сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

5-81-595

Е.П.Жидков, Нгуен Монг, А.В.Федоров

УТОЧНЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1981

Большой интерес в последнее время вызывают проблемы экстраполяции по малым параметрам в некорректных задачах [1,2]. В работе [2] показаны возможности метода повышения точности решений системы алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей. В данной работе покажем, что уточнение регуляризованных решений можно провести с помощью асимптотического разложения решений по степеням малого параметра регуляризации. Такой подход к проблеме экстраполяции по малым параметрам вполне может быть применен и в других некорректных задачах.

Итак, будем рассматривать систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = f \qquad /1/$$

с плохо обусловленной комплексной квадратной матрицей A порядка n. Здесь векторы x и f - из пространства C^n. Скалярное произведение и норма в пространстве C^n определяются следующими соотношениями:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i, \qquad \|u\| = (u, u)^{1/2},$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n), \qquad v = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Пусть

$$U = \{ u \in C^n : \|Au - f\| = \inf_{v \in C^n} \|Av - f\| \}.$$

Элемент $u^f \in U$ называется нормальным псевдорешением системы /1/, если

$$\|u^f\| = \inf_{u \in U} \|u\|.$$

Для нахождения нормального псевдорешения u^f системы /1/ может быть использован метод регуляризации, предложенный в [1]. Вместо вектора u^f требуется найти в C^n вектор u^ϵ, доставляющий минимум функционалу

$$\|u\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\|Au - f\|^2, \qquad /2/$$

где ϵ - некоторый положительный параметр. Эта задача имеет единственное решение u^ϵ, для которого справедливо соотношение

$$\lim_{\epsilon \to 0} u^\epsilon = u^f.$$

Решение u^ϵ задачи минимизации функционала /2/ можно получить из системы уравнений:

$$A^*Au^\epsilon + Eu^\epsilon = A^*f, \qquad /3/$$

где A^* - матрица, сопряженная к матрице A; E - единичная матрица порядка n.

Пусть теперь унитарная матрица P и диагональная матрица $D = \mathrm{dig}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ таковы, что

$$A^*A = PDP^*.$$

Тогда система /3/ путем замены

$$y^\epsilon = P^*u^\epsilon$$

может быть приведена к следующей системе уравнений:

$$(D + \epsilon E)y^\epsilon = F, \qquad /4/$$

где

$$F = P^*A^*f.$$

Отсюда

$$y_i^\epsilon = \frac{F}{\lambda_i + \epsilon}, \quad i = 1,2,\dots,n. \qquad /5/$$

Здесь $\lambda_i \geq 0$; F_i - компоненты вектора F.

Рассмотрим функцию

$$\gamma(\epsilon) = (\lambda + \epsilon)^{-1}, \quad \epsilon \geq 0.$$

Она бесконечно дифференцируема в окрестности нуля, если $\lambda > 0$. Пусть $\lambda > 0$, тогда

$$\gamma(\epsilon) = \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}}\epsilon^k.$$

Таким образом, если $\lambda_i > 0$, то из /5/ находим

$$y_i^\epsilon = F\left(\frac{1}{\lambda_i} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\lambda_i^{k+1}}\epsilon^\epsilon\right). \qquad /6/$$

Если же $\lambda_i = 0$, то, как показано в [1-3], $F_i = 0$ и, следовательно, $y_i^\epsilon = 0$.

Обозначим

$$D^{-1} = \mathrm{dig}[\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}],$$

причем, если $\lambda_i = 0$, то λ_i^{-1} - произвольные числа. Из равенства /6/ получим

$$y^\epsilon = FD^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k F(D^{-1})^{k+1}\epsilon^k. \qquad /7/$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Для решения u^ϵ регуляризованной задачи /3/ справедливо разложение

$$u^\epsilon = u^f + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\epsilon^k, \qquad /8/$$

где c_k - не зависящие от ϵ константы.

Доказательство. Умножая обе части равенства /7/ на матрицу P, получим

$$Py^\epsilon = PFD^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k PFD^{-k}\epsilon^k.$$

Так как $y^\epsilon = P^*y^\epsilon$ и P - унитарная, то из последнего равенства следует, что

$$u^\epsilon = PFD^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k PFD^{-k}\epsilon^k. \qquad /9/$$

Поскольку формула /9/ справедлива для любого ϵ, а

$$\lim_{\epsilon \to 0} u^\epsilon = u^f,$$

где u^f - нормальное решение системы /1/, то из равенства /9/ получим

$$u^\epsilon = u^f + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k PFD^{-k}\epsilon^k. \qquad /10/$$

Отсюда следует разложение /8/. Теорема доказана.

Пусть теперь матрица A и вектор f заданы неточно, то есть вместо уравнения /1/ рассматривается уравнение

$$A_h v = f_\delta, \qquad /11/$$

где A_h - матрица, отличающаяся от матрицы A на величину порядка h / h - некоторый положительный и достаточно малый параметр/:

$$((A_h - A)u, u) \leq ||u||h, \qquad /12/$$

f_δ - вектор пространства C^n, удовлетворяющий условию

$$||f_\delta - f|| \leq \delta, \qquad /13/$$

$\delta > 0$ - малый параметр.

Таким образом, вместо решения u^f уравнения /1/ ищется элемент v^ϵ, удовлетворяющий системе

$$A_h^* A_h v^\epsilon + \epsilon v^\epsilon = A_h^* f_\delta . \qquad /14/$$

При каждом фиксированном параметре $\epsilon > 0$ система /14/ имеет единственное решение v^ϵ, удовлетворяющее условию

$$\lim_{\epsilon \to 0} v^\epsilon = v^f ,$$

v^f решение системы /11/. Известно также, что

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \delta \to 0}} v^f = u^f ,$$

причем параметры h и δ стремятся к нулю независимо друг от друга.

Поставим целью оценить разность $v^\epsilon - u^f$. Имеет место следующая лемма.

Лемма. Для каждого положительного ϵ справедливо неравенство

$$\| v^\epsilon - u^\epsilon \| \le (c_1 h + \delta) \epsilon^{-1} , \qquad /15/$$

где c_1 - константа, не зависящая от h, δ и ϵ.

Доказательство этой леммы очевидно.

Пусть задана последовательность

$$\epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_m \ge 0 .$$

Тогда, для ускорения сходимости процессов нахождения устойчивых решений v^{ϵ_1}, $v^{\epsilon_2}, \dots, v^{\epsilon_m}$, может быть использован предложенный в [2] алгоритм. Пусть найдено решение v^{ϵ_1} Тогда в качестве начального приближения к решению v^{ϵ_2} можно взять v^{ϵ_1}. Пусть уже нашли решения

$$v^{\epsilon_1}, v^{\epsilon_2}, \dots, v^{\epsilon_k} .$$

Тогда для решения $v^{\epsilon_{k+1}}$ берется начальное приближение:

$$v_0^{\epsilon_{k+1}} = \sum_{i=1}^{k} \nu_i v^{\epsilon_i} ,$$

которое отличается от $v^{\epsilon_{k+1}}$ на величину порядка ϵ_1^k [2]. Здесь коэффициенты $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ вычисляются по формуле

$$\nu_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{k} \frac{\epsilon_{k+1} - \epsilon_j}{\epsilon_i - \epsilon_j} .$$

После отыскания решения v^{ϵ_m} окончательное приближенное решение u к решению u^f системы /1/ строится по формуле

$$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v^{\epsilon_i} , \qquad /16/$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ определяются из соотношений

$$\alpha_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{m} \frac{-\epsilon_j}{\epsilon_i - \epsilon_j} . \qquad /17/$$

Теперь на основе леммы аналогично [2] можно получить окончательную оценку для экстраполированного по формуле /16/ решения.

Теорема 2. Справедливо следующее неравенство:

$$\| u^f - u \| \le \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \frac{c_1 h + \delta}{\epsilon_i} + c \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \epsilon_i^m , \qquad /18/$$

где c, c_1 - константы, не зависящие от h, δ, ϵ.

Доказательство. Так как $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ определены из соотношений /17/, то имеет место следующее неравенство:

$$\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u^{\epsilon_i} - u^f \| \le c \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \epsilon_i^m , \qquad /19/$$

где c - константа, не зависящая от $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m$.

Неравенство /18/ легко следует из неравенств /15/, /19/ и неравенства треугольника:

$$\| u - u^f \| = \| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v^{\epsilon_i} - u^f \| \le$$

$$\le \| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v^{\epsilon_i} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u^{\epsilon_i} \| + \| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u^{\epsilon_i} - u^f \| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \frac{c_1 h + \delta}{\epsilon_i} + c \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \epsilon_i^m .$$

Теорема доказана.

Следует отметить, что регуляризованное решение u^ϵ /или v^ϵ/ отличается от нормального решения u^f системы /1/ /или решения v^f системы /11// на величину порядка ϵ. Для достижения высокой точности регуляризованных решений необходимо взять параметр ϵ достаточно малым. Уменьшение же параметра ϵ в свою очередь ухудшает сходимость процесса нахождения регуляризованных решений. Численные расчеты показывают, что при стремлении параметра ϵ к нулю количество итераций /зависящее от вычислительного метода определения регуляризованных решений/ монотонно растет. Абсолютная погрешность /разность между нормальным и регуляризованным решениями/ при этом падает до некоторого значения параметра ϵ_m и, начиная с этого значения, увеличивается. Таким образом, имеет смысл найти регуляризованные решения:

$$v^{\epsilon_1}, v^{\epsilon_2}, \dots, v^{\epsilon_m},$$

и затем окончательное приближенное решение u строится по формуле /16/. Эффективность разложения /8/, а также полученной на основе этого разложения формулы /16/, показана в следующей таблице:

ϵ	$\|u^\epsilon - u^f\|$	$\|u - u^f\|$
0,01	$6,21 \times 10^{-4}$	
0,0075	$4,66 \times 10^{-4}$	
0,0050	$3,11 \times 10^{-4}$	
0,0025	$1,55 \times 10^{-4}$	$3,00 \times 10^{-12}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Аресенин В.Я. Методы решения некорректных задач. "Наука", М., 1979.
2. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., 1979.
3. Воеводин В.В. Линейная алгебра. "Наука", М., 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 сентября 1981 года.