объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

5-81-318

В.Х.Христов

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ-ЛАГРАНЖА

Направлено в Болгарский математический журнал "Сердика"

1981

Для вещественной конечной и 2π-периодической функции f рассмотрим ее интерполяционный тригонометрический полином Фурье-Лагранжа /см.[1] стр. 10/

$$I_n(f;x) = a_0^{(n)}/2 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{(n)}(f)\cos\nu x + b_\nu^{(n)}(f)\sin\nu x, \qquad /1/$$

совпадающий с ней в точках

$$x_j^{(n)} = 2\pi j/(2n+1), \quad j=0,1,\ldots,2n \qquad /2/$$

/а следовательно, также и в точках, конгруентных точкам $x_j^{(n)}$ по $\mathrm{mod}\,2\pi$ /. Обозначим через $I_{n,\nu}(f;x)$ частичную сумму порядка ν полинома /1/ и припомним, что его коэффициенты выражаются через значения функции f в узлах /2/ формулами

$$a_\nu^{(n)}(f) = \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f(x_j^{(n)})\cos\nu x_j^{(n)},$$

$$(\nu=0,1,\ldots,n). \qquad /3/$$

$$b_\nu^{(n)}(f) = \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f(x_j^{(n)})\sin\nu x_j^{(n)}$$

В практическом гармоническом анализе полиномы $I_n(f;x)$ и $I_{n,\nu}(f;x)$ являются удобным и обычным аппаратом приближения функции f, так как часто значения f можно найти лишь на конечной системе точек периода. Одним из основных вопросов в этом направлении является вопрос об аппроксимативных свойствах полиномов $I_{n,\nu}(f)$ и о вкладе, который дает ν-тый член суммы /1/ при аппроксимации f. При этом ясно, что поведение $I_{n,\nu}(f)$, $a_\nu^{(n)}(f)$ и $b_\nu^{(n)}(f)$ существенно зависит от структурных свойств функции f и от величины ν и n.

В работе[2] нами исследовались величины $(1<p<\infty)$

$$\| f - I_{n,\nu}(f)\|_{L^p(\ell^p_{2n+1})}, \qquad /4/$$

где, как обычно, $(1\le p<\infty)$

$$\| g\|_{L^p} = \Big\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^p\,dt\Big\}^{1/p},$$

$$\| g\|_{\ell^p_{2n+1}} = \Big\{\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} |g(\xi_j)|^p\Big\}^{1/p} \qquad /5/$$

/в наших рассмотрениях всегда точки ξ_j, $j=0,1,\ldots,2n$ будут равноотстоящими на периоде, т.е. $\xi_j-\xi_{j-1}=2\pi/(2n+1)$, $j=1,2,\ldots,2n$ и это в дальнейшем не будем специально оговаривать/. Оказалось, что поведение величин /4/ можно характеризовать интегральным модулем непрерывности функции f

$$\omega_k(f;\delta)_{L^p}=\sup\{\|\Delta_h^k f(x)\|_{L^p}:|h|\le\delta\}$$

и модулем

$$\tau_k(f;\delta)_{L^p}=\|\omega_k(f;x,\delta)\|_{L^p}, \qquad /6/$$

где

$$\omega_k(f;x,\delta)=\sup\{|\Delta_h^k f(t)|:\ t,t+kh\in[x-k\delta/2,\ x+k\delta/2]\},$$

$$\Delta_h^k f(t)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f(t+jh),$$

k - натуральное и $0<\delta$ - действительное /об истории модуля $\tau_k(f;\delta)_{L^p}$ и его применениях см.[3-5] /.

В настоящей работе получим оценки для коэффициентов Фурье-Лагранжа /3/ функции f через модули $\omega_k(f;\delta)_{L^p}$ и $\tau_k(f;\delta)_{L^p}$, а также через некоторые другие характеристики функции f. О коэффициентах $a_\nu^{(n)}(f)$ и $b_\nu^{(n)}(f)$ известно, что они стремятся к нулю для всякой интегрируемой в классическом смысле Римана функции f, когда $n\ge\nu\to\infty$ /см.[1], стр. 25/, и что если функция f имеет ограниченную p-вариацию, т.е.

$$V_p(f)=\sup\{(\sum_{j=0}^{\ell-1}|f(t_{j+1})-f(t_j)|^p)^{1/p}:\ 0=t_0<t_1<\ldots<t_\ell=2\pi\}<\infty, \qquad /7/$$

то /см[1],стр. 27,[6]/

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|,|b_\nu^{(n)}(f)|)\le C_pV_p(f)\nu^{-1/p},$$

а если f имеет ограниченное k-изменение, т.е.

$$V^{(k)}(f)=\sup\{\sum_{j=0}^{\ell-1}|\Delta_{h_j}^k f(t_j)|:\ 0=t_0<t_1<\ldots<t_\ell=2\pi\}<\infty \qquad /8/$$

/здесь $h_j=(t_{j+1}-t_j)/k$ /, то [6]

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|,|b_\nu^{(n)}(f)|)\le C_k(M(f)+V^{(k)}(f))\nu^{-1},$$

где C_p и C_k- положительные постоянные, зависящие соответственно от p и k, $M(f)=\sup\{|f(t)|:\ t\in[0,2\pi]\}$.

Все эти результаты получаются как следствие из следующего утверждения, которое является основным в настоящей статье и доказывается в §2.

Теорема. Для любой ограниченной и интегрируемой по Риману 2π-периодической функции f и для любых натуральных k,ν и n, $\nu\le n$ имеет место оценка

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|,|b_\nu^{(n)}(f)|)\le C_k(\tau_k(f;h)_L+(\nu h)^{-k}\omega_k(f;h)_L), \qquad /9/$$

где $0<C_k$ - константа, зависящая лишь от k, а $2\pi/(2n+1)\le h$ - любое.

В §1 припомним свойства модуля $\tau_k(f;\delta)_{L^p}$ и получим некоторые его связи с другими характеристиками функции f. Из этих утверждений и из теоремы в §3 получим, как следствия, оценки коэффициентов /3/ для некоторых классов функций.

Для облегчения формулировок утверждений отметим, что всюду в дальнейшем рассматриваются только функции, интегрируемые в классическом смысле Римана и с периодом 2π. Следовательно, они всегда будут конечны и ограничены. Кроме того, всегда ν,k и $n\ (\nu\le n)$ - произвольные натуральные числа, $0<\delta$ и $p\in[1,\infty)$- любые действительные числа. Наконец, константы /всюду положительные/, быть может, и разные, всегда обозначают через C, C_k и $C_{k,p}$, указывая индексами, лишь от каких параметров они зависят.

§1. СВОЙСТВО МОДУЛЯ $\tau_k(f;\delta)_{L^p}$

Лемма 1 /см.[3,7]/. Имеют место неравенства

1/ $\omega_k(f;\delta)_{L^p}\le\tau_k(f;\delta)_{L^p}\le\tau_k(f;\delta)_{L^q}$
$\le\tau_k(f;\delta)_{L^\infty}=\omega_k(f;\delta)_C\qquad(p\le q)$,

2/ $\tau_k(f;\lambda\delta)_{L^p}\le(1+C\lambda)^{Ck}\tau_k(f;\delta)_{L^p}$ /$0<\lambda$ - действительное/,

3/ $\tau_{k+1}(f;\delta)_{L^p}\le\delta\tau_k(f';\delta)_{L^p}$,

4/ $\tau_2(f;\delta)_{L^p}\le C\delta\omega_1(f';\delta)_{L^p}$,

5/ $\tau_1(f;\delta)_{L^p}\le\delta\|f'\|_{L^p}$.

Лемма 2 /см.[8] /. Справедливы утверждения

1/ $\lim_{\delta\to+0}\tau_1(f;\delta)_L=0$ тогда и только тогда, когда функция f интегрируема по Риману.

2/ $\tau_1(f;\delta)_L=O(\delta)$ тогда и только тогда, когда функция f имеет ограниченную 1-вариацию, т.е. имеет конечное полное изменение на периоде.

Пусть $\omega_k^*(f;x,\delta)=\sup\{|\Delta_h^k f(x)|:|h|\le\delta\}$

и $\tau_k^*(f;\delta)_{L^p}=\|\omega_k^*(f;x,\delta)\|_{L^p}$. /ср. с /6//

Покажем, что справедлива следующая

Лемма 3. Имеют место неравенства

$$r^*_k(f;\delta)_{L^p} \le r_k(f;\delta)_{L^p} \le 2r^*_k(f;k\delta)_{L^p}. \qquad /10/$$

Доказательство. Левое неравенство очевидно. Для доказательства правого заметим, что

$$\omega_k(f;x,\delta) = \sup\{|\Delta^k_h f(t)| : t, t+kh \in [x-k\delta/2, x+k\delta/2]\}$$

$$\le \sup\{|(\Delta^1_{h+h_1} - \Delta^1_{h_1})\Delta^{k-1}_h f(x)| : h, h_1, |h| \le \delta,\ |h_1| \le k\delta,\ |h+h_1| \le k\delta\}$$

$$= \sup\{2|\Delta^k_h f(x)| : |h| \le k\delta\} = 2\omega^*_k(f;x,k\delta),$$

где $h_1 = t-x$. Таким образом, получили, что

$$\omega_k(f;x,\delta) \le 2\,\omega^*_k(f;x,k\delta).$$

Беря L^p - норму обеих сторон последнего неравенства, получаем и правое неравенство в /10/.

Пусть $\Pi_{n,\alpha}$ - произвольное разбиение отрезка $[\alpha, \alpha+2\pi]$ $2n$ точками t_j, $j=0,1,\ldots,2n-1$, удовлетворяющими условию

$$\alpha \le t_0 < t_1 \le t_2 < t_3 \le \ldots \le t_{2n-2} < t_{2n-1} \le \alpha+2\pi.$$

Для того, чтобы характеризовать функцию f, для которой p - вариация или k -изменение неограничены /см. /7/ и /8//, по аналогии с их определениями вводим следующую характеристику функции f:

$$\kappa_{k,p}(f;n) = \sup_{\alpha} \sup\{(\sum_{j=0}^{n-1} |\Delta^k_{h_j} f(t_{2j})|^p)^{1/p} : \Pi_{n,\alpha}\}, \qquad /11/$$

где $h_j = (t_{2j+1} - t_{2j})/k$, $j=0,1,\ldots,n-1$. Частные случаи характеристики $\kappa_{k,p}(f;n)$ рассматривались и ранее разными авторами и применялись в различных вопросах теории аппроксимаций. Точнее, при $k=1$, $p=1$ /11/ ввели и использовали Попов [9] и Чантурия [10], при $k \ge 1$, $p=1$ - автор совместно с Петрушевым [11] и при $k=1$, $p \ge 1$ - Мушелак [12].

Очевидно, что $\kappa_{k,p}(f;n)$ - неубывающая функция целочисленного параметра n и /см. /7/ и /8//

$$\kappa_{1,p}(f;n) \le V_p(f), \quad \kappa_{k,1}(f;n) \le V^{(k)}(f). \qquad /12/$$

Следующая лемма связывает $r_k(f;2\pi/n)_{L^p}$ и $\kappa_{k,p}(f;n)$.

Лемма 4. Имеет место неравенство /случай $k=1$, $p=1$ известен, см. [4] /

$$r_k(f;2\pi/n)_{L^p} \le (1+k)^{1/p} n^{-1/p} \kappa_{k,p}(f;n). \qquad /13/$$

Доказательство. Пусть ϵ - произвольное положительное и $\rho_n = 2\pi/n$. Используя неравенство Минковского, получаем

$$r_k(f;\rho_n)_{L^p} = \{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega_k(f;x,\rho_n)^p dx\}^{1/p} = \{\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{j\rho_n}^{(j+1)\rho_n} \omega_k(f;x,\rho_n)^p dx\}^{1/p}$$

$$\le \{\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}(\omega_k(f;\xi_j,\rho_n)+\epsilon)^p \rho_n\}^{1/p} \le n^{-1/p}\{\sum_{j=0}^{n-1}\omega_k(f;\xi_j,\rho_n)^p\}^{1/p} + \epsilon$$

$$\le n^{-1/p}\{\sum_{j=0}^{n-1}(|\Delta^k_{h'_j} f(\xi'_j)| + \epsilon)^p\}^{1/p} + \epsilon \le n^{-1/p}\{\sum_{j=0}^{n-1}|\Delta^k_{h'_j} f(\xi'_j)|^p\}^{1/p} + 2\epsilon,$$

где $\xi_j \in [j\rho_n, (j+1)\rho_n]$, $\xi'_j, \xi'_j + kh'_j \in [\xi_j - k\rho_n/2, \xi_j + k\rho_n/2]$

$\in [(j-k/2)\rho_n, (j+1+k/2)\rho_n]$ и h'_j всегда можно считать неравным нулю ($j=0,1,\ldots,n-1$). Отметим, что пары точек $\xi'_j, \xi'_j + kh'_j$ лежат на отрезках длины $(k+1)\rho_n$, и так как всегда $|\Delta^k_h f(t)| = |\Delta^k_{-h} f(t+kh)|$, то, если нужно, переобозначая точки пары, можно считать h'_j положительным. Тогда имеем

$$\{\sum_{j=0}^{n-1}|\Delta^k_{h'_j} f(\xi'_j)|^p\}^{1/p} = \{\sum_{\ell=0}^{k}\sum_j |\Delta^k_{h'_{(k+1)j+\ell}} f(\xi'_{(k+1)j+\ell})|^p\}^{1/p}$$

$$\le \{(k+1)\max_{0\le\ell\le k}\sum_j |\Delta^k_{h'_{(k+1)j+\ell}} f(\xi'_{(k+1)j+\ell})|^p\}^{1/p} \le (k+1)^{1/p}\kappa_{k,p}(f;n),$$

так как в каждой внутренней сумме точки, по которым берется k -тая конечная разность с возрастанием j, идут слева направо на числовой оси, и число слагаемых в каждой такой сумме не превышает $[n/(k+1)]+1 \le n$. Итак, получили, что

$$r_k(f;2\pi/n)_{L^p} \le (k+1)^{1/p} n^{-1/p} \kappa_{k,p}(f;n) + 2\epsilon.$$

Из этого неравенства, ввиду произвольности $\epsilon > 0$, следует утверждение леммы.

Замечание 1. Для разбиения $\Pi_{n,\alpha}$ из определения $\kappa_{k,p}(f;n)$ /см. /11// обозначим

$$|\Pi_{n,\alpha}| = \max\{t_{2j+1} - t_{2j} : j = 0,1,\ldots,n-1\}.$$

Тогда, проследив доказательство последней леммы, видим, что всегда для $\kappa_{k,p}(f;n)$ из оценки /13/ $|\Pi_{n,\alpha}| \le 2\pi(k+1)/n$, т.е. $|\Pi_{n,\alpha}| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно[13], если

$$V_p^*(f) = \lim_{\delta\to+0} \sup_n \sup\{(\sum_{j=0}^{n-1} |\Delta^1_{h_j} f(t_{2j})|^p)^{1/p}: \Pi_{n,\alpha}, |\Pi_{n,\alpha}| \le \delta\},$$

то для $\kappa_{k,p}(f;n)$ из оценки /13/ имеем, что

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_{k,p}(f;n) = V_p^*(f).$$

Из оценки /13/, учитывая замечание 1, /12/ и /3/ из леммы 1, получаем:

Лемма 5. Справедливо

1/ если $V_p^*(f) < \infty$, то $\tau_1(f;2\pi/n)_{L^p} \le 2V_p^*(f)n^{-1/p}$,

2/ если $V_p(f) < \infty$, то $\tau_1(f;2\pi/n)_{L^p} \le 2V_p(f)n^{-1/p}$,

3/ если $V^{(k)}(f) < \infty$, то $\tau_k(f;2\pi/n)_L \le (k+1)V^{(k)}(f)n^{-1}$,

4/ если $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и $V_p(f^{(k)}) < \infty$, то

$\tau_{k+1}(f;2\pi/n)_{L^p} \le C_k V_p(f^{(k)})n^{-k-1/p}$.

Следующая лемма показывает некоторые взаимосвязи между характеристиками $\kappa_{k,p}(f;n)$ при различных k и p. Справедливость ее утверждений вытекает из определения /11/ и из известных соотношений между p-нормами и k-разностями при различных p и k.

Лемма 6. Справедливо

1/ $\kappa_{k,p}(f;n) \le \kappa_{k,q}(f;n)$, где $1 \le p \le q < \infty$,

2/ $\kappa_{k,p}(f;n) \le C_{k,r}\kappa_{r,p}(f;n)$, где $1 \le r \le k$.

Пусть $Lip(\alpha,p)$ - множество функций, для которых $\omega_1(f;\delta)_{L^p} = O(\delta^{\alpha})$, $0<\alpha\le 1$, $1 \le p \le \infty$. Имеет место следующая

Лемма 7. Пусть $\tau_1(f;\delta)_{L^p} = O(\delta^{\alpha})$, $0<\alpha<1$. Тогда

1/ если $\alpha p \le 1$, то $f \in Lip(\alpha-1/p+1/q, q)$ при всех $q \in (p, p/(1-\alpha p))$

2/ если $\alpha p > 1$, то f непрерывна и $f \in Lip(\alpha-1/p+1/q, q)$ при всех $q \in (p, \infty]$.

Включения последней леммы следуют из 1/ леммы 1 и из соответствующего результата Харди и Литтлвуда /см., например,[14]/ для функций из $Lip(\alpha,p)$. Непрерывность функции f при $\alpha p > 1$ вытекает из следующего утверждения:

Лемма 8. Пусть $\sigma_k = f(x_k+0)-f(x_k-0)$, где x_k - точки разрыва функции f на периоде /функция, интегрируемая по Риману, не имеет разрывов II рода и может иметь лишь счетное число разрывов 1 рода/. Тогда

$$\{\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma_k|^p\}^{1/p} \le \sup_n \{n^{1/p}\tau_1(f;2\pi/n)_{L^p}\}. \qquad /14/$$

Доказательство. Пусть $\rho_n = 2\pi/n$, $\Delta_j = [j\rho_n, (j+1)\rho_n]$,

$M_j = \sup\{f(t):\ t\in\Delta_j\}$, $m_j = \inf\{f(t):\ t\in\Delta_j\}$, $j = 0,1,\dots,n-1$.

Тогда

$$\{\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma_k|^p\}^{1/p} \le \sup_n \{\sum_{j=0}^{n-1}(M_j-m_j)^p\}^{1/p} \le \sup_n \{\rho_n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{\Delta_j} \omega_1(f;x,\rho_n)^p\,dx\}^{1/p}$$

$$= \sup_n \{n^{1/p}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega_1(f;x,\rho_n)^p\,dx)^{1/p}\} = \sup_n\{n^{1/p}\tau_1(f;2\pi/n)_{L^p}\}.$$

Лемма доказана.

Если $\tau_1(f;\delta)_{L^p} = o(\delta^{1/p})$, то из /14/ получаем, что $\sum_{k=1}^{\infty}|\sigma_k|^p = 0$ и, следовательно, f непрерывна.

Модуль $\tau_k(f;\delta)_{L^p}$ можно связать и с характеристикой, подобной модулю гладкости дробного порядка $\omega_{k-1/p}(f;\delta)$, введенной Юнгом и Терехиным /см.[13] /. Обозначим

$$\omega_{k-1/p}(f;\delta)_n = \sup\{\kappa_{k,p}(f;n): \Pi_{n,\alpha}, |\Pi_{n,\alpha}| \le \delta\}. \qquad /15/$$

Величину $\omega_{k-1/p}(f;\delta)_n$ будем называть модулем непрерывности порядка $k-1/p$ функции f. Между модулем гладкости $\omega_{k-1/p}(f;\delta)$ из[13] и модулем $\omega_{k-1/p}(f;\delta)_n$ очевидна следующая связь:

$$\omega_{k-1/p}(f;\delta)_n \le \omega_{k-1/p}(f;\delta)$$

и

$$\omega_{k-1/p}(f;\delta) = \sup_n \omega_{k-1/p}(f;\delta)_n.$$

Из леммы 4 и сделанного после ее доказательства замечания следует

Лемма 9. Справедливо неравенство

$$\tau_k(f;2\pi/n)_{L^p} \le (k+1)^{1/p}n^{-1/p}\omega_{k-1/p}(f;2\pi(k+1)/n)_n.$$

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Сформулируем и докажем сначала несколько лемм.

Лемма 10. Имеет место неравенство

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|) \le \|f\|_{\ell^1_{2n+1}}. \qquad /16/$$

где точки ξ_j, $j=0,1,\ldots,2n$ в последней норме /см. /5// совпадают с узлами интерполяции /2/ функции f.

Доказательство. Учитывая ограниченность функций $\sin t$ и $\cos t$, получаем

$$|a_\nu^{(n)}(f)| = \left|\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f(x_j^{(n)})\cos\nu x_j^{(n)}\right|$$

$$\le \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} |f(x_j^{(n)})| = \|f\|_{\ell^1_{2n+1}}.$$

Оценка для коэффициентов $b_\nu^{(n)}(f)$ получается аналогично.

Пусть m и r - натуральные числа и $\rho_m = 2\pi/m$. Через $S_{r,m}$ обозначим множество 2π-периодических сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами $t_j^{(m)} = j\rho_m + \alpha_r\rho_m$, $j=0,1,\ldots,m$, $\alpha_r = (1+(-1)^r)/4$, т.е. 2π - периодическая функция $\phi \in S_{r,m}$, если $r-1$ - производная функции ϕ непрерывна и на каждом промежутке $[t_{j-1}^{(m)}, t_j^{(m)}]$, $(j=1,2,\ldots,m)$ функция ϕ совпадает с алгебраическим многочленом степени не выше r /см. /15/, стр. 281/. Обозначим через W_p^k множество 2π-периодических функций f, для которых $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и $f^{(k)} \in L^p$.

Лемма 11. Для любой функции f из W_p^k выполнено неравенство

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|) \le C_k(n^{-k}\|f^{(k)}\|_L + \|f\|_L). \qquad /17/$$

Доказательство. Как известно /см. /16/ /, для функций $f \in W_1^k$ существует сплайн $\phi(f;x) \in S_{k,2n+1}$, который интерполирует f в узлах /2/, т.е.

$$\phi(f; x_j^{(n)}) = f(x_j^{(n)}), \quad j=0,1,\ldots,2n+1 \qquad /18/$$

и такой, что

$$\|\phi(f) - f\|_L \le C_k\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^k \|f^{(k)}\|_L \le C_k n^{-k}\|f^{(k)}\|_L. \qquad /19/$$

Тогда, ввиду /16/ и /18/, получаем

$$|a_\nu^{(n)}(f)| \le \|f\|_{\ell^1_{2n+1}} = \|\phi(f)\|_{\ell^1_{2n+1}}. \qquad /20/$$

Но, как показали в /2/, для любого сплайна $\phi \in S_{k,2n+1}$ справедливо следующее соотношение между его дискретной ℓ^1_{2n+1} и интегральной L нормой

$$\|\phi\|_{\ell^1_{2n+1}} \le 8\pi k^2 \|\phi\|_L.$$

В силу этого, из /20/ и /19/ получаем

$$|a_\nu^{(n)}(f)| \le C_k\|\phi(f)\|_L \le C_k(\|\phi(f) - f\|_L + \|f\|_L)$$

$$\le C_k(n^{-k}\|f^{(k)}\|_L + \|f\|_L),$$

чем и доказана оценка /17/ для $a_\nu^{(n)}(f)$. Оценка /17/ для коэффициентов $b_\nu^{(n)}(f)$ получается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 12. Для любой функции $f \in W_1^k$ справедлива оценка

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|) \le C_k \nu^{-k}\|f^{(k)}\|_L. \qquad /21/$$

Доказательство. Рассмотрим суммы Валле-Пуссена /см. /17/, стр. 211/

$$\sigma_{\nu-1}(f;x) = (S_{[(\nu-1)/2]}(f;x) + S_{[(\nu-1)/2]+1}(f;x) + \ldots + S_{\nu-1}(f;x))/[\nu/2],$$

где $[x]$, как обычно, обозначает целую часть числа x, а $S_j(f;x)$ j-тая частичная сумма ряда Фурье функции f. Хорошо известно, что $(1 \le p \le \infty)$

$$\|f - \sigma_{\nu-1}(f)\|_{L^p} \le 4E_{[(\nu-1)/2]}(f)_{L^p}, \qquad /22/$$

где $E_m(f)_{L^p} = \inf\{\|f - T\|_{L^p} ; T \in H_m^T\}$ - наилучшее приближение функции f в норме L^p тригонометрическими полиномами порядка не выше m.

Известно, что для $f \in W_p^k$

$$E_m(f)_{L^p} \le C_k m^{-k}\|f^{(k)}\|_{L^p}.$$

Следовательно, из /22/ при $p=1$ для $f \in W_1^k$ получаем

$$\|f - \sigma_{\nu-1}(f)\|_L \le C_k[(\nu-1)/2]^{-k}\|f^{(k)}\|_L \le C_k\nu^{-k}\|f^{(k)}\|_L.$$

Из того, что $S_j^{(k)}(f;x) \equiv S_j(f^{(k)};x)$, вытекает, что

$$\sigma_{\nu-1}^{(k)}(f;x) \equiv \sigma_{\nu-1}(f^{(k)};x),$$

и, следовательно,

$$\|(f - \sigma_{\nu-1}(f))^{(k)}\|_L = \|f^{(k)} - \sigma_{\nu-1}(f^{(k)})\|_L \le 4E_{[(\nu-1)/2]}(f^{(k)})_L \le C\|f^{(k)}\|_L.$$

Тогда, учитывая, что для любого тригонометрического полинома $T(x)$ порядка не выше $\nu-1$

$$a_\nu^{(n)}(T) = b_\nu^{(n)}(T) = 0$$

и, в частности

$$a_\nu^{(n)}(\sigma_{\nu-1}) = b_\nu^{(n)}(\sigma_{\nu-1}) = 0,$$

то из /17/ для $f \in W_1^k$ получаем

$$|a_\nu^{(n)}(f)| = |a_\nu^{(n)}(f - \sigma_{\nu-1}(f))| \le C_k(n^{-k}\|(f - \sigma_{\nu-1}(f))^{(k)}\|_L + \|f - \sigma_{\nu-1}(f)\|_L)$$

$$\le C_k(n^{-k}\|f^{(k)}\|_L + \nu^{-k}\|f^{(k)}\|_L)$$

$$\leq C_k \nu^{-k} \| f^{(k)} \|_L .$$

Оценка /22/ для коэффициентов $b_\nu^{(n)}(f)$ получается аналогично. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Будем следовать схеме доказательства теоремы 1 из [5]. Для любого $h>0$ функции f ставим в соответствие ее модифицированную функцию Стеклова $f_{k,h}$ /см.[3,5] /. Известно, что $f_{k,h} \in W_1^k$ и

$$|f_{k,h}(x) - f(x)| \leq \omega_k(f; x, 2h),$$

$$\| f_{k,h}^{(k)} \|_L \leq C_k h^{-k} \omega_k(f; h)_L .$$

Тогда из /16/ и /21/ получаем

$$|a_\nu^{(n)}(f)| \leq |a_\nu^{(n)}(f - f_{k,h})| + |a_\nu^{(n)}(f_{k,h})| \leq \| f - f_{k,h} \|_{\ell^1_{2n+1}} + C_k \nu^{-k} \| f_{k,h}^{(k)} \|_L$$

$$\leq C_k (\tau_k(f; h)_L + (\nu h)^{-k} \omega_k(f; h)_L),$$

где в последнем неравенстве воспользовались доказанным в [5] неравенством

$$\| \omega_k(f; x, 2h) \|_{\ell^1_{2n+1}} \leq C_k \tau_k(f; h)_L \quad (h \geq 2\pi/(2n+1)).$$

Оценка /9/ для $b_\nu^{(n)}(f)$ получается аналогично. Теорема доказана.

§3. ОЦЕНКИ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ-ЛАГРАНЖА

Из теоремы и свойства модуля $\tau_k(f;\delta)_{L^p}$ легко получаются следующие утверждения.

Следствие 1. Имеет место оценка $(1 \leq p \leq \infty)$

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|) \leq C_k \tau_k(f; 1/\nu)_{L^p} . \qquad /23/$$

При $k=1$, $p=1$ из последней оценки, с учетом 1/ леммы 2, получается, что для любой интегрируемой по Риману функции f /см.[1], стр. 25/

$$a_\nu^{(n)}(f) \to 0, \quad b_\nu^{(n)}(f) \to 0 \qquad \text{при} \quad n \geq \nu \to \infty .$$

Из оценки /23/ и 3/ и 4/ леммы 1 получаем

Следствие 2. Если $f \in W_p^k$, то $(1 \leq p \leq \infty)$

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|) \leq C_k \nu^{-k} \omega_1(f^{(k)}; 1/\nu)_{L^p} .$$

Оценки /13/ и /23/ дают

Следствие 3. Справедливо неравенство

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|) \leq C_k \nu^{-1/p} \varkappa_{k,p}(f; \nu). \qquad /24/$$

В частности, из /12/, леммы 5 и последнего неравенства /24/ получаем

Следствие 4 /см.[6] /. Если

1/ $V_p^*(f) < \infty$, то $\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|) \leq C V_p^*(f) \nu^{-1/p}$,

2/ $V_p(f) < \infty$, то $\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|) \leq C V_p(f) \nu^{-1/p}$,

3/ $V^{(k)} < \infty$, то $\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|) \leq C_k V^{(k)}(f) \nu^{-1}$,

4/ $f \in W_p^k$ и $V_p(f^{(k)}) < \infty$, то

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|) \leq C_k V_p(f^{(k)}) \nu^{-k-1/p} .$$

Лемма 9 и оценка /23/ позволяют получить оценки для коэффициентов Фурье-Лагранжа /3/ и через модули непрерывности и модули гладкости дробного порядка заданной функции f. Имеет место

Следствие 5. Справедливы неравенства

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|) \leq C_k \nu^{-1/p} \omega_{k-1/p}\left(f; \frac{2\pi(k+1)}{\nu}\right)_\nu ,$$

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|) \leq C_k \nu^{-1/p} \omega_{k-1/p}\left(f; \frac{2\pi(k+1)}{\nu}\right).$$

Замечание 2. Для обычных коэффициентов Фурье $a_n(f)$ и $b_n(f)$ хорошо известно, что

$$\max(|a_n(f)|, |b_n(f)|) \leq C_k \omega_k(f; 1/n)_{L^p} .$$

Для коэффициентов Фурье-Лагранжа /3/ оценки только через $\omega_k(f;\delta)_{L^p}$ получить нельзя, так как они определяются по значению функции f на конечной системе точек, а $\omega_k(f;\delta)_{L^p}$ не влияет на изменение функции на любом множестве нулевой меры. Характеристика $\tau_k(f;\delta)_{L^p}$ в таком смысле более пригодна для характеристики величин, зависящих от значений функции f на дискретном множестве.

Замечание 3. В работе [2] нами получены оценки для величины /4/ $(1 < p < \infty)$ через модуль $\tau_k(f;\delta)_{L^p}$ функции f. Учитывая полученные связи этого модуля с другими характеристиками функции f, для /4/, как в §3 настоящей статьи, можно дать оценки через эти характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. "Мир", М., 1965, т.11.
2. Христов В.Х. ОИЯИ, 5-81-317, Дубна, 1981.
3. Popov V.A., Andreev A.S. Comptes rendus de l'Acad. bulg. des. Sci., 1978, 34, No. 2, pp. 151-154.
4. Андреев А., Попов В.А., Сендов Е.Л. Матем.заметки, 1979, 26, №5, с. 791-804.
5. Andreev A.S., Popov V.A. Approximation of functions by means of linear summation operators in L^p. Proceedings of Conference of Constructive function theory, Budapest, 1980 (to appear).
6. Кельзон А.А. Доклады АН СССР, 1975, 221, №2, с. 283-286.
7. Попов В.А. Доклады Болг. АН, 1979, 32, №10, с. 1319-1322.
8. Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. Матем. сборник, 1976, 101/143/, №4, с. 508-541.
9. Popov V.A. Comptes rendus de l'Acad. bulg.des Sci., 1974, 27, No. 5, p. 623-626.
10. Чантурия З.А. Доклады АН СССР, 1974, 214, №1, с. 63-66.
11. Христов В.Х., Петрушев П.П. Сходимость ряда Фурье в пространстве Банаха. Плиска,Български математически студии, 1977, 1, 37-48.
12. Musielak J. Funct. et approxim. (PRL), 1979, 7, p. 129-133.
13. Голубов Б.И. Известия АН СССР, сер. матем., 1968,32, №4, с. 837-858.
14. Ульянов П.Л. Известия АН СССР, сер.матем., 1968, 32, №3, с. 649-686.
15. Корнейчук Н.П. Экспериментальные задачи теории приближения, "Наука", М., 1976.
16. Субботин Ю.Н. Труды матем. института АН СССР, 1980, 145, с. 152-168.
17. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. Гос.изд. тех-теор. лит., М., 1949.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 мая 1981 года.