сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

5-81-783

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЕТОК

1981

При ускорении сходимости итерационных процессов решения систем конечно-разностных уравнений

$$Au^* = f, \qquad A: R_N \to R_N \qquad /1/$$

большой размерности одной из плодотворных идей оказалось включение задачи /1/ в семейство задач

$$A_{n_k} u_{n_k} = f_{n_k} \; ; \quad k = 1,2,\ldots,\ell \; ; \quad n_\ell = N \, , \qquad /2/$$

которые соответствуют различным дискретизациям исходного уравнения. При этом использование информации о решениях на более "крупных" сетках приводит, как правило, к ускорению сходимости.

Число итераций для достижения заданной точности ϵ пропорционально двум сомножителям: $\ln\epsilon^{-1}$,и некоторому множителю R^{-1}, определяемому спектральными свойствами оператора перехода итерационного процесса. В работах /1/ для разностных эллиптических уравнений предложен релаксационный процесс на последовательности сеток, для которого множитель R^{-1} не зависит от размерности задачи N. В /2/ указан алгоритм, также использующий последовательность сеток, позволяющий для конкретного итерационного процесса избавиться от сомножителя $\ln\epsilon^{-1}$. Объединение двух упомянутых подходов дает оптимальный по числу арифметических действий алгоритм решения задачи /1/ в случае разностных эллиптических уравнений. Вопросам подавления множителя $\ln\epsilon^{-1}$ также посвящены работы /3,4/. Другие подходы к ускорению сходимости содержатся в монографии /5/.

Если для подавления множителя R^{-1} в /1/ используются свойства гладкости собственных функций эллиптических операторов, то избавиться от $\ln\epsilon^{-1}$ можно в случае достаточно произвольных операторов A_n в /2/, имея лишь информацию о скорости сходимости итераций и оператор интерполирования нужного порядка точности. При этом использование решения на грубой сетке в качестве начального приближения для решения на более мелкой сводит задачу к уменьшению невязки на каждой сетке лишь на некоторую величину q, не зависящую от шага дискретизации, чем и устраняется зависимость общего числа итераций от ϵ.

В /2-4/ оценивается эффективность использования двух или нескольких сеток. В настоящей работе мы рассматриваем предельный случай, когда количество вспомогательных задач /2/ устремляется к бесконечности и, таким образом, вычисляем асимптотический коэффициент экономии. При этом выводится дифференциальное уравнение числа арифметических действий, необходимых для решения уравнения /1/ с точностью N^{-p}. Рассмотрения проводятся сразу для случая нелинейного уравнения /1/. Формула для числа арифметических действий соответствует процессу, в котором размерность задачи возрастает непрерывно в зависимости от точности интерполирования и убывания невязки. Хотя на практике размерность задачи принимает лишь целочисленные значения, использование непрерывного аналога наглядно показывает механизм ускорения сходимости, обобщается на нелинейные уравнения, дает возможность оптимизировать сам выбор вспомогательных подпространств R_n в /2/ и сравнить коэффициент ускорения сходимости для различных итерационных процессов.

Пусть требуется найти невырожденное решение задачи /1/ с нелинейным оператором A, действующим из R_N в R_N, для чего используется эволюционный процесс:

$$\frac{du}{dt} = -\psi(u), \quad u(0) = u^\circ; \quad \psi(u^*) = 0, \qquad /3/$$

сходящийся к решению u^* уравнения /1/ при $t \to \infty$ со скоростью

$$\|u(t) - u^*\| \le \exp(-\sigma(N)t)\,\|u^\circ - u^*\| \equiv B\exp(-\sigma(N)t). \qquad /4/$$

Процесс /3/ является непрерывным аналогом итерационного процесса:

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} = -\psi(u_k), \quad u_1 = u^\circ, \quad k = 1,2,\dots,$$
$$\|u_k - u^*\| \le \exp(-a(N)k)\,\|u^\circ - u^*\|. \qquad /5/$$

Число $\sigma(N)$, называемое коэффициентом эффективности процесса /3/, для удобства положим равным соответствующему числу $a(N) = \sigma(N)$. В случае нелинейного оператора A это предположение оправдывается тем, что локальная сходимость процессов /3/, /5/ определяется линейной частью $\psi'(u^*)$ оператора $\psi(u)$ /6/.

Предположим, что процесс установления /3/ ведется до уменьшения начальной погрешности $B = \|u^\circ - u^*\|$ в N^p раз, где N - размерность исходного пространства R_N, то есть

$$\exp(-\sigma(N)t) = N^{-p}, \quad t = p\sigma(N)^{-1}\ln N. \qquad /6/$$

Здесь величина t имеет смысл числа итераций для процесса /5/. Пусть на одну итерацию используется $k \cdot N^m$ арифметических действий, тогда суммарные затраты выразятся формулой

$$Q(N) = pkN^m\sigma^{-1}(N)\ln N \equiv \frac{pk}{m}\int_0^N n^{-1}\sigma(N)^{-1}\ln N\,dn. \qquad /7/$$

Рассмотрим эволюционный процесс /3/ на последовательности пространств R_n, $n_0 \le n \le N$, $n \in \mathbb{Z}$, в каждом из которых существует решение u_n^* уравнений /2/. Пусть имеется оператор интерполирования $P_{nm}: R_n \to R_m$, $n \le m$, $\|P_{nm}\| = 1$, такой, что

$$\|P_{nm}u_n^* - u_m^*\| < c(m,n)\,n^{-q-p}, \quad c \le B, \quad q \ge 0. \qquad /8/$$

Чтобы найти приращение величины $Q(n)$ при переходе к размерности $n+\Delta \in \mathbb{Z}$, нужно от начального приближения $P_{n+\Delta}u_n$ /здесь $P_{n+\Delta} \equiv P_{n,n+\Delta}$) уменьшить погрешность в пространстве $R_{n+\Delta}$ до величины $B(N+\Delta)^{-p}$. В силу /8/

$$\|P_{n+\Delta}u_n - u^*_{n+\Delta}\| \le \|P_{n+\Delta}u_n - P_{n+\Delta}u_n^*\| +$$
$$+ \|P_{n+\Delta}u_n^* - u^*_{n+\Delta}\| \le \|P_{n+\Delta}\|\,\|u_n - u_n^*\| +$$
$$+ c(n, n+\Delta)n^{-q-p} \le (B + n^{-q}c(\Delta))n^{-p}; \quad c(\Delta) \equiv c(n, n+\Delta).$$

Полагая, что для $\forall n$ выполнено соотношение /6/, получим

$$Q(n+\Delta) - Q(n) = -k(n+\Delta)^m\sigma^{-1}(n+\Delta)\ln(1 + B^{-1}n^{-q}c(\Delta))\left(\frac{n}{n+\Delta}\right)^p. \qquad /9/$$

Для исследования /9/ удобно предположить, что величина Δ меняется непрерывно, и перейти к дифференциальному уравнению. Если для случая целочисленных значений n и Δ достаточно потребовать, например, $c(n,m) \le B$, то при переходе к пределу при $\Delta \to 0$ важна асимптотика $c(\Delta)$ при $\Delta \to 0$. Вообще говоря, известно лишь, что $c(0) = 0$, ибо $P_{nn} = E$, и $c(\Delta) \le B$ при $\forall\Delta$. Но учитывая, что коэффициент $c(n,m)$ в случае одной или нескольких вспомогательных сеток не влияет на коэффициент ускорения сходимости при $N \to \infty$ /3/, мы полагаем $c(\Delta) = o(\Delta)$. Еще более естественно это предположение при $q \ge 1$.

Теперь при $\Delta \to 0$ из /9/ следует

$$Q(n+\Delta) - Q(n) = pk(n+\Delta)^{m-1}\sigma^{-1}(n+\Delta)\Delta + o(\Delta), \qquad /10/$$

что приводит к дифференциальному уравнению для $Q(n)$:

$$\frac{dQ}{dn} = pkn^{m-1}\sigma^{-1}(n), \quad n_0 \le n \le N. \qquad /11/$$

Из уравнения /11/ получаем значение $Q(N)$ в случае непрерывного изменения размерности n:

$$Q(N) = Q(n_0) + pk\int_{n_0}^N n^{m-1}\sigma^{-1}(n)\,dn. \qquad /12/$$

Для оценки асимптотического коэффициента ускорения сходимости κ осталось сравнить /12/ с выражением /7/.

Отметим, что при достаточно больших n и целочисленных Δ формула, аналогичная /9/, используется в /3/ для оценки коэффициента κ на последовательности пространств. При этом можно отметить примерно такую же аналогию между формулами /9/ и /11/, как между итерационным процессом /5/ и его непрерывным аналогом /3/. В этом смысле формулу /11/ можно считать непрерывным аналогом выражения /30/ из[3] для объема вычислений на последовательности сеток.

Оценим коэффициент κ для конкретных итерационных процессов в случае разностных эллиптических уравнений. Положим, что N - размерность задачи по одной независимой переменной, а m - число независимых переменных. Величину $Q(n_0)$ считаем несущественной. При условии /8/ величины k и p также не влияют на коэффициент κ. Напомним, что согласно[5] для области с N узлами по одному направлению можно положить $\sigma(N) = N^{-1}$ для метода последовательной верхней релаксации /ПВР/ и метода с чебышевским ускорением; $\sigma(N) = N^{-2}$ - для метода Зейделя; $\sigma(N) = N^{-1/2}$ - для попеременно-треугольного метода с чебышевским набором параметров; $\sigma(N) = [\ln N]^{-1}$ - для метода переменных направлений; σ не зависит от N - для методов, оптимальных по числу операций. Отметим, что для методов второго порядка в случае нелинейных уравнений асимптотическая скорость сходимости непрерывного и дискретного процессов могут не совпадать. Например, для метода Ньютона-Канторовича /НК/ имеет место выражение

$$\|u_k - u^*\| < \exp(-\sigma_0 2^k)\|u^\circ - u^*\|,$$

а для его непрерывного аналога $\sigma = 1$. Поэтому в формуле /4/ в этом случае полагаем

$$\|u(t) - u^*\| \le \exp(-\sigma_0 2^t)\|u^\circ - u^*\|.$$

Коэффициент κ для различных m и $\sigma(N)$ приведены в таблице, где последняя строка соответствует методу НК.

Можно видеть возрастание коэффициента κ при увеличении размерности задачи m, а также убывание этого коэффициента при возрастании скорости сходимости итерационного процесса. Для метода Ньютона /$r = 1$/ с квадратичной сходимостью κ имеет асимптотику $\ln\ln N$, то есть выигрыш от применения последовательности сеток незначительный, однако при $r < 1$ он может стать существенным. Отметим интересные численные эксперименты, проводившиеся в[7], по оптимизации на последовательности сеток для метода Ньютона при $r = 0{,}5$ в задаче на собственные значения для оператора Штурма-Лиувилля. В этом случае $m = 1$ и $\kappa \le \ln N$. Значительная эффективность комплексной организации расчетов подчеркивается в[8]. Об эффективности использования последовательности сеток можно судить по табл. 5,6 работы[9].

В заключение рассмотрим вопрос об оптимизации расчета на последовательности сеток. Действительно, в условии /6/, выполненном для всех $n_0 \le n \le N$, остается произвольным выбор функции в правой части. Пусть в /8/ $q = 0$, тогда вместо условия /6/ запишем

Таблица

σ	$m = 2$			$m = 3$		
	$n = N = \mathrm{const}$	$n_0 \le n \le N$	κ	$n = N = \mathrm{const}$	$n_0 \le n \le N$	κ
N^{-2}	$N^4 \ln N$	$\frac{1}{4}N^4$	$4\ln N$	$N^5 \ln N$	$\frac{1}{5}N^5$	$5\ln N$
N^{-1}	$N^3 \ln N$	$\frac{1}{3}N^3$	$3\ln N$	$N^4 \ln N$	$\frac{1}{4}N^4$	$4\ln N$
$N^{-1/2}$	$N^{5/2} \ln N$	$\frac{2}{5}N^{5/2}$	$\frac{5}{2}\ln N$	$N^{7/2} \ln N$	$\frac{2}{7}N^{7/2}$	$\frac{7}{2}\ln N$
$[\ln N]^{-1}$	$N^2 \ln^2 N$	$\frac{1}{4}(\ln N^2 - 1)N^2$	$\kappa > 2\ln N$	$N^3 \ln^2 N$	$\frac{1}{9}N^3(\ln N^3 - 1)$	$\kappa > 3\ln N$
const	$N^2 \ln N$	$\frac{1}{2}N^2$	$2\ln N$	$N^3 \ln N$	$\frac{1}{3}N^3$	$3\ln N$
НК	$N^2 \ln\ln N$	$\le \frac{1}{2}N^2$	$\kappa > 2\ln\ln N$	$N^3 \ln\ln N$	$\le \frac{1}{3}N^3$	$\kappa > 3\ln\ln N$

$$\exp(-\sigma(n)t) = x(n)^{-1}, \quad x(N) = N^p, \quad x^{-1} \ge n^{-p}. \qquad /13/$$

Величина $Q(N)$ из /12/ является функционалом от $x(n)$, который можно минимизировать на множестве функций с ограничениями /13/. Легко видеть, что уравнение /11/ в этом случае примет вид

$$\frac{dQ}{dn} = k\,\dot{x}(n)\,x(n)^{-1}\,n^m\,\sigma^{-1}(n),$$

а для $Q(N)$ получим вариационную задачу:

$$Q(N) = Q(n_0) + k\int_{n_0}^{N} \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} t^m \sigma^{-1}(t)\,dt \to \inf,$$

$$x(t) \le t^p, \quad x(N) = N^p. \qquad /14/$$

Полагая $f(t) = t^m \sigma^{-1}(t)$, интеграл в /14/ приводим к виду

$$f(t)\ln x(t)\Big|_{n_0}^{N} - \int_{n_0}^{N} \ln x(t)\, f'(t)\,dt. \qquad /15/$$

В силу монотонности $f(t)$ минимум последнего выражения достигается при $x(t) = t^p$, то есть приходим к условию /6/. Таким образом, при $q=0$ условие /6/ является оптимальным.

Однако, как видно из выражения /15/, если в задаче /14/ избавиться от условия $x(t) \le t^p$, то есть использовать интерполяцию более высокого порядка в смысле определения /8/ /$q \ge 1$/, чем точность n^{-p} аппроксимации уравнения /2/, то величину $Q(N)$ можно существенно уменьшить. Именно такой принцип был использован в /9/ для ускорения сходимости при использовании методов ПВР и Зейделя, где для уравнения Пуассона построены итерации, требующие на практике $O(N^2)$ арифметических действий в случае достаточно гладких решений. При этом являлось существенным разложение приближенного решения по степеням шага дискретизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоренко Р.П. ЖВМ и МФ, 1961, т.1, №5, с.992-927; Федоренко Р.П. ЖВМ и МФ, 1964, 4, №3, с. 559-564.
2. Бахвалов Н.С. ЖВМ и МФ, 1966, 6, №5, с. 861-883.
3. Ильин В.П., Свешников В.М. ИБ /Новосибирск/, 1971, т.2, №1, с. 43-54.
4. Коновалов А.И. Известия СО АН СССР, серия техн.наук, 1967, №13, вып.3, с. 105-108.
5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. "Наука", М., 1978.
6. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ДАН СССР, 1976, т.231, №5, с. 1051-1055.
7. Баатар Д., Пузынин И.В., Ракитский А.В. ОИЯИ, Р11-12908, Дубна, 1979.
8. Калиткин Н.И. Численные методы. "Наука", М., 1978.
9. Айрян Э., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-80-617, Дубна, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 декабря 1981 года.