f(x,u,t)$ равна n, $x\in E^n$, $u\in E^r$; $\mathcal{K}(P)$ – гладкая функция от P , ранг $\mathcal{K}'_P=m$ на поверхности $\mathcal{K}=0$, где m – размерность функции $\mathcal{K}(P)$; функционал $\mathcal{J}$ – выпуклый по P . Рассмотрение поставленной задачи в классе игольчатых вариаций приводит к известному принципу максимума Понтрягина Л.С. Минимум ищется в классе всех ограниченных измеримых функций $u(t)$, t_1 .

<u>Задача Блисса-Больца (Майера).</u> Требуется найти $\min\limits_u \mathcal{J}(P)$

при наличии следующих ограничений

$$\dot{x} = f(x,u,t),\ \mathcal{K}(P)=0,\ P=(x(t_0),x(t_1),t_0,t_1),$$
$$g(x,u,t)=0,\ \Phi(x,u,t)\le 0,\ x\in E^n,\ u\in E^r, \qquad (2)$$

где $\mathcal{J}, f, \mathcal{K}, g, \Phi$ – гладкие функции по совокупности своих аргументов; $(\mathcal{J}, f, \mathcal{K}, g, \Phi)/G$, где G – некоторое открытое множество пространства x, u, t, P ; запись φ/G означает, что G является областью определения φ , ограничения $g=0$, $\Phi\le 0$ <u>независимые</u>; независимость ограничений означает, что в каждой точке x , u , t , для которых эти ограничения выполнены, градиенты g'_{iu} , Φ'_{ku} , $k\in j(x,u,t)$ – линейно независимы; $j(x,u,t)$ – множество активных индексов; <u>активным индексом</u> точки x , u , t , $u\in V(x,t)$, $V(x,t)=\{u \mid g=0, \Phi\le 0\}$ называется число j , для которого выполнено соотношение $\Phi_j=0$; на поверхности $g=0$, $\mathcal{K}=0$ ранг $g'_u=\dim g\le r$, ранг $\mathcal{K}'_P=m$, где m – размерность вектор-функции $\mathcal{K}$; размерность Φ – любая; минимум ищется в классе кусочно-непрерывных функций. Получение ответа для поставленной задачи в классе игольчатых вариаций базируется на основных положениях принципа максимума Понтрягина.

<u>Каноническая задача Дубовицкого-Милютина</u> (задача с гладкой зависимостью от времени). <u>Задача А.</u> Найти $\min\limits_u \mathcal{J}(P)$, если выполнены следующие ограничения:

$$\dot{x} = f(x,u,t),\ \mathcal{K}(P)=0,\ \varphi(P)\le 0,\ x\in E^n,$$
$$g(x,u,t)=0,\ g=\{g_1,\dots,g_r\},\ \Phi_i(x,u,t)\le 0,\ i\le M, \qquad (3)$$
$$u=(u_1,u_2),\ u_i\in E^{k_i},\ i=1,2;\ \ u_2\in R.$$

Здесь R – произвольное множество пространства E^{k_2} ; M – любое натуральное число. Минимум ищется в классе всех ограничений измеримых функций $x(t)$, $u(t)$, t_1 , удовлетворяющих условию (3). Вариационное исследование задачи А проводится в следующих предположениях: функции f , $\mathcal{K}$, g и их частные производные по x , u_1 , t непрерывны по всем своим аргументам в некоторой окрестности поверхности $\mathcal{K}=0$, $g=0$; ранг $g'_{u_1}=\dim g\le k_1$, ранг $\mathcal{K}'_P=\dim\mathcal{K}$ для всех точек поверхности $g=0$, $\mathcal{K}=0$; функции $\mathcal{J}$, φ , Φ – <u>локально выпуклые</u> по x , u_1 , t , P ; размерность вектор-функции φ – любая. В работах А.Я. Дубовицкого и А.А. Милютина в качестве необходимого условия экстремума принимается <u>$\mathcal{V}$ – стационарность</u> траектории. Аналитический эквивалент стационарности формулируется с помощью понятия <u>фазовой точки</u>, <u>фазового скачка</u> и <u>индекса</u> изучаемой экстремали.

Структура смешанных ограничений. Получение ответа в задаче А существенным образом зависит от структуры смешанных ограничений. Смешанные ограничения $g(x,u,t)=0$, $\Phi(x,u,t)\le 0$ – регулярные, если для каждой точки x, u, t, $u\in V(x,t)$ выполнено одно из условий:

I. Множество активных индексов $j(x,u,t)$ для смешанного ограничения типа неравенства пусто;

2. Если $j(x,u,t)$ не пусто, то существует вектор $\bar{u}_1$, такой, что $\Phi_{ku_1}'(x,u,t)\bar{u}_1<0$ для всех $k\in j(x,u,t)$, $g_{u_1}'(x,u,t)\bar{u}_1=0$. Точка x, u, t, $u\in V(x,t)$ – фазовая (нерегулярная), если существуют векторы α, β; $\alpha_i\geqslant 0$, $\|\alpha\|=\sum_i\alpha_i=1$, такие, что

$$\langle \Phi_{u_1}'^{*}(x,u,t),\alpha\rangle-\langle g_{u_1}'^{*}(x,u,t),\beta\rangle=0,\ \alpha_i\Phi_i=0. \tag{4}$$

В работах Дубовицкого-Милютина сформулирован интегральный принцип максимума для задачи А в нерегулярном случае. При этом ответ получается не единственным. В указанных работах приведены три условия в виде теорем, при выполнении каждого из которых справедлив интегральный принцип максимума Π_0, который эквивалентен v – стационарности. Кроме того, с помощью вариаций скольжения получен ответ для задачи типа А с непрерывной зависимостью от времени и указан достаточно широкий класс задач, который сравнительно простыми приемами сводится к канонической задаче.

В диссертации излагаются результаты Милютина А.А. и Тер-Крикорова А.М. о возможном характере меры для задач с фазовыми и смешанными ограничениями.

Сформулирована и доказана теорема существования следующей задачи.

Задача B_0. Найти $\min J$

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(x,u,t)\,dt \tag{5}$$

при наличии следующих ограничений:

$$\begin{aligned}&\text{I. } \dot{x}=a_1(x,t)u+b_1(x,t),\ \mathcal{K}(P)=0,\ \ \varphi(P)\le 0;\\ &\text{2. } g(x,u,t)=a_2(x,t)u+b_2(x,t)=0,\ \ \Phi(x,u,t)\le 0.\end{aligned} \tag{6}$$

Предполагается, что $u\in U(t)\subset E^r$; $U(t)$ – замкнуто

для любых t, измеримо по t и содержится в некотором шаре; $x\in E^n$; $F(x,u,t)$, $\Phi(x,u,t)$ – выпуклы по u; F – непрерывна по x, u и измерима по t; a_1, b_1, a_2, b_2, Φ – непрерывны по совокупности переменных; для правой части (6) выполнено неравенство Филиппова А.Ф.:

$$\langle x,\ a_1(x,t)u+b_1(x,t)\rangle\le C(|x|^2+1); \tag{7}$$

$a_1(x,t)$ удовлетворяет условию Липшица по x; $\Pi_{x(t_0)}Z$ ограничена и замкнута (либо $\Pi_{x(t_1)}Z$ – ограничена и замкнута), где Z – многообразие, которое высекают вектор-функции $\mathcal{K}(P)$ и $\varphi(P)$; Π – проекция.

Теорема (I.7.3). Пусть в задаче B_0 выполнены сформулированные выше предположения. Предположим, что существует хотя бы одна пара $(\tilde{x},\tilde{u})$, удовлетворяющая условиям задачи. Тогда существует пара (x^0,u^0), доставляющая абсолютный минимум в задаче B_0.

Вторая глава диссертации посвящена расшифровке принципа максимума и редукции общей задачи оптимального управления к краевой задаче. Показывается, что задача Понтрягина редуцируется к решению трех основных задач (проблема A_0):

I. Решение в каждой расчетной точке t задачи нелинейного (линейного) непрерывного и дискретного программирования.

2. Решение задачи Коши.

3. Поиск нулей трансцендентных функций.

Задача линейного программирования и дискретной оптимизации в диссертации не рассматривается.

Сведение (редукцию) задачи оптимального управления к краевой задаче рассматривали: Моисеев Н.Н., Федоренко Р.П., Черноусько Ф.Л., Шилов А.А., Смольяков Э.Р., Желнин Ю.Н., Шкадов Л.М., Илларионов В.Ф., Сонин В.В., Петров А.А. и другие.

В регулярном случае для смешанных ограничений характер проблемы A_0 не меняется. Однако в этом случае возникает новая проблема A_I:

I. Определение геометрии оптимальной траектории. Оптимальная траектория может иметь со смешанным ограничением типа неравенства точечный или протяженный контакт. В этом случае состояние системы в каждый расчетный момент времени t определяется из решения задачи нелинейного программирования с учетом регулярных смешанных ограничений. Тем самым автоматически определяется момент схода с ограничений типа неравенств. Необходимо заметить, что дифференциальные уравнения для сопряженных переменных терпят разрыв первого рода в момент выхода и схода с ограничений.

2. Определение множителей Лагранжа

Исследование нерегулярных случаев для смешанных ограничений включает (проблема A_2):

1) Определение множества фазовых (нерегулярных) точек.
2) Проверку условий существования принципа максимума Π_0.
3) Расшифровку принципа максимума в нерегулярной точке.
4) Определение множителей Лагранжа.
5) Анализ особенностей в дифференциальных уравнениях для сопряженных переменных.
6) Предварительное определение геометрии оптимальной траектории.

Наличие нерегулярных смешанных ограничений увеличивает размерность краевой задачи на величину, пропорциональную числу выходов в нерегулярную точку, и, кроме того, дифференциальные уравнения содержат обобщенные функции вида $d\mu/dt$, где μ -мера, сосредоточенная на множестве фазовых точек. Множители Лагранжа в нерегулярной точке, вообще говоря, не определены, однако на них накладывается условие интегрируемости.

С формальной точки зрения фазовые ограничения типа неравенств являются частным случаем смешанных ограничений. Однако между ними имеются различия. Во-первых, для фазовых ограничений нет проблем, связанных с вычислением полной производной по t в силу уравнений движения. Второй момент связан с нечувствительностью близости решения к фазовому ограничению. Для смешанных ограничений при итеративном поиске оптимальной траектории сказывается близость нерегулярной точки, что проявляется в росте множителей Лагранжа. Кроме того, вычисление полной производной по t для смешанных ограничений требует дополнительного исследования в силу наличия управляющих функций $(u(t)\in L_\infty)$.

Основной проблемой для фазовых ограничений вида $Q(x,t)\leq 0$ является вопрос об определении геометрии оптимальной траектории. Этот вопрос решается сравнительно просто для ограничений, у которых первая либо вторая производная по t в силу уравнений движения содержат явно управляющие функции. Указанные случаи дают возможность определить характер оптимальной траектории, т.е. можно определить тип контакта (точечный или протяженный). Во всех других случаях априори неясно, какой характер контакта будет иметь оптимальная траектория с фазовым ограничением.

В случае протяженного контакта в точке выхода t_* необходимо

выполнить несколько начальных условий:

$$Q^{(k)}(x(t_*),t_*)=0,\ k=\overline{1,k_0};\quad Q^{(k_0+1)}(x,t)\big|_{t=t_*}=h(x,u,t)\big|_{t=t_*}=0, \tag{8}$$

где (k_0+1) означает номер производной по t, когда впервые появляется управление. При одноточечном выходе необходимо выполнить одно условие:

$$Q^{(1)}(x(t_*),t_*)=0. \tag{9}$$

Для предварительного определения геометрии оптимальной траектории предлагается несколько методов.

1. Метод разрыва фазовых переменных в точке входа. Суть метода сводится к введению разрывов фазовых переменных таким образом, чтобы справа от точки входа выполнялись условия (8), (9). После этого выбираем величины скачков сопряженных переменных таким образом, чтобы в совокупности со свободными параметрами задачи удовлетворить заданным краевым условиям и внутренним условиям (8), (9) в точке входа, т.е. для фазовых переменных должно быть выполнено условие непрерывности в точке t_*.

2. Метод введения фиктивного управления. Фазовому ограничению $Q(x,t)\leq 0$ ставим в соответствие смешанное ограничение $Q_1(x,u,t)=0$, которое при $u\equiv 0$ переходит в ограничение $Q(x,t)\leq 0$. Затем подбираем величины скачков сопряженных функций и их начальные значения таким образом, чтобы удовлетворить условиям (8), (9) и заданным краевым условиям. При этом автоматически $u\to 0$.

3. Метод предварительного разрыва сопряженных переменных. Пусть точка t_* - точка входа на фазовое ограничение. В точке $t_*-\varepsilon$, $t_*-\varepsilon\geqslant t_0$, $\varepsilon>0$ искусственно вводим скачки сопряженных переменных таким образом, чтобы удовлетворить условиям (8), (9) в точке входа t_*, т.е. кроме общей краевой задачи решаем локальную краевую задачу на отрезке $[t_*-\varepsilon,t_*]$. Такой подход дает возможность оценить число выходов на фазовое ограничение. После указанной оценки вводим скачки сопряженных функций непосредственно в точке входа t_*. Очевидно, что если величина ε достаточно мала, то такая предварительная оценка будет весьма точной. В противном случае картина будет далека от истинной.

Задачи на быстродействие и с концевыми многообразиями вида $\mathcal{K}(p)=0$, $\varphi(p)\leq 0$ при численной реализации в рамках применяемых в диссертации методов представляют известную трудность. Для предварительной оценки начальных и концевых значений свободных фазовых и сопряженных переменных используются градиентные методы первого и второго порядка. Дальнейший поиск точного решения сводится к замене исходной задачи на последовательность задач с фиксированными начальными и краевыми условиями. По ходу решения последовательности задач накапливается информация, которая дает возможность методами факторного анализа построить линейные зависимости вида $t_1 = \mathcal{K}_1(p)$. В результате приходим к задаче нелинейного программирования.

Задача A_I. Найти $\min t_1$, если

$$t_1 = \mathcal{K}_1(p),\ \mathcal{K}(p)=0,\ \varphi(p)\le 0,\ p=(x(t_0), x(t_1)). \qquad (10)$$

Указанный процесс можно продолжить по мере поступления новой информации для того, чтобы уточнять всякий раз зависимость типа $t_1=\mathcal{K}_1(p)$.

При решении задач со смешанными и фазовыми ограничениями особое внимание следует обращать на нормировку. Для регулярных смешанных задач с реализуемыми граничными условиями коэффициент при функционале обычно полагают равным единице. Указанный факт справедлив и для многообразий вида $\mathcal{K}(p)=0$, $\varphi(p)\le 0$. При ненулевом расстоянии до концевых многообразий (граничных условий) первоначальная постановка задачи А теряет смысл, поскольку стационарность траектории уже будет определяться не функционалом $\mathcal{J}(p)$, а ограничениями, которые задают многообразия (граничные условия) /I-4/. В этом случае можно, например, рассматривать задачу о выборе управления, минимизирующего расстояние до многообразий (граничных условий). Вторая особенность нормировки связана с локальными ограничениями типа равенств и неравенств $g(x,u,t)=0$, $\Phi(x,u,t)\le 0$. В регулярном случае нормы множителей Лагранжа малы по сравнению с остальными членами нормировки. По мере близости регулярной траектории к нерегулярной указанные нормы начинают расти. Наступает момент, когда стационарность траектории определяется не функционалом $\mathcal{J}(p)$, а локальными смешанными ограничениями. В этом случае коэффициент при функционале в условиях нормировки равен нулю. При указанных обстоятельствах можно, например, рассматривать задачу о минимуме максимального значения линейной комбинации норм $g=0$ и $\Phi\le 0$.

<u>Третья глава</u> диссертации посвящена приближенным методам решения нелинейных систем уравнений. К таким задачам сводятся задачи непрерывного нелинейного программирования, задача поиска нулей трансцендентных функций и задача решения алгебраических уравнений при применении неявных схем в задаче Коши.

В работе для решения уравнения

$$f(y)=0,\quad y=\{x_1,\dots,x_n\} \qquad (11)$$

используется последовательная линеаризация вида

$$f(y_k)+f'(y_k)(y-y_k)=0 \qquad (12)$$

в предположении, что соответствующие производные существуют. В случае особой матрицы Якоби $f'(y_k)$ сначала о определенной степенью точности определяем ее ранг. После этого в качестве первого приближения для решения уравнения (12) используем приближенное решение уравнения (11), полученное методами факторного анализа. Для этой цели составляем матрицу наблюдений. Пусть имеется нулевое приближение $y_{10}=\{x_{10}, x_{20},\dots,x_{n0}\}$. Рассмотрим две точки: $y_{11}=\{x_{10}+h_1, x_{20},\dots,x_{n0}\}$ и $y_{12}=\{x_{10}+h_2, x_{20},\dots,x_{n0}\}$. По заданным приращениям h_1 и h_2 вычисляются соответствующие значения $f(y_{11})=\{f_1(y_{11}),\dots,f_n(y_{11})\}$, $f(y_{12})=\{f_1(y_{12}),\dots,f_n(y_{12})\}$.

Полученный материал представляет собой матрицу наблюдений

$$Y=\begin{pmatrix} h_1 & f_1(y_{11}) & \dots & f_n(y_{11}) \\ h_2 & f_1(y_{12}) & \dots & f_n(y_{12}) \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Применение методов факторного анализа к матрице наблюдений (13) приводит к следующему решению:

$$x_{11}=x_{10}+\alpha_{11}\ell_1(y_{10})+\dots+\alpha_{1m}\ell_m(y_{10}),\quad m\le n, \qquad (14)$$

где $\ell_1,\dots,\ell_m$ факторы, которые выражаются в виде линейной комбинации через значения правых частей в точке y_{10} и через x_{10}. Аналогичная процедура проводится для остальных координат. Число факторов определяет с заданной степенью точности ранг матрицы Якоби, если последнюю рассматривать в качестве матрицы наблюдений.

Пусть ранг матрицы Якоби равен r. Тогда $n-r$ координат определяем по методу факторного анализа (14), и их значение подставляем в уравнение (12). После подстановки соответствующих координат выделяем ненулевой минор порядка r и решаем систему (12). Полученные значения подставляем в исходную систему (11) и проверяем условие окончания итеративного процесса. По мере накопления информации уточняются зависимости вида (14) за счет расширения матрицы наблюдений (13).

Факторные методы применяются и для непрерывных функций $f(y)$. При этом уравнение (I2) не используется, а итеративный процесс строят по формулам типа (I4). В диссертации предлагаются различные способы построения матрицы наблюдений (I3) и тем самым различные методы построения итеративных процессов типа (I4).

Обычно процесс построения последовательных приближений с использованием формул (I2) называют обобщенным методом Ньютона. Большой вклад в развитие метода Ньютона внесли Канторович Л.В., Федоренко Р.П., Жидков Е.П., Евтушенко Ю.Г., Лебедев В.И., Соколов С.Н., Силин И.Н., Пузынин И.В., Гавурин М.К., Исаев В.К., Сонин В.В., Давиденко Д.В., Пшеничный Б.Н., Бахвалов Н.С., Будак Б.М., Шидловская Н.А., Данилин Ю.М., Макаренко Г.И., Шаманский В.Е., Петров А.А., Беллман Р., Калаба Р., Химмельблау Р., Ортега Дж., Рейнболдт В. и др.

Метод Ньютона очень чувствителен к выбору первого приближения. Он устойчив по отношению к ошибкам в вычислениях производных при хорошо обусловленной матрице Якоби $f'(y_k)$. При поиске первого приближения в диссертации применяются градиентные методы. Для этого решения системы нелинейных уравнений сводится к задаче оптимизации.

Составляется скалярная функция

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} C_i(y) f_i^2(y), \quad C_i(y) > 0, \tag{I5}$$

где $C_i(y)$ – весовые функции. Следует отметить тот факт, что широко известные линейные методы (покоординатные, градиентные и их модификации) минимизации функционала $g(y)$ (I5) часто сходятся слишком медленно и не позволяют локализовать область сходимости метода Ньютона за приемлемое время. Возникающие трудности в первую очередь связаны с овражной структурой функционала. Функционалы овражного типа характеризуются плохо обусловленными матрицами Гессе. С другой стороны, методы квадратичного типа не приводят к успеху из-за потери строгой выпуклости $g(y)$ в овражной ситуации.

В диссертации введение параметра в функционал (I5) расширяет квадратичные методы на случай невыпуклых функционалов /7/. Рассматривается скалярная функция

$$\varphi(y) = g(y) + \beta \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i0})^2, \quad \beta > 0, \tag{I6}$$

где x_{i0} – искомые корни; β – скалярный параметр. В этом случае метод квадратичной аппроксимации, в предположении существования вторых производных у функции $g(y)$ (I5), приводит к следующей итеративной процедуре:

$$y_{k+1} = y_k - \alpha[\varphi''(y_k)]^{-1}\varphi'(y_k), \quad \alpha > 0. \tag{I7}$$

Здесь α – параметр релаксации. Положительная определенность матрицы Гессе $\varphi''(y_k)$ получается, по крайней мере локально, за счет выбора параметра β.

По аналогии с обобщенным методом Ньютона при поиске минимума скалярной функции $g(y)$ (I5) с использованием квадратичных методов в случае особой матрицы Гессе применяются методы факторного анализа.

Нелокальные методы оптимизации рассматривались многими авторами: Энеевым Т.М., Гельфандом И.М., Цетлиным М.Л., Люстерником М.Л., Поляком Б.Т., Розенброком Г., Пауэллом М., Флэтчером Р. и др. Силин И.Н. реализовал программно методы поиска с особыми матрицами Гессе. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. рассматривали системные методы оптимизации квадратичного типа.

Для эффективного поиска первого приближения применяются и другие методы параметризации. С этой целью вводится скалярная функция, зависящая от параметра t. Затем рассматривается следующий функционал:

$$h(y,t) = \{g(y) - \alpha(t)\}^2. \tag{I8}$$

Функция $\alpha(t) = 0$ при $t = t_1$. При $y = y_k$ значение параметра t_0 выбирается из условия $g(y_k) = \alpha(t_0)$. В дальнейшем выбор функции зависит от конкретной задачи, в частности, можно выбрать прямую, ведущую в начало координат. Кроме того, характер функции $\alpha(t)$ можно задать за счет прогноза значений $g(y)$. Возмущая значение параметра t_0, можно получить решение задачи минимума $h(y,t)$ при $t = t_0 + \varepsilon, \varepsilon > 0$. Указанный процесс продолжается до $t = t_1$, причем на каждом шаге итеративного процесса используется информация, полученная на предыдущих итерациях, т.е. каждый раз прогнозируется первое приближение.

Рассматривается также метод последовательного состояния функционала (I5). Положим $C_i(y) = 0$ при $i = 2, \ldots, n$; тогда $g_1(y) = C_1(y) f_1^2(y)$. Решаем задачу минимума $g_1(y)$. Затем полагаем $g_2(y) = C_1(y) f_1^2(y) + \varepsilon_2 f_2^2(y), \varepsilon_2 > 0$. В качестве первого приближения используем решение, полученное для $g_1(y)$. После этого возмущаем ε_2 до величины $C_2(y)$. Указанный процесс продолжается до тех пор, пока $g_k(y)$ не станет равным $g(y)$ (I5). Предложенные методы позволили решить много различных модельных примеров с плохо обусловленными матрицами Гессе.

Методы Ньютона и квадратичной оптимизации в случае вычислимых функций требуют рассмотрения методов численного дифференцирования функций $f(y)$ и $g(y)$ вплоть до вторых производных. При расчетах оказалось, что наиболее приемлемыми методами в этом плане выступают методы восстановления зависимостей, в частности, методы факторного анализа /7/. С одной стороны, они намного сокращают время вычисления производных, а с другой – вычисление производных практически не зависит от выбора шага дискретизации.

Предложенные методы, по существу, представляют собой обобщение метода простой итерации за счет сложного формирования эквивалентной схемы $y=\varphi_1(y)$ для исходной системы $f(y)=0$. Общие теоремы о сходимости итерационных процессов указывают достаточные условия, при которых существует решение y_0 системы $f(y)=0$, а также условия, при которых гарантируется сходимость итераций. Эти теоремы устанавливают, что скорость сходимости метода простых итераций не ниже линейной. Теоремы о сходимости утверждают, что если $\varphi_1(y)$ дифференцируемы в некоторой выпуклой окрестности решения y_0 и их первые производные непрерывны в точке y_0, то достаточное условие сходимости метода простой итерации, начинающегося из близкой окрестности решения, состоит в выполнении неравенства $\lambda_0(W(y_0))<1$, где λ_0 – максимальное по модулю собственное значение матрицы Якоби W в точке y_0. Кроме того, существуют еще и другие более слабые достаточные условия сходимости. Если рассматривать предложенные итеративные методы в пространстве факторов и ввести параметр релаксации $\alpha>0$, то указанные достаточные условия всегда будут выполнены. Для каждого конкретного вида эквивалентной схемы оценки скорости сходимости могут быть лучше. Скорость сходимости метода Ньютона в пространстве факторов не ниже квадратичной.

Применение итеративных процедур сводится к решению линейной системы. Указанные вопросы рассматривались многими авторами: Тихоновым А.Н., Самарским А.А., Марчуком Г.И., Годуновым С.К., Арсениным В.Я., Заикиным П.Н., Калиткиным Н.Н., Арушуняном О.В., Фаддеевой В.Н., Фаддеевым Д.К., Морозовым В.А., Воеводиным В.В., Молчановым И.Н., Николаевым Е.С., Поповым Ю.П., Кузнецовым Ю.А.,Форсайтом Г., Молером К., Уилкинсом Ю., Райншем К., Голубом Г., Каханом У. и др. Для решения систем с особыми матрицами,а также произвольных линейных систем применяются методы регуляризации (Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Заикин П.Н., Танана В.П.), итеративные методы (Самарский А.А., Марчук Г.И., Николаев Е.С., Попов Ю.П.) и методы сингулярного разложения (Воеводин В.В., Голуб Г., Райнш К., Кахан У.).

В диссертации при решении линейных систем использовалась нормировка, применяемая в факторном анализе /8/.

В четвертой главе диссертации рассматриваются методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Критерием применимости явных методов, как правило, является хорошая обусловленность матрицы Якоби. К числу универсальных явных методов относятся: экстраполяционные методы Адамса, методы прогноза и корреляции, методы Рунге-Кутта. С точки зрения теории управления основными управляющими параметрами при выборе метода являются: величина шага интегрирования, тип метода и порядок метода. Предполагается, что для правой части дифференциальных уравнений в нормальной форме выполнено условие Липшица. Разностные методы характеризуются точностью, устойчивостью и эффективностью. Точность метода связана с двумя источниками ошибок: погрешностью метода; ошибкой округления.

В диссертации рассмотрены различные аспекты применимости явных и полуявных методов. Шаг интегрирования выбирается из условий устойчивости и точности метода. Существует нижняя граница в дроблении шага, которая определяется ростом ошибок округления и эффективностью метода. Выбор метода и шага интегрирования рассматривается как задача оптимального управления по минимизации локальной ошибки метода. При этом к управлению u_2 относим тип метода и его порядок, а к u_1 – внутренние параметры метода. На величину шага интегрирования накладываем ограничения $h_1 \le h \le h_2$. К u_1 относим также выбор величины шага интегрирования. Почти каждая группа явных, полуявных и неявных методов имеет свободные внутренние параметры.

Выбор шага интегрирования сначала производится по принципу Рунге, а затем методами факторного анализа строим зависимости величины шага от значений правых частей дифференциальных уравнений. Такой подход уменьшает количество проб при выборе шага.

Существуют задачи, для которых нельзя получить решения задачи Коши явными и полуявными методами в соответствии с заданной точностью, варьируя лишь метод, его внутренние параметры, порядок метода и величину шага h. Указанные задачи относят к задачам о большим параметром. Перечислим основные причины, которые приводят к экстремальной ситуации в задаче Коши: 1) точность решения задачи Коши; 2) большой промежуток интегрирования; 3) большой порядок системы; 4) "сложность" вычисления правой части; 5) наличие сильно осциллирующих решений; 6) существование достаточно большого числа разрывов в правой части; 7) существование разрывов 2-го рода; 8) жесткие системы.

Для интегрирования систем в экстремальных ситуациях применяются неявные схемы. При решении алгебраических уравнений возникают проблемы, связанные с плохой обусловленностью матрицы Якоби. При решении линейных систем используются методы, предложенные в третьей главе. В ряде случаев часть переменных вычисляется явными и полуявными методами, а остальная часть-с применением неявных методов, причем переменные разбиваются на две группы таким образом, что при применении неявных методов матрица Якоби является хорошо обусловленной. Полученное решение затем используется в качестве первого приближения при решении системы с плохо обусловленной матрицей. В диссертации применяются и другие методы параметризации, направленные на выбор первого приближения. Используются также методы нормировки и замены переменных для "улучшения" свойств нелинейной системы.

Индикатором контроля вычислительного процесса служит функция Понтрягина. На это обстоятельство впервые указал Шилов А.А. /I-3/. Он же предложил для расширения границ применимости явных методов на каждом шаге менять порядок метода Рунге-Кутта по определенному закону. Функция Понтрягина чувствительна к выбору метода, его порядка и величины шага h . Она является интегралом основной и сопряженной системы. Кроме того, функция Понтрягина очень чувствительна к точности поиска разрыва правых частей дифференциальных уравнений и методу поиска. При этом оказалось, что необходимо проводить односторонний поиск точек разрыва правой части и очень точно следует определять значение функции справа. Точность поиска разрывов берется на несколько порядков больше, чем точность решения краевой задачи.

По аналогии с введением промежуточных сечений при решении краевых задач использование внутренних краевых условий при применении неявных схем также позволяет улучшить свойства матрицы Якоби, хотя размерность краевой задачи при этом возрастает.

Методы решения краевых задач в экстремальных ситуациях рассматривали многие авторы. Большую роль в решении подобного рода задач сыграли методы переноса граничных условий. Существенный вклад в разработку и развитие методов переноса граничных условий для линейных задач внесли: Владимиров В.С., Годунов С.К., Гельфанд И.М., Локуциевский О.В., Абрамов А.А., Бахвалов Н.С., Федоренко Р.П., Тайфер И. и др. Методы переноса также используются при рассмотрении квадратичных методов оптимизации. С другой стороны, представляется целесообразным использовать методы переноса в качестве первого приближения при применении неявных схем интегрирования. Для этого необходимо рассматривать краевые условия по непрерывности переменных во внутренней точке отрезка интегрирования.

Пятая глава диссертации посвящена определению маневренных воз-

можностей летательных аппаратов. Задачами инженерной и математической оптимизации в динамике полета занимались: Красовский Н.Н., Моисеев Н.Н., Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М., Ивашкин В.В., Ярошевский В.А., Шилов А.А. /I-3/, Шкадов Л.М., Евтушенко Ю.Г., Петров А.А., Илларионов В.Ф., Красношеков П.С., Иванов Ю.Н., Токарев В.В., Фаткин Ю.М., Гродзовский Г.Л., Исаев В.К., Сонин В.В., Барский И.Л., Смольяков Э.Р., Ильин В.А., Скрипниченко С.Ю., Кротов В.Ф., Гурман В.И., Плохих В.П., Голубев Ю.Ф., Сихарулидзе Ю.Г., Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г., Желнин Ю.Н.,Пашинцев В.Т., Курьянов А.И., Ерошкин М.Ф., Шилов Ю.А., Широкопояс В.С., Миеле А., Брайсон, Хо Ю Ши, Дойфлхардт и др.

Основы методики решения задач динамики полета в регулярном случае на базе принципа максимума были разработаны Шиловым А.А. /I-3/, Шкадовым Л.М., Желниным Ю.Н., Смольяковым Э.Р., Илларионовым В.Ф. и др. Шилов А.А. предложил использовать для поиска последующих приближений в итеративных процедурах методы квадратичной экстраполяции.

В диссертации рассматривается частный случай движения материальной точки в скоростной системе координат. Движение центра масс относительно системы $O\xi\eta\zeta$ соответствует полету над плоской невращающейся землей.

Задача A_{50} . Найти $\min t_1$, если

$$\dot v = \{P - Q - mg\sin\theta\}m^{-1}, \quad t\in[t_0,t_1],$$
$$\dot\theta = \{P C_y\cos\gamma + C_y^\alpha Y\cos\gamma - mC_y^\alpha g\cos\theta\}(C_y^\alpha m v)^{-1},$$
$$\dot\varphi = \{-\sin\gamma(P C_y + C_y^\alpha Y)\}(m v\cos\theta C_y^\alpha)^{-1}, \quad \dot\xi = v\cos\theta\cos\varphi,$$
$$\dot\eta = v\sin\theta, \quad \dot\zeta = -v\cos\theta\sin\varphi, \quad \dot m = \alpha P.$$

Для системы уравнений движения заданы начальные и граничные условия:

$$v(t_0) = v_0, \quad \theta(t_0) = \theta_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0,$$
$$\xi(t_0) = \xi_0, \quad \eta(t_0) = \eta_0, \quad \zeta(t_0) = \zeta_0, \quad m(t_0) = m_0,$$
$$v(t_1) = v_1, \quad \theta(t_1) = \theta_1, \quad \varphi(t_1) = \varphi_1,$$
$$\xi(t_1) = \xi_1, \quad \eta(t_1) = \eta_1, \quad \zeta(t_1) = \zeta_1, \quad m(t_1) = m_1.$$

Функции, входящие в уравнения, определяются соотношениями

$$Q = C_x \rho v^2 S 2^{-1}, \quad Y = C_y \rho v^2 S 2^{-1}, \quad g = g_0,$$

$$C_x = C_{x_0} + \varkappa C_y^2 + C_{x_1}, \quad \rho = \rho_0 e^{-\beta\eta}.$$

Ограничения на управляющие функции:

$$h_1 = C_y^{min} - C_y \le 0, \quad h_2 = C_y - C_y^{max} \le 0, \quad h_3 = P_1 - P \le 0,$$

$$h_4 = P - P_2 \le 0, \quad h_5 = \gamma_1 - \gamma \le 0, \quad h_6 = \gamma - \gamma_2 \le 0,$$

$$h_7 = C_{11} - C_{x_1} \le 0, \quad h_8 = C_{x_1} - C_{12} \le 0.$$

Фазовые ограничения:

$$g_1 = v_{11} - v \le 0, \quad v_{11} = v_{10} e^{\beta\eta/2}, \quad v_{12} = v_{20} e^{\beta\eta/2},$$

$$g_2 = v - v_{12} \le 0, \quad g_3 = \eta_{11} - \eta \le 0, \quad g_4 = \eta - \eta_{12} \le 0.$$

Смешанные ограничения:

$$h_9 = n_y - N_1 \le 0, \quad h_{10} = N_2 - n_y \le 0, \quad n_y = v\dot{\theta} g^{-1} + \cos\theta,$$

$$h_{11} = \left|(PC_y + C_y^{\alpha} Y) \sin\gamma \sin\theta \,(m v \cos^2\theta\, C_y^{\alpha})^{-1}\right| - N_3 \le 0.$$

Смысл обозначений является общепринятым в динамике полета. Для решения задачи A_{50} в качестве первого приближения рассматривается ряд частных задач с фиксированным временем и различными краевыми условиями, которые имеют и самостоятельное значение. С другой стороны, если значение выбранного функционала строго монотонно на оптимальной траектории, то фиксированное время t_1 будет минимальным при фигурирующих в задаче концевых значениях фазовых переменных.

Задача A_{53}. Найти $\max \eta(t_1)$ за фиксированное время t_1 при ограничениях задачи A_{50} для случая нефиксированных граничных условий.

Задача A_{54}. Найти $\max \xi(t_1)$ за фиксированное время t_1, если выполнены ограничения задачи A_{50} и граничные условия не фиксированы.

Задача A_{55}. Требуется определить максимум $\zeta(t_1)$ при наличии ограничений задачи A_{50} за фиксированное время t_1, причем граничные условия не фиксированы.

Аналогичным образом рассматриваются задачи A_{56}, A_{57} о $\max|\theta(t_1)|$ и $\max|\varphi(t_1)|$ за фиксированное время t_1.

Задачи B_{II}, B_{I2}, B_{I3}, B_{I4}, B_{I5} представляют собой задачи A_{5i}, $i = \overline{3,7}$ соответственно, фиксированными граничными условиями, причем значение координаты, по которой ищется экстремум, не фиксируется.

Задачи с концевыми многообразиями

Задача C_{II}. Найти максимум $\eta(t_1)$ за фиксированное время t_1 при ограничениях задачи A_{50}, если

$$a_{11} \le v(t_1) \le a_{12}, \quad a_{21} \le \theta(t_1) \le a_{22}, \quad a_{31} \le \varphi(t_1) \le a_{32},$$

$$a_{41} \le \xi(t_1) \le a_{42}, \quad a_{61} \le \zeta(t_1) \le a_{62}, \quad a_{71} \le m(t_1) \le a_{72};$$

где a_{ij} – константы, причем часть координаты в конце может быть фиксирована; например, $a_{61} = a_{62}$.

По аналогии с задачей C_{II} рассматриваются задачи C_{1i}, $i = \overline{2,5}$, которые по постановке совпадают с задачами B_{1j}, $j = \overline{2,5}$, где фиксированные краевые условия заменены соответствующими многообразиями.

Для поставленных задач анализируются необходимые условия экстремума и рассматриваются алгоритмы определения оптимального управления в каждой расчетной точке t. Доказывается существование нерегулярных точек для ограничений вида $v_{11} \le v(t) \le v_{12}$.

В шестой главе диссертации рассматривается задача управления основными металлопотоками комплекса.

Пусть движение потоков металла описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = \lambda_i(t) - x_i u_i \alpha_i(t), \quad t \in [t_0, t_1];$$

$$\dot{x}_{2i} = x_i u_i \alpha_i(t) - \mu_i(t) x_{2i} \beta_i(t); \tag{I9}$$

$$\dot{x}_{3i} = \mu_i(t) x_{2i} \beta_i(t), \quad i = \overline{1,k}.$$

Здесь $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $\mu_i(t)$, $\lambda_i(t)$ – заданные функции времени t. На фазовые переменные заданы ограничения по емкости складов и по агрегатам:

$$\sum_{i=1}^{K} x_i \le Q_1, \quad \sum_{i=1}^{K} x_{2i} \le Q_2, \quad x_i, x_{2i}, x_{3i} \geqslant 0, \quad i=\overline{1,K}; \tag{20}$$

ограничения на управляющие функции имеют вид

$$\sum_i u_i \le \eta(t), \quad u_i \geqslant 0, \quad u_i \le 1, \quad i=\overline{1,K}, \tag{21}$$

где $\eta(t)$ – заданная функция времени t ;
начальные условия:

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_{2i}(t_0) = x_{2i}^0, \quad x_{3i}(t_0) = x_{3i}^0, \quad i=\overline{1,K}; \tag{22}$$

граничные условия:

$$\text{а)} \quad x_{3i}(t_1) \geqslant Q_{3i}, \quad i=\overline{1,K}; \qquad \text{б)} \quad \sum_{i=1}^{K} x_{3i}(t_1) \geqslant Q_3; \tag{23}$$

$$x_i(t_1), \ x_{2i}(t_1), \ i=\overline{1,K} \ \text{– не фиксированы.} \tag{24}$$

Задача A_{6I}. Требуется выполнить условие (23) за минимальное время t_1 при наличии ограничений (I9)-(22), (24).

Задача A_{62}. За фиксированное время t_1 требуется достичь максимальной производительности в случае ограничений (I9)-(22),(24) в смысле следующего функционала:

$$J = \sum_{i=1}^{K} \gamma_{3i} x_{3i}(t_1), \quad \gamma_{3i} \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{K} \gamma_{3i} = 1, \tag{25}$$

где γ_{3i} – весовые коэффициенты.

Задачи A_{6I} и A_{62} сообщила автору Кузнецова С.Б.* Указанные задачи не были решены до конца, и, кроме того, в них не рассматривалась возможность существования нерегулярных ситуаций.

Для рассмотренных задач проведен анализ необходимых условий экстремума и доказана возможность существования нерегулярных траекторий. При этом оказалось, что в некоторых частных и важных для практики случаях возможен синтез оптимальной программы.

В качестве примера докажем существование нерегулярных траекторий для ограничений

* Кузнецова С.Б. Моделирование дискретно-непрерывных производственных объектов. Известия вузов, черная металлургия, 1980, № 7.

$$g_{10} = \sum_{i=1}^{K} (x_i \alpha_i u_i - \mu_i x_{2i} \beta_i) \equiv 0, \quad g_{2i} = u_i - 1 \le 0,$$

$$g_{20} = \sum_{i=1}^{K} u_i - \eta(t) \le 0, \quad g_{1i} = -u_i \le 0, \quad i=\overline{1,K}.$$

Для указанных систем аналитический эквивалент нерегулярности имеет вид

$$\begin{gathered} \nu_{2i} + \nu_1 x_i \alpha_i + \nu_2 - \nu_{1i} = 0, \quad \nu_{1i} \geqslant 0, \quad \nu_{2i} \geqslant 0, \\ \nu_{1i} g_{1i} = 0, \quad \nu_{2i} g_{2i} = 0, \quad i=\overline{1,K}, \\ \nu_1 \geqslant 0, \quad \nu_2 \geqslant 0, \quad \nu_1 g_{10} = 0, \quad \nu_2 g_{20} = 0, \\ \sum_i (\nu_{1i} + \nu_{2i}) + \nu_1 + \nu_2 = 1. \end{gathered} \tag{26}$$

Система (26) имеет нетривиальное решение относительно $\nu_1, \nu_2, \nu_{1i}, \nu_{2i}, i=\overline{1,K}$. Отсюда следует возможность существования нерегулярных точек.

В приложении I приведено доказательство теоремы существования оптимального управления для задачи B_0 (глава I). Доказательство теоремы проводится по схеме Лебега-Тонелли и состоит в проверке полунепрерывности снизу минимизируемого функционала и компактности множества допустимых кривых в соответствующей топологии.

Существенный вклад в решение проблемы существования оптимальных управлений внесли: Н.Н. Боголюбов, Н.Н. Красовский, А.Ф. Филиппов, В.М.Тихомиров, Л.Янг, Дж.Варга, К.Олех, Л.Чезари и др.

В приложении II приведены решения рассматриваемых в главе У задач по определению маневренных возможностей пассажирских, спортивных и учебно-тренировочных самолетов.

Рассмотрим пример введения параметра в задачу с закрепленным временем. В задаче A_{53} положим $\rho(t) \equiv \rho_0$, $\theta(t) \equiv \theta_0$, $\varphi(t) \equiv \varphi_0$, $\xi(t) \equiv \xi_0$, $\zeta(t) \equiv \zeta_0$, $m(t) \equiv m_0$, тогда задача A_{53} с краевыми условиями для сопряженных переменных:

$$\begin{gathered} \psi_1(t_1) = 0, \quad \psi_2(t_1) = 0, \quad \psi_3(t_1) = 0, \\ \psi_4(t_1) = 0, \quad \psi_5(t_1) = 0, \quad \psi_6(t_1) = 0, \quad \psi_7(t_1) = 0, \end{gathered} \tag{27}$$

сводится к выбору $\Psi_1(t_0)$ таким образом, чтобы удовлетворить условию $\Psi_1(t_1)=0$, при этом остальные условия (27) выполняются автоматически. Далее положим $\theta = u_2 f_2$, где u_2 – параметр, f_2 – правая часть для $\dot\theta$. Полагая вначале $u_2=\varepsilon$, получим решение двухпараметрической краевой задачи по выбору $\Psi_1(t_0)$, $\Psi_2(t_0)$, чтобы удовлетворить условиям $\Psi_1(t_1)=0$, $\Psi_2(t_1)=0$, причем в качестве первого приближения используем решение предыдущей однопараметрической задачи. Возмущая u_2 до значения $u_2=1$, получим решение двуточечной краевой задачи. Указанный процесс можно продолжить до решения исходной задачи A_{53} с краевыми условиями (27).

При решении задачи A_{53} (подъем на максимальную высоту) методом Ньютона оказалось, что матрица Якоби является плохо обусловленной.

Указанная задача была решена несколькими методами.

I. Введение промежуточного сечения и прогонка по параметру.

На отрезке $[t_0, t_{11}]$ выбираем точку $\tilde t_{11}$, причем систему дифференциальных уравнений на $[t_0, \tilde t_{11}]$ интегрируем слева направо, а на $[\tilde t_{11}, t_{11}]$–справа налево. В качестве краевых условий в точке $\tilde t_{11}$ фигурируют условия непрерывности соответствующих переменных. При этом считаем, что в точке t_{11} выполнены условия (27). Затем после решения задачи A_{53} на $[t_0, t_{11}]$ полагаем $t_{12}=t_{11}+\varepsilon_1$ и рассматриваем задачу A_{53} на отрезке $[t_0, t_{12}]$ с внутренними условиями в точке $\tilde t_{12}$. Для решения последней задачи используем информацию о решении на отрезке $[t_0, t_{11}]$. Продолжая указанный процесс, получаем решение задачи A_{53} на $[t_0, t_{1K}]$, $t_{1K}=t_1$ с внутренними условиями в точке $\tilde t_{1K} \approx \frac{2}{3} t_1$. Для получения последующих приближений в итеративных процессах используются методы прогноза с помощью факторного анализа.

2. Методы факторного анализа. На отрезке $[t_0, t_{11}]$ решаем задачу A_{53} с краевыми условиями (27) с использованием в качестве первого приближения факторного решения. После этого решение уточняется методом Ньютона для краевой задачи меньшей размерности. Затем возмущаем t_{11} в сторону возрастания до величины $t_{1K}=t_1$. При поиске последующих приближений каждый раз проводится обработка накопленной информации методом факторного анализа.

Задача A_{53} решалась также непосредственно на отрезке $[t_0, t_1]$ с краевыми условиями (27), причем первое приближение в линеаризованной системе обобщенного метода Ньютона находилось факторными методами. Решение задачи было доведено до конца, однако время решения увеличилось в I2 раз по сравнению с решением по методу последовательного расширения отрезка интегрирования.

3. Метод регуляризации Тихонова А.Н. Метод применялся для получения первого приближения при решении линеаризованной системы с плохо обусловленной матрицей Якоби в задаче A_{53}. При этом оказалось, что метод чувствителен к выбору параметра регуляризации δ, точности вычисления производных и точности перемножения матриц. При двойной точности машинного слова метод при $0{,}00I \leqslant \delta \leqslant 0{,}0I$ практически не приводит к изменению машинного решения. Частные производные вычислялись по формуле

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\varphi(x_i+h_i)-\varphi(x_i-h_i)}{2h_i}. \tag{28}$$

Метод регуляризации использовался в двух вариантах: при последовательном расширении отрезка интегрирования и при непосредственном решении задачи A_{53} на $[t_0, t_1]$. Время решения практически совпадает с временем решения по методу факторного анализа.

4. Метод сингулярного разложения. Для задачи A_{53} применялся метод сингулярного разложения матрицы Якоби. Сингулярное разложение также оказалось чувствительно к длине машинного слова. С помощью предложенных средств решение задачи было доведено до конца. Время решения задачи увеличивается примерно на 50% по сравнению с принципом регуляризации Тихонова А.Н. и методами факторного анализа.

5. Программа FUMILI. Для решения задачи подъема на максимальную высоту (задача A_{53}) использовалась программа FUMILI Силина И.Н.* . Программа применялась при параметризации правого конца траектории t_1 и непосредственно на отрезке $[t_0, t_1]$. Время поиска решения увеличивается примерно на 20% по сравнению с методами факторного анализа.

6. Метод нулевого порядка. Непосредственное применение факторного анализа позволяет получить решение задачи A_{53}, однако время решения увеличивается в 4–5 раз по сравнению с комбинированными методами, упомянутыми выше.

Для $v(t)=v_{11}$ точка $P=P_2$, $C_y=0$ является нерегулярной независимо от рассматриваемых задач. При $v(t)=v_{12}$ нерегулярной будет точка $P=P_1, C_y=C_y^{max}$.

В приложении Ш приведены частные решения задач A_{6I}, A_{62}.

В приложении IУ даны копии материалов о внедрении.

* Библиотека программ на фортране Д-520 (И.Н.Силин), Т.I, БI-II-5I44, Дубна, 1970 с. I80. Депонированная публикация ОИЯИ.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Предложена методика численного решения задач оптимального управления на базе принципа максимума при наличии фазовых и смешанных ограничений типа равенств и неравенств. Она включает в себя: I) расшифровку принципа максимума до уровня решения конкретных задач; 2) разработку численных методов для их решения. Сформулирована и доказана теорема существования для канонической задачи оптимального управления.

Разработанная методика ориентирована на решение следующих групп задач: I) задачи с регулярными смешанными ограничениями и задачи с ограничением на область управления; 2) задачи с фазовыми и нерегулярными смешанными ограничениями; 3) задачи с большим параметром, которые включают в себя задачи о плохо обусловленными матрицами Якоби.

Автором, одним из первых, были численно решены с использованием необходимых условий экстремума задачи с нерегулярными смешанными ограничениями. Наибольшую трудность при численной реализации в рамках применяемых методов представляют траектории, близкие к нерегулярным.

В основу предлагаемых численных методов положены методы введения и возмущения параметра, а также обработки полученной в процессе решения информации.

При решении конкретных краевых нелинейных задач (поиск нулей трансцендентных функций) в работе предлагается метод переноса граничных условий во внутреннюю точку, в которой матрица Якоби является хорошо обусловленной.

В работе предлагается использовать методы статистической обработки информации. В частности, методы факторного анализа применяются для восстановления зависимостей, при прогнозировании последующих приближений до накопленной информации, для вычисления частных производных при поиске нулей трансцендентных функций, а также служат первым приближением при решении краевых задач с особыми матрицами Якоби. Кроме того, они применяются самостоятельно в качестве итеративных методов нулевого порядка при решении нелинейных уравнений.

Введение параметров позволяет решить вопрос о поиске первого приближения и распространяет применение градиентных методов на случай невыпуклых функционалов.

Для интегрирования задачи Коши с большим параметром применяются неявные схемы.

При решении краевых задач высокой размерности предлагается в качестве первого приближения использовать решения задач меньшей размерности за счет введения параметра и его последующего возмущения.

С помощью предложенных методов решен ряд важных практических задач по определению маневренных возможностей самолетов, а также задача об управлении основными металлопотоками комплекса. Результаты работы внедрены в ряде организаций.

Основные принципы, предложенные для численных методов, позволяют расширить указанные методы в различных направлениях и адаптировать их для решения многочисленных задач.

Проведенные расчеты прикладных и модельных задач позволяют сделать вывод об эффективности разработанной методики.

Основное содержание диссертации отражено в следующих публикациях:

I. Дикусар В.В., Шилов А.А. Оптимизация дальности при входе аппарата в атмосферу с учетом ограничений на величину полной перегрузки. "Ученые записки ЦАГИ", № 2, М., 1970, 75-83.

2. Дикусар В.В., Шилов А.А. Нерегулярные оптимальные траектории аппарата при полете в атмосфере. "Ученые записки ЦАГИ", № 4, М., 1970, 73-83.

3. Дикусар В.В., Шилов А.А. Оптимизация дальности полета аппарата в атмосфере с учетом ограничений на полную перегрузку. В сб.: "Труды четвертых чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского". Секция "Механика космического полета"."Наука", М., 1970, 28-40.

4. Дикусар В.В. Численное определение оптимальных траекторий при наличии смешанных ограничений. "Численные методы нелинейного программирования". Тезисы Первого Всесоюзного семинара. "Наукова думка", Киев, 1975, 176-180.

5. Дикусар В.В. Задачи по определению пространственных маневренных возможностей летательного аппарата. Тезисы Второй Всесоюзной конференции по оптимальному управлению в механических системах. Изд-во Казанского авиационного института, Казань, 1978, 54.

6. Дикусар В.В. Методы введения параметра в задачах оптимального управления. Тезисы Третьей Всесоюзной конференции по оптимальному управлению в механических системах.Изд-во КГУ, Киев,1979,180-181.

7. Дикусар В.В. Итеративные методы решения нелинейных систем. В сб.: "Моделирование процессов экологического развития". Вып. 2, М., Изд-во ВНИИСИ, 1981, 120-25.

8. Дикусар В.В., Дранев Я.Н., Марков В.В., Смольяков А.Ф. Модели прогноза цены золота на международном рынке.В сб.:"Имитация процессов управления". Вып. 18, М., Изд-во ИПУ, 1978, 14-21.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 марта 1982 года.

Редактор Т.Я.Жабицкая. Макет Н.А.Киселевой.

Подписано в печать 15.03.82.
Формат 60х90/16. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 1,94.
Тираж 140. Заказ 30937.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.
Дубна Московской области.