

5/11-82

+

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

5-81-820

Э.А. Айрян, Е.П. Жидков, Б.Н. Хоромский

**БЫСТРЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД
РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА
НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЕТОК**

1981

Пусть в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ищется решение некоторой дифференциальной задачи:

$$Au = f, \quad /1/$$

где A - нелинейный оператор, обеспечивающий существование и единственность решения u задачи /1/. Пусть также задана некоторая разностная аппроксимация уравнения /1/:

$$A_h u_h = f_h, \quad /2/$$

где u_h, f_h определены на сеточных областях Ω_h , а для решения уравнения /2/ построен итерационный процесс:

$$\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{r} = -\Psi(u_h^n); \quad \Psi(u_h) = 0, \quad /3/$$

сходящийся к решению u_h со скоростью

$$\|u_h^n - u_h\| \leq [q(h)]^n \|u_h^0 - u_h\|, \quad q < 1. \quad /4/$$

Если q зависит от h , то, как правило,

$$q(h) \rightarrow 1, \quad h \rightarrow 0; \quad q(h_1) < q(h_2), \quad h_2 < h_1. \quad /5/$$

При построении итерационных процессов на последовательности сеток $\Omega_{h_i}, i = 1, 2, \dots, p$,

$$h_1 > h_2 > \dots > h_p$$

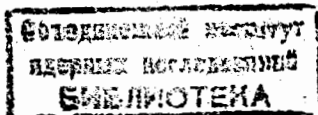
решается задача /2/ методом /3/ на сетке Ω_{h_1} с точностью ϵ_1 :

$$\|u_{h_1}^k - u_{h_1}\| \leq \epsilon_1,$$

после чего сеточная функция $u_{h_1}^k$ интерполируется на сетку

Ω_{h_2} и используется там как начальное приближение в /3/ для уменьшения погрешности до величины $\epsilon_2 < \epsilon_1$ и т.д. В работах /1-3/ показано, что такой процесс дает значительную экономию по сравнению с решением задачи /2/ методом /3/ только на последней сетке Ω_{h_p} . При этом используются лишь общие характеристики алгоритмов, такие, как погрешность аппроксимации и скорость сходимости итераций. Если

$$\epsilon_1 = O(h_1^a), \quad a > 0,$$



где h_i^a - погрешность приближенных решений u_{h_i} , то, как правило, использование последовательности сеток дает экономию в $O(\ln \epsilon_p^{-1})$ раз при $h_p \rightarrow 0$.

В настоящей работе предлагается метод ускорения сходимости на последовательности сеток, дающий на практике значительно большую эффективность по сравнению с вышеописанным. При этом привлекается дополнительная информация о регулярности разложения погрешности решения u_h по степеням шага дискретизации h :

$$u_h = u(x) + \sum_{i=1}^m c_i(x) h^{a_i} + o(h^{a_m}), \quad x \in \Omega_h, \quad a_1 < a_2 < \dots, \quad /6/$$

где функции $c_i(x)$ не зависят от h . Условия существования разложения /6/ для нелинейных операторов A установлены в /4/, и мы здесь на них не останавливаемся.

Суть предлагаемого метода в следующем. Пусть на сетках

$\Omega_{h_i}, i=1, \dots, p; p=m+1$, получены решения u_{h_i} с одинаковой точностью $\epsilon = O(h_{p+1}^{a_m})$ для попарно различных шагов h_i . Тогда для вычисления решения $u_{h_{p+1}}$, $h_{p+1} < h_p$, на сетке $\Omega_{h_{p+1}}$ в качестве начального приближения берем комбинацию

$$u_{h_{p+1}}^0 = \sum_{i=1}^p \gamma_i u_{h_i}, \quad x \in \Omega_{h_{p+1}}, \quad /7/$$

где u_{h_i} интерполируем на сетку $\Omega_{h_{p+1}}$ с точностью $O(h_{p+1}^{a_m})$, а коэффициенты γ_i определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_p = 1, \\ \gamma_1 h_1^{a_1} + \gamma_2 h_2^{a_1} + \dots + \gamma_p h_p^{a_1} = h_{p+1}^{a_1}, \\ \dots \\ \gamma_1 h_1^{a_m} + \gamma_2 h_2^{a_m} + \dots + \gamma_p h_p^{a_m} = h_{p+1}^{a_m} \end{cases} \quad /8/$$

в предположении, что она разрешима. Таким образом, с помощью решений на сетках $\Omega_{h_i}, i \leq p$, производится экстраполяция к точному решению $u_{h_{p+1}}$ разностной задачи на сетке $\Omega_{h_{p+1}}$, поскольку в силу /6/, /8/ имеем

$$u_{h_{p+1}} = \sum_{i=1}^p \gamma_i u_{h_i} + o(h_{p+1}^{a_m}), \quad x \in \Omega_{h_{p+1}}. \quad /9/$$

Отметим, что если $a_i = i$ или $a_i = 2i$, что обычно имеет место, то определитель системы /8/ есть определитель Вандермонда и отличен от нуля. Оценки коэффициентов γ_i приводятся в /5/.

Хотя начальное приближение $u_{h_{p+1}}^0$ из /7/ и близко к $u_{h_{p+1}}$ при $h_p \rightarrow 0$, однако это еще не гарантирует быстрой сходимости итераций /3/ в силу /5/. Здесь следует привлечь дополнительную информацию о характере погрешности интерполяции.

Рассмотрим для определенности задачу Дирихле для уравнения Пуассона, а для ускорения сходимости используем лишь две вспомогательные сетки.

Пусть в ступенчатой области $Q \in R^2$ с границей Γ рассматривается уравнение Пуассона /1/, где $\Delta = \Delta_h$, $u_\Gamma = \phi(\xi)$, которое заменяется разностной задачей:

$$\Delta_h u_h = f, \quad u_{h,\Gamma} = \phi(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \quad /10/$$

определенной на сеточной области Ω_h , согласованной с границей Γ и имеющей одинаковый шаг h по обоим переменным. Оператор Δ_h определен по обычной пятиточечной разностной схеме.

Пусть решение $u(x, y) \in C^6(\bar{Q})$ задачи /1/ таково, что функция $c_1(x, y)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta c_1 = -\frac{1}{12} \left(\frac{d^4 u}{dx^4} + \frac{d^4 u}{dy^4} \right), \quad c_{1,\Gamma} = 0,$$

подчиняется условию $c_1 \in C^4(\bar{Q})$. Тогда согласно /8/ справедливо представление

$$u_h = u(x, y) + c_1(x, y) h^2 + O(h^4), \quad (x, y) \in \Omega_h. \quad /11/$$

Записывая разложение /11/ для $h/2$ и $h/4$, из системы /8/ легко находим

$$u_{h/4} = \frac{5}{4} u_{h/2} - \frac{1}{4} u_h + O(h^4), \quad (x, y) \in \Omega_h. \quad /12/$$

Для интерполирования выражения /12/ на сетку $\Omega_{h/4}$ используем оператор Q , который на точном решении $u(x, y)$ имеет порядок $O(h^4)$, а на функциях $v \in C^4(\bar{Q})$ порядок $O(h^2)$. Тогда в силу /11/ он имеет точность $O(h^4)$ на сеточном решении u_h . Если

$$\Omega_h = \{x_{1i} = 2i_1 h, y_{1j} = 2j_1 h; i_1 \in I, j_1 \in J\},$$

то Q определяем формулой

$$Qu_{ij} = \begin{cases} u_{1i_1 j_1}; & i = 2i_1, j = 2j_1, \\ \frac{1}{4}(u_{i-1, j-1} + u_{i-1, j+1} + u_{i+1, j-1} + u_{i+1, j+1}) - h^2 f_{ij}; & i = 2i_1 \pm 1, j = 2j_1 \pm 1, \\ \frac{1}{4}(u_{i-1, j} + u_{i+1, j} + u_{i, j+1} + u_{i, j-1}) - \frac{h^2}{2} f_{ij}; & i = 2i_1, j = 2j_1 \pm 1, \\ & i = 2i_1 \pm 1, j = 2j_1. \end{cases} \quad /13/$$

которая дважды применяется к u_h и один раз к $u_{h/2}$: $Q(u_h)$ определен на $\Omega_{h/2}$; $Q^2(u_h)$, $Q(u_{h/2})$ - на $\Omega_{h/4}$.

Отметим, что при расчетах на квадратной сетке наряду с измельчением шага можно использовать поворот сетки на угол $\pi/4$, как предложено в [7]. Если решение на такой сетке обозначить через u_r , где при заданном h имеем $r = \sqrt{2}h$, то формулы экстраполяции примут вид

$$u_{h/2} = \frac{3}{4}u_h + \frac{1}{4}u_r + \frac{h^2}{16}f + O(\tau^4), \quad x \in \Omega_h,$$

$$u_{r/2} = \frac{1}{2}u_h + \frac{1}{2}u_r + \frac{h^2}{16}f + O(\tau^4), \quad x \in \Omega_h.$$

При этом решения u_r и u_h определены на одной сетке, поэтому интерполировать по формуле [13] требуется только один раз.

Эффективность экстраполяции [12] по двум сеткам проверялась для односвязной и многосвязной области при различной величине невязки ϵ_{p+1} , а также исследовалась зависимость от гладкости решения $u(x, y)$.

В квадрате $G = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ рассматривалась задача $\Delta u = 0$, $u|_{\Gamma} = \exp(\pi y) \sin \pi x|_{\Gamma}$, откуда $u = \exp \pi y \sin \pi x$. Для решения задачи на квадратной сетке Ω_h размерности 129×129 , $h = 1/128$, использовались четыре вспомогательные сетки: Ω_{2h} , Ω_{4h} , Ω_{8h} , Ω_{16h} , на каждой из которых проводились расчеты с одинаковой точностью ϵ . Критерием окончания процесса на сетке Ω_h было условие

$$\max_{(x,y) \in \Omega_h} |u_h^k - u_h^{k-1}| < \epsilon, \quad /14/$$

где k - номер итерации. В качестве основного итерационного процесса использовался либо метод последовательной верхней релаксации /ПВР/, либо метод Зейделя /З/. Использование последнего связано с тем обстоятельством, что метод Зейделя хорошо подавляет быстро осциллирующую составляющую погрешности, которая возникает при интерполяции. Эта составляющая содержит собственные функции оператора Δ_h , соответствующие большим значениям собственных чисел. Гладкая же часть хорошо восстанавливается на основе равенства [12]. Поэтому использование на последних сетках метода Зейделя существенно ускоряет процесс. Расчеты проводились в следующей последовательности. Решение u_{16h} с помощью оператора Q [13] превращается в начальное приближение для u_{8h} ; с помощью u_{16h} и u_{8h} по формуле [12] строим начальное приближение для u_{4h} и т.д. до последней сетки Ω_h . В табл. 1-4 указаны основные характеристики итераций при различных комбинациях методов ПВР и З на последовательности из пяти сеток. Через $k(h)$ обозначено число итераций

на сетке Ω_h до выполнения условия [14]. Число $k\Sigma$ обозначает суммарное число итераций, вычисленное по формуле

$$k\Sigma = \sum_{i=0}^4 k(2^i h) \cdot 4^{-i} + 1,$$

где учитываются затраты на интерполяцию. Число γ обозначает асимптотическую эффективность итерационного процесса:

$$\exp(-\gamma \cdot k\Sigma) = \epsilon \cdot \epsilon_0^{-1},$$

где ϵ_0 - начальная погрешность.

Отметим, что наибольшая эффективность релаксационного метода, предложенного Р.П. Федоренко, для аналогичной задачи характеризуется числом $\gamma = 0,42^{8/}$, которое не зависит от размерности задачи. Для метода фиктивных неизвестных, построенного Е.С. Николаевым и И.Е. Капориным [9], для подавления ошибки в 10^4 раз требуется согласно [9] в среднем 7,6 итераций для односвязных областей и 8,6 - для двусвязных. Соответствующие значения γ примерно равны 1,1 и 1,0.

В табл. 5 приведены результаты расчетов той же задачи, когда решение на сетке Ω_{16h} использовалось лишь как начальное приближение для вычисления u_{hk+1} . На всех сетках используется метод ПВР. Для сравнения в табл. 6 приведены результаты расчетов для $\epsilon = 10^{-6}$ методом ПВР с начальным приближением $u_{ij} = 0$ на каждой сетке. В табл. 7, 8 приводятся результаты для многосвязной области "В". Табл. 7 соответствует области G_1 , которая получается из исходного квадрата путем выбрасывания прямоугольников Π_1 и Π_2 :

$$\Pi_1 = \{0,25 \leq x \leq 0,75; \quad 0,25 \leq y \leq 0,375\},$$

$$\Pi_2 = \{0,25 \leq x \leq 0,75; \quad 0,625 \leq y \leq 0,75\},$$

а табл. 8 составлена для прямоугольников:

$$\Pi_1 = \{0,375 \leq x \leq 0,625; \quad 0,25 \leq y \leq 0,375\},$$

$$\Pi_2 = \{0,375 \leq x \leq 0,625; \quad 0,625 \leq y \leq 0,75\}.$$

Размеры прямоугольников Π_1 , Π_2 согласованы с исходной сеткой Ω_{16h} . Видно, что скорость сходимости итераций практически не отличается от случая прямоугольной области, а для $\epsilon = 10^{-7}$ даже превосходит ее.

В табл. 9 приводится зависимость скорости сходимости итераций от гладкости решения $u(x, y)$. Все расчеты проводятся до $\epsilon = 10^{-5}$. В области G решается задача

$$\Delta u = -2p^2 \pi^2 \sin \pi x \sin \pi y,$$

$$u|_{\Gamma} = 0$$

с точным решением $u = \sin \pi x \cdot \sin \pi y$. Приведены расчеты для $p = 1 \div 10$, $p = 20$. Видно, что начиная с $p = 7$ величина γ уже

Таблица 1

ε	k(16h)	k(8h)	k(4h)	k(2h)	k(h)	k Σ	γ
10^{-4}	21	24	28	2	1	3.7	2.00
10^{-5}	24	32	47	6	2	7.0	1.43
10^{-6}	27	37	64	44	5	20.6	0.67
10^{-7}	30	44	67	278	33	107.	0.15
	ПВР	ПВР	ПВР	3	3		

Таблица 2

ε	k(16h)	k(8h)	k(4h)	k(2h)	k(h)	k Σ	γ
10^{-4}	21	24	9	2	1	3.5	2.62
10^{-5}	24	32	53	7	2	8.6	1.50
10^{-6}	27	37	218	48	5	32.	0.43
10^{-7}	30	44	45	302	33	113.	0.1
	ПВР	ПВР	3	3	3		

Таблица 3

ε	k(16h)	k(8h)	k(4h)	k(2h)	k(h)	k Σ	γ
10^{-4}	21	24	28	7	1	4.9	1.55
10^{-5}	24	32	47	46	7	22.0	0.5
10^{-6}	27	37	64	87	80	106.	0.13
	ПВР	ПВР	ПВР	ПВР	ПВР		

Таблица 4

ε	k(16h)	k(8h)	k(4h)	k(2h)	k(h)	k Σ	γ
10^{-4}	62	87	8	2	1	3.6	2.00
10^{-5}	77	146	49	7	2	9.3	1.1
10^{-6}	91	206	214	48	5	33.9	0.40
10^{-7}	106	265	455	303	32	140.	0.1
	3	3	3	3	3		

Таблица 5

ε	k(16h)	k(8h)	k(4h)	k(2h)	k(h)	k Σ	γ
10^{-4}	21	24	37	31	1	11.5	0.73
10^{-5}	24	32	48	76	71	91.3	0.12
10^{-6}	27	37	65	100	156	185.	0.07
10^{-7}	30	44	74	129	212	249.	0.06
	ПВР	ПВР	ПВР	ПВР	ПВР		

Таблица 6

ε	k(16h)	k(8h)	k(4h)	k(2h)	k(h)	k Σ	γ
10^{-6}	27	52	101	197	376	376	0.04
	ПВР	ПВР	ПВР	ПВР	ПВР		

Таблица 7

ϵ	k(16h)	k(8h)	k(4h)	k(2h)	k(h)	k Σ	γ
10^{-4}	21	18	27	2	1	4.43	1.70
10^{-5}	23	25	39	6	2	6.42	1.54
10^{-6}	26	33	55	58	6	24.5	0.54
10^{-7}	29	42	72	168	35	82.2	0.19
	ПВР	ПВР	ПВР	3	3		

Таблица 8

ϵ	k(16h)	k(8h)	k(4h)	k(2h)	k(h)	k Σ	γ
10^{-4}	20	19	26	2	1	3.7	1.94
10^{-5}	23	26	43	6	2	6.7	1.40
10^{-6}	26	34	58	49	6	22.5	0.59
10^{-7}	28	39	71	164	34	79.0	0.20
	ПВР	ПВР	ПВР	3	3		

не убывает, а при $p=20$ даже возрастает. Во всех случаях $\min_p \gamma \geq 0,13$. Этот факт объясняется тем, что гладкая компонента решения точно экстраполируется по формуле /12/, а сильно осциллирующие собственные функции легко подавляются методом Зейделя.

Приведенные численные результаты дают основание ожидать, что при регулярном поведении погрешности приближенного решения согласно /6/ предложенный метод ускорения сходимости в случае эллиптических уравнений дает алгоритм, оптимальный по числу арифметических действий, а требуемый объем памяти не более чем в 1,5 раза превосходит соответствующий объем для самой мелкой сетки.

Следует отметить, что величина γ может контролировать себя в процессе расчетов и при уменьшении ее до некоторой величины $\gamma_{\min} \geq \gamma$ можно легко перейти к релаксационному методу из /8/, требующему аналогичной организации вычислений на последовательности сеток.

Таблица 9

p	k(16h)	k(8h)	k(4h)	k(2h)	k(h)	k Σ	γ
1	17	22	26	2	1	3.53	2.54
2	17	29	44	6	2	8.13	1.27
3	18	31	58	64	4	24.1	0.46
4	17	32	61	72	7	29.3	0.38
5	17	34	65	67	42	63.4	0.18
6	16	35	69	60	65	84.9	0.14
7	1	36	73	54	72	90.6	0.13
8	19	37	72	49	73	90.4	0.13
9	18	39	72	44	70	86.1	0.13
10	19	39	73	41	67	84.3	0.13
20	15	39	91	97	41	72.6	0.17
	ПВР	ПВР	ПВР	3	3		

Отметим также, что в табл. 1-4 и 7-9 число итераций на последней сетке Ω_h всегда меньше максимального числа итераций на остальных четырех сетках, что свидетельствует о том, что для данного ϵ число итераций в целом не растет с уменьшением h . При $\epsilon = O(h^2) = 10^{-4}$ число итераций практически монотонно убывает от сетки к сетке, то есть суммарная вычислительная работа оценивается величиной $O(h^{-2})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С. ЖВМиФ, 1966, 6, №5, с.861-883.
2. Коновалов А.Н. Изв. СО АН СССР, сер.техн.наук, 1967, №13, вып.3, с.105-108.
3. Ильин В.П., Свешников В.М. Численные методы механики сплошной среды. ИБ /Новосибирск/, 1971, т.2, №1, с.43-54.
4. Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-12979, Дубна, 1979.
5. Марчук Г.И., Шайдулов В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., 1979.

6. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Айрян Э.А. ОИЯИ, Р5-80-617, Дубна, 1980.
7. Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-80-736, Дубна, 1980.
8. Федоренко Р.П. УМН, 1973, т.28, вып.2, с.121-182.
9. Капорин И.Е., Николаев Е.С. Дифф.уравнения, 1980, т.16, №7, с.1211-1225.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 декабря 1981 года.