

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

4594 / 2-81

7/9-81

5-81-362

+

А.Двуреченский, Л.А.Кулюкина, Г.А.Ососков

ОБ ОЦЕНКЕ ПЛОТНОСТИ СЛЕДОВ  
В ТРЕКОВЫХ КАМЕРАХ

Направлено в Оргкомитет "III Вильнюсской  
конференции по теории вероятностей  
и математической статистике"  
/Вильнюс, июнь 1981 г./

1981

## 1. Введение

Одним из актуальных вопросов обработки экспериментальной информации в физике высоких энергий является определение ионизационной плотности следов частиц в трековых камерах. Вдоль траектории движения частицы в магнитном поле камеры появляется цепочка пузырьков или стримерных разрядов, изображение которых можно представить следующей моделью: след (трек) частицы состоит из последовательности окружностей со случайными радиусами и центрами, образующими процесс Пуассона, так что расстояние между центрами соседних окружностей имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\varphi$  /1,8/.

С ростом  $\varphi$  отдельные окружности сливаются в сгустки, и при визуальном наблюдении структуре трека описывается как последовательность сгустков и промежутков между ними.

В настоящей работе рассматривается задача оценки ионизационного параметра  $\varphi$  по данным измерений изображения трека с помощью специального автоматического устройства, выполняющего дискретизацию и оцифровку изображения, что в математическом плане соответствует наложению на него решетки с шагом  $h$  и запоминанию координат ячеек решетки, заполненных одной или несколькими окружностями (или же частью окружности). Координаты пустых ячеек, а также тех, которые содержат пренебрежимо малую часть какой-то окружности, не запоминаются. Отвлекаясь от проблемы обнаружения и прослеживания треков, можно рассматривать дискретизованный трек как последовательность серий нулей и единиц, по которой и следует оценить исходный параметр  $\varphi$ .

В терминах теории массового обслуживания<sup>/6/</sup> можно рассматривать случайный диаметр окружности как время обслуживания простейшего потока требований в многоканальной системе с бесконечным числом обслуживающих приборов (системе  $\langle E, 1, G/\infty, 1 \rangle$ )<sup>/7/</sup>. Длину сгустка  $L$  можно истолковать как время занятости системы, а промежутки между сгустками — как время простоя системы. Распределение величины  $L$  является наиболее интересной с точки зрения статистических выводов характеристикой. Можно показать, что  $L < +\infty$ , а длины промежутков между сгустками независимы и распределены экспоненциально с тем же параметром  $\varphi$ . По-видимому, в силу некоторой экзотичности системы

$\langle E, 1, G/\infty, 1 \rangle$  авторам не удалось найти в литературе относящихся к ней работ по теории массового обслуживания. В физических работах (см., напр.<sup>/2/</sup>) рассмотрен частный случай постоянных диаметров и дана оценка максимального правдоподобия для  $\varphi$ .

Другой частный случай дискретизации с помощью узкой щели, направленной вдоль трека ( $h \gg D, D = \text{const}$ ), исследовался в работе<sup>/3/</sup>, где было показано, что с помощью так называемого  $\tau$ -критерия<sup>/4/</sup> оценке поддается не сама величина  $g$ , а относительная плотность следов в сравнении с плотностью трека, принятого за эталонный.

В настоящем сообщении, обобщающем работу<sup>/5/</sup>, выводятся интегральные уравнения для  $f_L(l)$  - плотности распределения длины сгустка  $L$  и характеристическая функция, позволяющая найти, в частности, и первые два момента. Получена комбинированная оценка на базе оценки максимального правдоподобия по распределению длин промежутков и первого момента распределения длин сгустков. Все результаты проверены с помощью монте-карловской модели стримерного трека с реальными параметрами.

## 2. Модель изображения стримерного трека

Воспользуемся введенной в<sup>/1/</sup> моделью: изображение отдельного стримера - окружность случайного диаметра  $D$ , распределенного с плотностью вероятности  $f_D(t)$ , отличной от нуля на отрезке  $(D_{\min}, D_{\max})$ , причем диаметры любых окружностей статистически независимы.

Расстояния  $l$  между двумя соседними центрами ионизации статистически независимы и распределены экспоненциально:

$$f_l(t) = g e^{-gt}, \quad t \geq 0. \quad (I)$$

Как было показано в работе<sup>/5/</sup>, длины сгустков, образуемых сливающимися окружностями, и длины промежутков между ними - статистически независимы, левые края окружностей также образуют пуассоновский процесс с параметром  $gt$ , а расстояния как между левыми, так и правыми краями окружностей, равно как и длины промежутков между двумя сгустками, распределены с плотностью (I).

Многие из статистических выводов работы<sup>/5/</sup> существенно опирались на гипотезу  $S$ , предложенную на основании рассмотрения реальных структур цепочек стримеров, образующих сгустки.

Гипотеза  $S$ . Вероятность события, при котором изображение одного стримера целиком покрывает изображение соседнего (или группы соседних) пренебрежимо мала. Однако подробное исследование области применимости гипотезы  $S$ , т.е. вычисление вероятности этой гипотезы в зависимости от параметра  $g$ , не было проведено. Поэтому ниже доказаны следующие теоремы, позволяющие оценить эту вероятность.

Теорема I. Рассмотрим бесконечную последовательность окружностей с диаметрами  $D_i; i=1,2,\dots$  и соответствующую последовательность промежутков между их левыми краями  $\{l_i; i=1,2,\dots\}$ . Тогда вероятность

события  $S_1$ , когда в последовательности окружностей существует хотя бы одна окружность, целиком поглощающая соседнюю, определяется поведением вероятности  $P(l_1 + D_2 \leq D_1)$ , т.е.

$$P(S_1) = \begin{cases} 0, & P(l_1 + D_2 \leq D_1) = 0, \\ 1, & P(l_1 + D_2 \leq D_1) > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство.

$$S_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{l_n + D_{n+1} \leq D_n\}, \text{ а дополнительное событие} \\ \bar{S}_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{l_n + D_{n+1} > D_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{l_{2n-1} + D_{2n} > D_{2n-1}\} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \{l_{2n} + D_{2n+1} > D_{2n}\}.$$

Пусть  $A$  и  $B$  обозначают соответственно первое и второе бесконечные пересечения в правой части последнего равенства. Тогда

$$P(A) = P(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(l_1 + D_2 > D_1)^n = \begin{cases} 0, & P(l_1 + D_2 \leq D_1) = 0, \\ 1, & P(l_1 + D_2 \leq D_1) > 0, \end{cases}$$

откуда следует (2).

Следствие. Вероятность события  $S_{\infty}$ , когда существует бесконечное число окружностей, поглощающих соседнюю, равна соответственно 0 или 1 согласно (2).

Теорема 2. Вероятность события  $S$ , при котором фиксированная окружность поглощает одну или несколько соседних, допускает оценку

$$P_1 \equiv P(l_1 + D_2 \leq D_1) \leq P(S) \leq 1 - e^{-g \cdot D_{\min}} I(g) \equiv P_2, \quad (3)$$

где

$$I(g) = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} e^{-gt} f_D(t) dt. \quad (4)$$

Доказательство. Не нарушая общности, можно предположить, что фиксированная окружность - первая. Тогда

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ где } A_n = \{l_1 + \dots + l_n + D_{n+1} \leq D_1\}$$

и  $A_1 \subset S$ ,

с другой стороны,

$$A_n \subset \{l_1 + D_{n+1} < D_1\} \subset \{l_1 + D_{\min} \leq D_1\} = \\ = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} P(l_1 + D_{\min} < u | D_1 = u) f_D(u) du = 1 - e^{-g \cdot D_{\min}} I(g).$$

Вероятности  $P_1$  и  $P_2$ , являющиеся оценками  $P(S)$  снизу и сверху и вычисленные для различных значений  $g$ , приведены в таблице I.

Таблица I

$g$	$P_1$	$P_2$	$g$	$P_1$	$P_2$
0,05	0,003951	0,012399	0,55	0,040994	0,125963
0,1	0,007855	0,024598	0,60	0,044465	0,13635
0,15	0,011713	0,036600	0,65	0,047897	0,146573
0,20	0,015525	0,048410	0,70	0,05289	0,156636
0,25	0,019293	0,060030	0,75	0,054642	0,166540
0,30	0,023016	0,071464	0,80	0,057957	0,176289
0,35	0,026696	0,082716	0,85	0,061234	0,185886
0,40	0,030334	0,093789	0,90	0,064474	0,195334
0,45	0,033928	0,104685	0,95	0,067677	0,204634
0,50	0,037482	0,115409	1,00	0,070844	0,21379

Таблица I показывает, что результаты работы /5/, основанные на использовании гипотезы  $S$ , перестают быть правомочными уже для  $g > 0,7$ . Более определенным этот вывод может стать только после уточнения оценки  $P(S)$  сверху.

В то же время исследование на монте-карловской модели стримерных треков показывает справедливость многих выводов, основанных на гипотезе  $S$ , и для  $g \geq 0,7$ , в частности, положений о геометрическом распределении числа стримеров в сгустке и уравнений для длин сгустков, рассматриваемых в следующем параграфе.

## 2.1. Характеристическая функция и начальные моменты распределения длин сгустков

Как показано в работе /5/, вероятность  $P(n)$  того, что произвольный сгусток состоит ровно из  $n$  окружностей, имеет геометрическое распределение

$$P(n) = I(1-I)^{n-1}; \quad n=1,2,\dots, \quad (5)$$

где  $I=I(g)$  (см. (4)), поэтому случайная длина сгустка  $B$  всегда конечна и, как доказано в теореме 5 работы /5/, при выполнении гипотезы  $S$  плотность вероятности  $B$   $f_B(t)$  подчиняется интегральному уравнению

$$f_B(t) = \int_0^t f_B(t-x)(1-F_D(x))f_e(x)dx + I \cdot f_D(t) \quad (6)$$

при условии  $f_e(t)=0$  для  $t \leq D_{\min}$ . (Здесь  $F_D(x)$  - распределение диаметров). Умножая (6) на  $e^{ist}$  ( $i$  - мнимая единица) и интегрируя, получаем выражение для характеристической функции длины сгустка

$$\varphi_B(s) = \int_0^{\infty} e^{ist} f_B(t) dt = \int_0^{\infty} \int_0^t e^{ist} f_B(t-x) dt (1-F_e(x)) f_e(x) dx + \varphi_D(s) \cdot I,$$

где обозначено  $\varphi_D(s) = \int_0^{\infty} e^{ist} f_D(t) dt$ . После замены переменных  $u=t-x$  и простых преобразований получаем более компактное выражение для этой характеристической функции:

$$\varphi_B(s) = I \cdot \varphi_D(s) / \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{isx} (1-F_D(x)) f_e(x) dx \right). \quad (7)$$

С помощью обратного преобразования Фурье (7) получаем плотность  $f_B(x)$  непосредственно, без того, чтобы решать уравнение (6).

Нами доказана

**Теорема 3.** При выполнении гипотезы  $S$  характеристическая функция  $\varphi_B(s)$  случайной длины сгустка  $B$  имеет вид (7). Плотность распределения  $B$  может быть найдена как

$$f_B(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_B(s) e^{-ist} ds \quad (8)$$

Для вычисления начальных моментов  $m_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) воспользуемся снова уравнением (6). Умножая его на  $t^n$  и интегрируя с помощью замены  $u=t-x$ , получим уравнение для  $m_n$ :

$$m_n = \frac{1}{I} \sum_{\ell=0}^n C_n^{\ell} m_{\ell} \int_0^{\infty} x^{n-\ell} f_e(x) [1-F_D(x)] dx + V_n, \quad (9)$$

где через  $V_n$  обозначен начальный момент распределения  $f_D(t)$ :

$$V_n = \int_0^{\infty} t^n f_D(t) dt$$

Отсюда легко получить выражение для первых двух моментов и дисперсии величин  $B$ :

$$m_B = \frac{1}{I} \int_0^{\infty} x f_e(x) [1-F_D(x)] dx + V_1, \quad (10)$$

$$\sigma_B^2 = m_2 - m_B^2. \quad (11)$$

Доказана следующая теорема:

**Теорема 4.** Начальные моменты распределения длин сгустков  $m_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) вычисляются по формуле (9), среднее значение — по (10), а дисперсия  $\sigma_B^2$  — по формуле (11).

Эти результаты можно вывести и непосредственно из выражения (7), используя известное соотношение /9/ между характеристической функцией и начальными моментами:

$$m_n = \left. \frac{\varphi_B(s)}{i^n} \right|_{s=0}, \quad n=1,2,\dots \quad (i - \text{мнимая единица}). \quad (12)$$

### 3. Дискретизация изображения

Следуя модели, принятой в работе /5/, будем представлять процесс сканирования и оцифровки, т.е. дискретизации изображения трека, как наложение на изображение решетки с шагом  $h$ . При этом, если какая-то ячейка решетки оказывается заполненной одной или несколькими окружностями, изображающими стримеры, или же частью такой окружности, то измерительная система произведет отсчет. Отсчет не производится, если ячейка оказывается пустой или заполняется пренебрежимо малой частью какой-то окружности, что можно определить, задавая малой сагитту  $Sh$  (где  $Sh \ll D_{\min}$ ) сегмента окружности, попадающего в эту точку (рис. I).

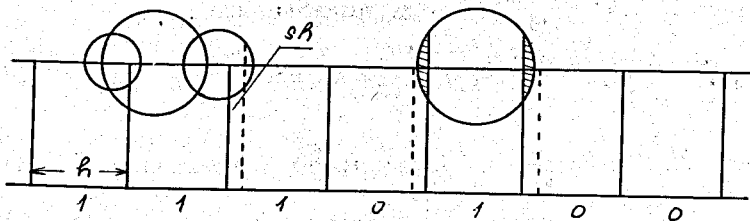


Рис. I

Таким образом, мы получаем последовательность серий единиц и нулей, соответствующих сгусткам и промежуткам между ними. Длины их должны быть кратны величине  $h$  — шагу дискретизации.

Пусть  $\mathcal{D}$  — целочисленная случайная величина — длина серии единиц, порожденная окружностью при дискретизации. Обозначим также через  $\alpha$  расстояние между левыми краями окружностей после дискретизации. Тогда, как показано в /5/, вероятность распределения случайной величины  $\alpha$  может быть найдена как

$$P_d(k) = \begin{cases} \frac{1}{gh} (gh - 1 + e^{-gh}), & k=0; \\ \frac{1}{gh} (e^{gh} - 2 + e^{-gh}) e^{-kgh}, & k \geq 1; \end{cases} \quad (13)$$

и для  $\mathcal{D}$  получаем  $(1-s)h$

$$P_{\mathcal{D}}(k) = P\{\mathcal{D}=k\} = \frac{1}{h} \int_{-sh}^{(1-s)h} [F_D^2(h(k+s)-t) + F_D(h(k-1+s)-t)] dt. \quad (14)$$

При практических применениях этой формулы следует иметь в виду, что диаметры окружностей  $\mathcal{D}$  ограничены ( $D_{\min} \leq \mathcal{D} \leq D_{\max}$ ). Поэтому  $P_{\mathcal{D}}(k) = 0$  при  $k < K_{\min}$  и  $k > K_{\max}$ .

$K_{\min}$  и  $K_{\max}$  определяются из следующих неравенств:

$$\begin{aligned} h(K_{\min} - 1 + 2s) < D_{\min} \leq h(K_{\min} + 2s), \\ h(K_{\max} - 2 + 2s) < D_{\max} \leq h(K_{\max} - 1 + 2s). \end{aligned} \quad (15)$$

Для случайного числа стримеров в сгустке после дискретизации сохраняется геометрический закон распределения

$$P_d(n) = J(1-J)^{n-1}; \quad n=1,2,\dots,$$

где

$$J = \frac{1 - e^{-gh}}{gh} \sum_{k=K_{\min}}^{K_{\max}} e^{-kgh} \cdot P_{\mathcal{D}}(k). \quad (16)$$

Дискретизованная длина сгустка является конечной целочисленной случайной величиной, и аналогично непрерывному случаю можно доказать, что ее распределение  $P_B(k)$  является решением рекуррентных уравнений

$$P_B(k) = \beta \sum_{x=1}^{K_{\max}} \sum_{s=x}^{K_{\max}} P_{\mathcal{D}}(s) P_d(x) P_B(k-x) + J \cdot P_{\mathcal{D}}(k) \quad (17)$$

при условии  $P_B(k) = 0$ ,  $k < K_{\min}$  и  $k > K_{\max}$ ,

$$\beta = (1 - P_d(0))^{-1}.$$

#### 3.1. Характеристическая функция и начальные моменты дискретизованной длины сгустка

Подобно тому, как это делалось при доказательстве теоремы 3, используем рекуррентное уравнение (17) для получения характеристической функции дискретизованной длины сгустка

$$\varphi_{Bd}(t) = \frac{\beta \cdot J \cdot \varphi_{22}(t)}{1 - \beta \sum_{k=1}^{K_{max}} \sum_{s=k}^{K_{max}} e^{i\omega t} P_{22}(s) P_d(k)}, \quad (18)$$

где  $\varphi_{22}(t) = \sum_{k=1}^{K_{max}} e^{i\omega t} P_{22}(k)$ .

Подобным же образом получается выражение для начальных моментов дискретизованной длины сгустка  $m_n$ :

$$m_n = \frac{1}{J} \left[ \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{x=1}^{K_{max}} \sum_{s=x}^{K_{max}} C_n^\ell m_\ell x^{n-\ell} P_{22}(s) P_d(x) + J V_{22}(n) \right], \quad (19)$$

где  $V_{22}(n) = \sum_{k=K_{min}}^{K_{max}} k^n P_{22}(k)$ .

Для среднего значения  $m$  дискретизованного сгустка и дисперсии  $\delta^2$  получаем следующие выражения:

$$m = \frac{1}{J} \sum_{x=1}^{K_{max}} \sum_{s=x}^{K_{max}} x P_{22}(s) P_d(x) + V_{22}(1), \quad (20)$$

$$\delta^2 = m_2 - m^2. \quad (21)$$

Исследование зависимости первого момента от параметра ионизации показывает экспоненциальный вид этой зависимости, что особенно отчетливо видно на рис. 2, где изображен график  $\ln m(q)$ .

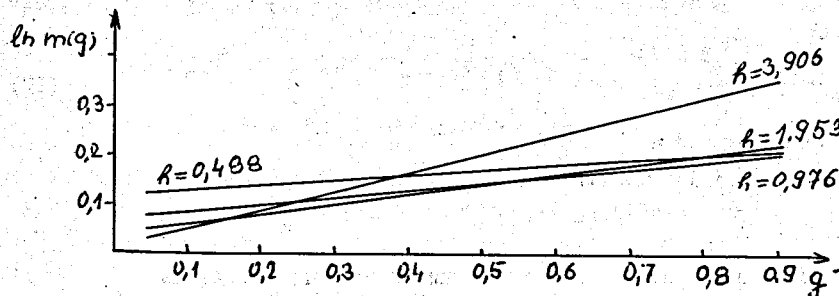


Рис. 2

Предполагая поэтому справедливость зависимости

$$m(q) \sim A e^{Bq}, \quad (22)$$

определим коэффициенты  $A$  и  $B$  из (20):

$$A = m(0) = m_{22},$$

$$B = \frac{m'(0)}{A} = \frac{1}{m_{22}} \sum_{k=1}^{K_{max}} \sum_{s=k}^{K_{max}} k P_{22}(s). \quad (23)$$

Определенным подтверждением качества аппроксимации (22) может служить близость  $m''(0)$ , вычисленной с помощью (20), к выражению  $AB^2$ , вычисленному по (23). Соответствующая проверка (см. табл. 2) эту близость подтвердила.

Более надежным по сравнению с (23) способом определения  $A$  и  $B$  может служить их оценка по всему интервалу значений  $q$  с помощью минимизации функционала

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (\ln m(q_i) - \ln A - B q_i)^2,$$

где  $q_i = i/n$ , а  $m(q_i)$  вычисляются по формулам (20). Это дает

$$B = \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{2i}{n} - 1 \right) \ln m\left(\frac{i}{n}\right),$$

$$A = \exp \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln m\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{B^2}{2} \right) \quad (24)$$

со среднеквадратичной ошибкой  $\delta = 0,01$  при  $n = 20$  (см. табл. 3).

### 3.2. Использование характеристик дискретизованных треков для оценки коэффициента ионизации

С точки зрения применения результатов теории для конструирования оценок коэффициента ионизации  $q$  наиболее простой является зависимость от  $q$  закона распределения длин дискретизованных промежутков. Это распределение, как было показано в [5], не зависит от гипотезы  $S$  и является геометрическим, т.е. вероятность, что промежуток  $L$  между сгустками будет состоять из  $k$  нулей, равна

$$P_L(k) = p(1-p)^{k-1}, \quad \text{где } p = 1 - e^{-qL}. \quad (25)$$

Пусть по данным сканирования трека мы получили  $n$  промежутков  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Тогда единственный максимум функции правдоподобия будет достигаться в точке

$$\hat{q}_{mn} = \frac{1}{n} \ln \frac{\bar{m}}{\bar{m}-1}, \quad (26)$$

где  $\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i$  - среднее арифметическое наблюдаемых длин промежутков.

Являясь оценкой максимального правдоподобия,  $\hat{q}_{mn}$  распределена асимптотически нормально:  $N(q, (e^{qL} - e^{-qL})/nL)$  - и является асимптотически несмещенной и асимптотически эффективной оценкой  $q$ .

Однако  $\hat{g}_{nn}$  имеет существенный недостаток - отсутствие среднего значения, т.е.  $E(\hat{g}_{nn}) = \infty$ , что побуждало искать другие оценки  $g$ . Отметим, что  $\hat{g}_{nn}$  является достаточной статистикой, т.е. содержит всю информацию о параметре ионизации  $g$ , которая может быть получена при измерениях длин промежутков между сгустками. Поэтому для уточнения оценки  $g$  нужно использовать другие статистики, связанные с измерением дискретизованных стримерных треков. Естественно воспользоваться независимостью длин промежутков и сгустков и выбрать в качестве дополнительной статистики какую-либо функцию дискретизованных длин сгустков.

К сожалению, использование метода максимального правдоподобия тут невозможно, так как распределение длин сгустков  $P_B(k)$  является решением сложных рекуррентных уравнений (17) и не зависит явно от  $g$ .

Поэтому в [5] была предложена квантильная оценка  $\hat{g}_a$ , обладавшая слишком большой ошибкой ( $\sigma_a = 15-20\%$ ). Наличие достаточно точной аппроксимирующей формулы (22) для первого момента  $m$  позволяет получить простую моментную оценку  $g$  по  $n$  наблюдаемым длинам дискретизованных сгустков  $b_1, b_2, \dots, b_n$

$$\hat{g}_{mon} = \frac{1}{B} \ln \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{A} \quad (27)$$

где коэффициенты  $A$  и  $B$  вычислены по формулам (24).

Из общей теории функций от моментов [9] следует, что  $\hat{g}_{mon}$  асимптотически нормальна, со средним  $m \hat{g}_{mon} = \frac{1}{B} \ln \frac{m}{A}$  и среднеквадратичной ошибкой  $\sigma_{\hat{g}_{mon}} = \frac{\sigma}{B m \ln m}$ , откуда с учетом (24) получаем и асимптотическую несмещенность  $\hat{g}_{mon}$ .

Как показано ниже, в табл. 4, моментная оценка (27) значительно более эффективна, чем упомянутая квантильная  $\hat{g}_a$ .

Независимость (26) и (27) можно использовать для уточнения оценки  $g$  путем операции взвешивания.

Взвешенная оценка

$$\hat{g} = \left( \frac{\hat{g}_{nn}}{\sigma_{\hat{g}_{nn}}^2} + \frac{\hat{g}_{mon}}{\sigma_{\hat{g}_{mon}}^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{\sigma_{\hat{g}_{nn}}^2} + \frac{1}{\sigma_{\hat{g}_{mon}}^2} \right)^{-1} \quad (28)$$

будет также асимптотически нормальной, со среднеквадратичным отклонением

$$\sigma_{\hat{g}} = \frac{\sigma_{\hat{g}_{nn}} \cdot \sigma_{\hat{g}_{mon}}}{\sqrt{\sigma_{\hat{g}_{nn}}^2 + \sigma_{\hat{g}_{mon}}^2}}$$

меньшим, чем каждая из величин  $\sigma_{\hat{g}_{nn}}$  и  $\sigma_{\hat{g}_{mon}}$ .

#### 4. Численные результаты

Все теоретические результаты были проверены на монте-карловской модели, где в качестве закона распределения случайных диаметров был выбран усеченный нормальный закон

$$f_D(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-c)^2}{2\sigma^2}}, & D_{min} \leq t \leq D_{max}, \\ 0, & t < D_{min} = 0,9; t > D_{max} = 1,4. \end{cases}$$

Как и в [5], было принято  $\sigma = 0,3$ ;  $c = 1,15$ , константа  $S$ , характеризующая точность процесса дискретизации, была взята равной 0,1. Шаг дискретизации  $h$  принимал четыре значения:  $h_1 = 1000 \cdot 2^{-8} = 3,90624$ ;  $h_2 = 1000 \cdot 2^{-9} = 1,95312$ ;  $h_3 = 1000 \cdot 2^{-10} = 0,976562$ ;  $h_4 = 1000 \cdot 2^{-11} = 0,48828$  (размеры даны в миллиметрах). Параметр  $g$  варьировался от 0,05 до 1 с шагом 0,05.

Таблица 2

$h$	$A(m_{22})$	$B$	$AB^2$	$m''(0)$
3,90624	1,093591	4,246231	19,717966	15,773687
1,95312	1,388465	2,500610	8,682144	6,116695
0,97656	1,976644	1,484124	4,353804	4,353763
0,48828	3,155243	1,033288	3,368802	3,590252

Коэффициенты экспоненциальной зависимости  $m(g) = A e^{gB}$  показаны в таблице 3, мера экспоненциальной связи дана выражением

$$\sigma_{эксн} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m(g_i) - A e^{g_i B})^2}$$

Таблица 3

$h$	$A$	$B$	$\sigma_{эксн}$
3,90624	1,139062	3,817404	0,3421
1,95312	1,168774	2,070179	0,0859
0,97656	1,966965	1,503023	0,0095
0,48828	3,127189	1,079868	0,0229

Для сравнения оценок (27) и квантильной оценки  $\hat{g}_a$  для оптимального с точки зрения зависимости от  $g$  80%-ного квантиля при разных ша-

гах дискретизации  $h$  были вычислены отношения среднеквадратичных значений этих оценок  $\sigma_a / \sigma_{g_{ном}}$ , сведенные в таблицу 4.

Таблица 4

$g$ \ $h$	0,48828	0,97656	1,95313	3,90624
0,2	15,4	8,2	9,0	23,7
0,4	8,7	11,5	14,0	39,0
0,6	12,5	14,6	22,2	95,0
0,8	17,4	20,6	32,3	-
1,0	21,3	28,5	47,8	-

### 5. Выводы

Подробное изучение общего случая с произвольным распределением диаметров привело нас к статистическим выводам, которые после настройки таких параметров, как шаг и уровень дискретизации, и учета направления движения трека должны позволить проведение статистической обработки реальных стримерных треков для извлечения сведений о их первичной ионизации.

Эти статистические выводы остаются справедливыми и для частного случая треков с пузырьковых камер, в которых диаметры пузырьков постоянны. В этом частном случае гипотеза  $S$  всегда справедлива, оценочные формулы (26) и (27) остаются справедливыми. Эти результаты практически совпадают с уже известными исследованиями для пузырьковых камер<sup>/2/</sup> и даже дополняют их.

Однако следует иметь в виду, что математическая модель, служившая основой для статистических выводов, не могла учитывать ряд факторов, приводящих к почти полному слиянию стримеров в сплошные треки даже не для очень больших  $g$ , когда этот эффект очевиден. К этим факторам относятся:

- параллакс на краях поля объектива, вызывающий слияние изображений реальных стримеров, вытянутых вдоль электрического поля;
- уже упомянутый геометрический фактор (относящийся и к пузырьковым трекам), приводящий к слиянию треков, идущих под углом к оптической оси, в сплошные. Поскольку после дискретизации сплошные треки уже невозможно "разредить", единственным выходом в такой ситуации является измерение относительной ионизации треков, т.е. оценка отношения  $R = g / g_{пучк.}$ , где  $g_{пучк.}$  - коэффициент ионизации пучкового

трека, принятого за эталонный. Это отношение, оценивая общий эффект "прозрачности" или "почернения" трека, обратно пропорционально кинетической энергии частицы, и поэтому его можно использовать для различения гипотез о типе частиц (не вычисляя при этом самого коэффициента ионизации).

Постановка и решение такой задачи были даны в<sup>/3/</sup> для случая сканирования целью треков с пузырьковых камер. Было показано, что для узкой щели (ширина щели меньше диаметра пузырька) световой поток  $R_H$ , пропускаемый ею, связан с относительной ионизацией  $R$  соотношением

$$R_H = R_{H_{max}} \left( 1 - \left( 1 - \frac{R_{H_{min}}}{R_{H_{max}}} \right)^R \right), \quad (29)$$

где  $R_{H_{min}}$  и  $R_{H_{max}}$  - световые потоки от пучкового и сплошного (без пропусков) трека соответственно.

После коррекции  $R_H$  для учета геометрического фактора соотношение (29) позволяет разделить гипотезы о принадлежности трека к тому или иному классу частиц с помощью так называемого  $\tau$ -критерия<sup>/4/</sup>.

Для использования этого подхода в общем случае необходимо разбить сравниваемые треки на слайсы - небольшие отрезки равной длины, для каждого трека подсчитать среднее локальное почернение, т.е. усреднить по всем слайсам суммарную площадь всех сгустков.

К сожалению, не все приборы способны квантовать сигнал от трека на большее, чем два, число уровней. Но даже оставаясь в рамках уже принятой дискретизации, не удается получить соотношения, подобного (29), из-за трансцендентности уравнения, основанного на подсчете длин дискретизованных сгустков по слайсам.

К еще большим аналитическим трудностям приводит учет площадей сгустков.

Возможным выходом является численный расчет по таблицам, составленным с использованием метода Монте-Карло, что и планируется авторами.

В заключение укажем, что в последнее время удалось получить надежные результаты по выводу точных формул для распределений длин сгустков без использования гипотезы  $S$ .

### Л и т е р а т у р а

1. Кадников Г.М. и др. ОИЯИ Д10-7010, Дубна, 1973.
2. Glükstern R.L. Nucl. Instr. Meth., 45, p. 166, 1966.
3. Иселиани Ц.И., Ососков Г.А. ОИЯИ, 10-8144, Дубна, 1974.



4. Razman A., JINR, E5-3775, Dubna, 1968.
5. Кулюкина Л.А. и др. ОИЯИ, P5-III43, Дубна, 1977.
6. Хинчин А.Я. Математические методы теории массового обслуживания. Труды МИ им. Стеклова. АН СССР, том 9, 1955.
7. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. "Наука", М., 1972.
8. Гласнек К.П., Кадиков Г.М. ОИЯИ, IO-IO923, Дубна, 1977.
9. Крамер Г. Математические методы статистики. ИЛ, М., 1948.

Рукопись поступила в издательский отдел  
29 мая 1981 года.