сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

5-81-594

Е.П.Жидков, Нгуен Монг, А.В.Федоров

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

1981

В настоящей работе предлагается метод уточнения квадратурных формул для произвольной гладкой функции. Он является продолжением идеи эйлеровых методов разложения остатка квадратур по степеням шага интегрирования /1/, в нем используется известная линейная экстраполяция по Ричардсону /2/.

Пусть $f(x) - 2\nu$ $(\nu \geq 1)$ раз непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция:

$$f(x) \in C^{2\nu}[a,b].$$

Тогда справедливо следующее ее разложение по многочленам Бернулли /1/:

$$f(x) = \frac{1}{h}\int_a^b f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{2\nu-1} \frac{h^{k-1}}{k!} B_k\left(\frac{x-a}{h}\right)[f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] + \qquad /1/$$

$$+ \rho_{2\nu}(f), \qquad x \in [a,b],$$

где $h = b-a$,

$$\rho_{2\nu}(f) = -\frac{h^{2\nu-1}}{(2\nu)!}\int_a^b f^{(2\nu)}(t)[B^*_{2\nu}\left(\frac{x-t}{h}\right) - B^*_{2\nu}\left(\frac{x-a}{h}\right)]\,dt.$$

Здесь $B_k(y)$, $0 \leq y \leq 1$, - многочлен Бернулли k-й степени, а $B^*_k(y)$ - его периодическое продолжение с периодом, равным 1.

Теперь, используя формулу /1/, докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть задана последовательность целых положительных чисел:

$$n_1, n_2, \ldots, n_q, \quad q \geq 1. \qquad /2/$$

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha_k = 1, \qquad \sum_{k=1}^{q} \alpha_k h_k^{2i} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,q-1, \qquad /3/$$

где

$$h_k = \frac{b-a}{n_k}, \quad k = 1,2,\ldots,q.$$

Пусть

$$T_{n_k} = \frac{h_k}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n_k-1} f(a+ih_k)\right], \qquad /4/$$

$$k = 1,2,\dots,q\,.$$

Тогда для любой функции $f(x)$, 2ν раз $(\nu-1 \geq q)$ непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$, имеет место следующее представление:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k T_{n_k} + \sum_{k=q}^{\nu-1} c_k \sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i^{2k} + \rho(f), \qquad /5/$$

где c_k - постоянные, не зависящие от h_i,

$$\rho(f) = (b-a)B_{2\nu} f^{(2\nu)}(\xi)\sum_{k=1}^{q} \frac{\alpha_k}{(2\nu)!} h_k^{2\nu}, \quad \xi\in[a,b].$$

Доказательство. Перепишем формулу /1/ в следующем виде:

$$J(f) = \int_a^b f(x)\,dx = hf(x) - hB_1\left(\frac{x-a}{h}\right)[f(b)-f(a)] - \sum_{k=2}^{2\nu-1} \frac{h^k}{k!} B_k\left(\frac{x-a}{h}\right)[f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)] + \rho_{2\nu}(f), \qquad /6/$$

$$\rho_{2\nu}(f) = \frac{h^{2\nu}}{(2\nu)!}\int_a^b f^{(2\nu)}(t)\left[B^*_{2\nu}\left(\frac{x-t}{h}\right) - B^*_{2\nu}\left(\frac{x-a}{h}\right)\right]dt,$$

$$x\in[a,b]. \qquad /7/$$

Так как формулы /6/, /7/ справедливы для любого x из отрезка $[a,b]$, то, полагая $x=a$, обозначая $T_2 = \frac{1}{2}[f(b)+f(a)]$ и делая замену $a-t=-hu$ в последнем интеграле /7/, получаем

$$J(f) = T_2 - \sum_{k=2}^{2\nu-1} \frac{h^k}{k!} B_k(0)[f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)] + \frac{h^{2\nu+1}}{(2\nu)!}\int_0^1 f(a+hu)\,y_{2\nu}(u)\,du\,. \qquad /8/$$

Здесь $B_k(0) = B_k$ - числа Бернулли [1], а

$$y_{2\nu}(u) = B_{2\nu}(u) - B_{2\nu}(0), \qquad 0\leq u\leq 1\,.$$

С учетом того, что $B_k = 0$, для всех нечетных индексов, отличных от 1, формула /8/ упрощается:

$$J(f) = T_2 - \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + \frac{h^{2\nu+1}}{(2\nu)!}\int_0^1 f^{(2\nu)}(a+hu)\,y_{2\nu}(u)\,du\,. \qquad /9/$$

Если длина отрезка $[a,b]$ достаточно мала, то в качестве приближенного значения к интегралу $J(f)$ можно взять сумму:

$$T_2 = 0{,}5\,[f(a)+f(b)].$$

Это малая формула трапеций, погрешность которой имеет порядок h^3.

Так как отрезок $[a,b]$ произвольный, то его разделим на n равных частей точками:

$$a,\ a+h,\ a+2h, \dots, a+(n-1)h,\ a+nh=b,$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad n\geq 2\,.$$

Теперь к каждому частичному отрезку

$$[a+ih,\ a+(i+1)h]$$

применим формулу /9/:

$$\int_{a+ih}^{a+ih+h} f(t)\,dt = 0{,}5\,[f(a+ih)+f(a+ih+h)] - \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k}[f^{(2k-1)}(a+ih+h) - f^{(2k-1)}(a+ih)] + \frac{h^{2\nu+1}}{(2\nu)!}\int_0^1 f^{(2\nu)}(a+ih+hu)\,y_{2\nu}(u)\,du\,. \qquad /10/$$

Почленно суммируя равенство /10/ по всем значениям i от 0 до $n-1$, получим

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+ih}^{a+ih+h} f(t)\,dt = T_n - \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + \rho_{2\nu}(f), \qquad /11/$$

где

$$T_n = \frac{1}{2} h\,[\,f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\,], \qquad /12/$$

$$\rho_{2\nu}(f) = \frac{h^{2\nu+1}}{(2\nu)!}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} f^{(2\nu)}(a+kh+hu)\,y_{2\nu}(u)du\,. \qquad /13/$$

Рассмотрим интеграл

$$I(f) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} f^{(2\nu)}(a+kh+hu)\,y_{2\nu}(u)\,du\,.$$

Как показано в /1/, на отрезке $[a,b]$ существует такая точка ξ, что

$$I(f) = -n B_{2\nu} f^{(2\nu)}(\xi).$$

Отсюда

$$\rho_{2\nu}(f) = -\frac{n h^{2\nu+1}}{(2\nu)!} B_{2\nu} f^{(2\nu)}(\xi),$$

причем точка ξ существует независимо от выбора числа n. Таким образом, для любого $n > 0$ справедливо представление

$$J(f) = T_n - \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k}[\,f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\,] - \frac{nh^{2\nu+1}}{(2\nu)!} B_{2\nu} f^{(2\nu)}(\xi). \qquad /14/$$

Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_q$ - заданные положительные целые числа. Тогда, подставляя n_i вместо n в формулу /14/ и умножая обе части полученного равенства на α_i, определенное из условий теоремы, и затем суммируя по всем i от 1 до q, получаем

$$J(f) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i T_{n_i} - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{h_i^{2k}}{(2k)!} B_{2k}[\,f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\,] -$$

$$- \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \frac{n_i h_i^{2\nu+1}}{(2\nu)!} B_{2\nu} f^{(2\nu)}(\xi),$$

$$h_i = \frac{b-a}{n_i}.$$

Отсюда сразу следует представление /5/. Теорема доказана.

Непосредственными следствиями теоремы 1 являются следующие утверждения:

Теорема 2. Для формулы трапеций T_n справедливо разложение по степеням шага интегрирования:

$$J(f) = T_n - \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k}[\,f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\,] -$$

$$- \frac{h^{2\nu+1}}{(2\nu)!} B_{2\nu} f^{(2\nu)}(\xi), \quad \xi \in [a,b]. \qquad /15/$$

Доказательство. Формула /15/ получается из представления /5/ при $q = 1$, $\alpha = 1$. Теорема доказана.

Заметим, что формула /15/ и есть знаменитая формула Эйлера-Маклорена /1/, устанавливающая связь между интегралом $J(f)$ и суммой значений функции $f(x)$ в равноотстоящих точках:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(a+kh) = h^{-1} T_n + 0{,}5[\,f(a)+f(b)\,].$$

Формула /15/ была получена в /1/ довольно сложным путем. Для увеличения точности формулы трапеций там же предложен следующий прием. К сумме T_n прибавляются слагаемые

$$\frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k}[\,f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\,], \quad k = 1,2,\ldots.$$

Такой прием не очень удобен, так как приходится вычислять производные функции $f(x)$ на концах отрезка $[a,b]$. Это неудобство особенно проявляется в тех случаях, когда функция $f(x)$ не задана, а ищется в виде решения некоторого функционального уравнения.

Как видно из представления /5/, для повышения точности квадратурной формулы трапеций достаточно вычислять сумму T_n несколько раз для различных значений n и в качестве квадратурной формулы повышенной точности взять комбинацию

$$T = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i T_{n_i}\,. \qquad /16/$$

При $q = 2$ формула /16/ дает погрешность порядка h^4, а при $q = 3$ - погрешность порядка h^6 и т.д.

Очевидно, что наиболее экономичной, с точки зрения реализации формулы /16/ на ЭВМ, является эта формула при следующих данных:

$$n_1 = n, \quad n_2 = 2n, \quad n_3 = 4n, \ldots, \quad n_q = 2^{q-1} n,$$

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{q} \alpha_i 2^{-2k(i-1)} = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots, q-1.$$

В данном случае формула /16/ принимает вид

$$T=\sum_{i=1}^{q}\alpha_i T_{n_i}= \qquad /17/$$

$$=h\sum_{i=1}^{q}\frac{\alpha_i}{2^i}\Big[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{2^{i-1}n-1} f(a+kh2^{1-i})\Big],$$

где $h=\frac{b-a}{n}$.

Следствием формулы /17/ является следующая

Теорема 3. Пусть T_n и T_{2n} вычислены по формуле /13/ соответственно для n и $2n$, а U_n - по формуле Симпсона:

$$U_n=\frac{h}{6}\Big[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)+4\sum_{k=1}^{n} f(a+(2k-1)\frac{h}{2})\Big].$$

Тогда

$$U_n=\frac{4T_{2n}-T_n}{3}, \qquad /18/$$

и справедливо разложение

$$J(f)=U_n+\sum_{k=2}^{\nu-1}\frac{h^{2k}B_{2k}}{3(2k)!}[1-2^{-2k+2}][f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]+\rho_{2\nu}(f), \qquad /19/$$

где

$$\rho_{2\nu}(f)=\frac{nh^{2\nu+1}}{6(2\nu)!}(1-2^{-2\nu+2})B_{2\nu}f^{(2\nu)}(\xi), \quad \xi\in[a,b].$$

Доказательство. Непосредственным образом легко проверяется равенство /18/. Разложение /19/ следует из представления /5/ при $q=2$, $\alpha_1=-1/3$, $\alpha_2=4/3$, $n_1=n$, $n_2=2n$. Теорема доказана.

Отметим, что, как и формула /15/, формула /19/ была получена в /1/ более сложным и громоздким путем по сравнению с приведенным в настоящей работе.

В общем случае с помощью комбинации /17/ можно получить различные квадратурные формулы высокого порядка точности. Они достаточно просты и удобны не только для приближенного вычисления интеграла $J(f)$, но и для численного решения интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. Физматгиз, М., 1959.
2. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 сентября 1981 года.