объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-81-317

В.Х.Христов

О СХОДИМОСТИ В СРЕДНЕМ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Направлено в Болгарский
математический журнал "Сердика"

1981

ВВЕДЕНИЕ

Пусть f - вещественная, конечная и 2π-периодическая функция и пусть $I_n(f;x)$ - интерполяционный тригонометрический полином порядка n функции f /см. [1] т.11, стр.10/, совпадающий с ней в точках

$$x_j^{(n)} = 2\pi j/(2n+1), \quad j = 0,1,\dots,2n. \qquad /1/$$

Частичную сумму порядка $\nu\,(\nu \le n)$ полинома $I_n(f)$ будем обозначать через $I_{n,\nu}(f)$. В частности, $I_{n,n}(f) = I_n(f)$.

Для любого $p \in [1,\infty)$, как обычно, интегральную норму функции g определяем выражением

$$||g||_{L^p} = \{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^p\,dt\}^{1/p} ,$$

а дискретную норму - выражением

$$||g||_{\ell^p_{2n+1}} = \{\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} |g(\xi_j)|^p\}^{1/p} , \qquad /2/$$

где точки ξ_j, $j = 0,1,\dots,2n$ в наших рассмотрениях всегда будут равноотстоящими на периоде, т.е. $\xi_j - \xi_{j-1} = 2\pi/(2n+1)$, $j = 1,2,\dots,2n$, и это не будем специально оговаривать в дальнейшем.

Известно /см. [1] т.11, стр.45,50 [2] /, что для любой ограниченной и интегрируемой по Риману функции f и для любого $p \in [1,\infty)$ величина

$$||f - I_{n,\nu}(f)||_{L^p} \qquad /3/$$

стремится к нулю, когда $n \ge \nu \to \infty$.

Цель настоящей статьи - охарактеризовать величину /3/, а также величину

$$||f - I_{n,\nu}(f)||_{\ell^p_{2n+1}} \qquad /4/$$

как функции параметров n и ν в зависимости от структурных свойств функции f для случая $p \in (1,\infty)$. Точнее, получены оценки для /3/ и /4/ через интегральный модуль непрерывности $\omega_k(f;\delta)_{L^p}$ и через усредненный по норме в L^p локального модуля непрерывности функции f /в §§1,2 эти результаты формулируются/.

Последняя характеристика функции f /обозначается через $r_k(f;\delta)_{L^p}$ / хорошо известна и использовалась разными авторами для характеристики различных аппроксимационных процессов /об истории этой характеристики и возможностей ее применения см. [3-6]/. В §3, с учетом некоторых свойств модуля $r_k(f;\delta)_{L^p}$, из результатов §§1 и 2 получены некоторые следствия. В §4 доказываются сформулированные утверждения.

Припомним определение характеристики $r_k(f;\delta)_{L^p}$ функции f. Следуя Попову и Андрееву [6], для любого $p \geq 1$, k - натурального и $\delta>0$ определяем

$$r_k(f;\delta)_{L^p} = \|\omega_k(f;x,\delta)\|_{L^p} ,$$

где

$$\omega_k(f;x,\delta) = \sup\{|\Delta_h^k f(t)| : t, t+kh \in [x-k\delta/2, x+k\delta/2]\}$$

и

$$\Delta_h^k f(t) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(t+jh).$$

Напомним еще и определение интегрального модуля непрерывности $\omega_k(f;\delta)_{L^p}$ функции f порядка k в норме L^p:

$$\omega_k(f;\delta)_{L^p} = \sup\{\|\Delta_h^k f(x)\|_{L^p} : |h| \leq \delta\} \quad (\delta > 0) .$$

Отметим, что везде в дальнейшем константы /может быть, и разные/ будем обозначать всегда через C, C_k, $C_{k,p}$, указывая индексами лишь то, от каких параметров они зависят. Константы всегда положительны.

§1. СЛУЧАЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ НОРМЫ

Справедлива

Теорема 1. Пусть f - конечная и интегрируемая по Риману функция, $p \in (1,\infty)$ и ν, k, n - натуральные числа, $\nu \leq n$. Тогда для любого $h \geq 2\pi/2n+1)$ имеет место неравенство

$$\|f - I_{n,\nu}(f)\|_{L^p} \leq C_{k,p}(r_k(f;h)_{L^p} + (\nu h)^{-k}\omega_k(f;h)_{L^p}). \qquad /5/$$

Из последнего утверждения, учитывая [6], что

$$\omega_k(f;\delta)_{L^p} \leq r_k(f;\delta)_{L^p},$$

$$r_k(f;\lambda\delta)_{L^p} \leq (1+C\lambda)^{Ck} r_k(f;\delta)_{L^p}$$

/$0<\lambda$ - действительно/ и полагая h последовательно равным $2\pi/(2\nu+1)$ и $2\pi/(2n+1)$, получаем, что имеет место

Теорема 1'. В условиях теоремы 1 справедливы оценки

$$\|f - I_{n,\nu}(f)\|_{L^p} \leq C_{k,p} r_k(f;1/\nu)_{L^p} ,$$
$$\|f - I_{n,\nu}(f)\|_{L^p} \leq C_{k,p}(r_k(f;1/n)_{L^p} + (n/\nu)^k \omega_k(f;1/n)_{L^p}). \qquad /6/$$

Пусть $\tilde{f}$ - сопряженная функция f, а $\tilde{I}_{n,\nu}(f;x)$ - ν-тая частичная сумма сопряженного интерполяционного полинома $\tilde{I}_n(f;x)$ функции f по узлам /1/ /см. [1], т.11, стр.44,12/. Из теоремы Рисса /см. [1], т.1, стр.404/ получаем $(1<p<\infty)$

$$\|\tilde{f} - \tilde{I}_{n,\nu}(f)\|_{L^p} \leq C_p \|f - I_{n,\nu}(f)\|_{L^p}$$

и, следовательно, справедлива

Теорема 2. Для любой конечной и интегрируемой по Риману функции f выполнено

$$\|\tilde{f} - \tilde{I}_{n,\nu}(f)\|_{L^p} \leq C_{k,p}(r_k(f;h)_{L^p} + (\nu h)^{-k}\omega_k(f;h)_{L^p}), \qquad /7/$$

где p, ν, k, n и h - как и в теореме 1.

Следующее утверждение является в некотором смысле обратным к полученным оценкам /5/ и /6/. Оно показывает, что характеристика $r_k(f;\delta)_{L^p}$ хорошо улавливает порядок убывания величины /3/ для дифференцируемых функций.

Теорема 3. Пусть k, m, n и ν - натуральные числа и такие, что $2^m \leq \nu < 2^{m+1} \leq n$. Тогда для $1 \leq p \leq \infty$ и для любой функции f с абсолютно непрерывной k-1 производной и $f^{(k)} \in L^p$ имеет место неравенство

$$r_{k+1}(f;1/\nu)_{L^p} \leq C\nu^{-k}\|I_{n,2^{m+1}}(f^{(k)}) - f^{(k)}\|_{L^p} +$$
$$+ C\nu^{-k-1}\{\|I_{n,0}(f^{(k)}) - f^{(k)}\|_{L^p} + \sum_{j=0}^{m+1} 2^j \|I_{n,2^j}(f^{(k)}) - f^{(k)}\|_{L^p}\}.$$

Отсюда, например, при k=1 легко получается

Следствие 1. Пусть $\|f' - I_{n,\nu}(f')\|_{L^p} = O(\nu^{-\alpha})$, $0<\alpha<1$. Тогда $r_2(f;\delta)_{L^p} = O(\delta^{1+\alpha})$, $1 \leq p < \infty$.

§2. СЛУЧАЙ ДИСКРЕТНОЙ НОРМЫ

Справедлива

Теорема 4. Пусть f - конечная и интегрируемая по Риману функция, $p \in (1,\infty)$ и ν, k, n - натуральные числа, $\nu \leq n$. Тогда для любого $h \geq 2\pi/(2n+1)$ выполнено неравенство

$$\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{\ell^p_{2n+1}} \le C_{k,p}\left(\tau_k(f;h)_{L^p} + (\nu h)^{-k}\omega_k(f;h)_{L^p}\right), \qquad /8/$$

где точки ξ_j, $j=0,1,\ldots,2n$ в дискретной норме /см. /2// последнего неравенства совпадают с узлами интерполяции /1/, по которым построен $I_n(f)$.

Из последней теоремы сразу получается оценка для наилучшего приближения функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше ν в дискретной норме. Точнее, пусть

$$E_\nu(f)_{\ell^p_{2n+1}} = \inf\|f-T\|_{\ell^p_{2n+1}},$$

где инфинум берется по всевозможным тригонометрическим полиномам $T(x)$ порядка не выше ν. Тогда справедлива

Теорема 5. Для любой конечной и интегрируемой по Риману функции f и для любых $p\in(1,\infty)$ и натуральных ν, k и n выполнено неравенство

$$E_\nu(f)_{\ell^p_{2n+1}} \le C_{k,p}\,\tau_k(f;1/\nu)_{L^p}.$$

Последнее утверждение при $p=2$ дает оценку погрешности между f и полиномом $T_\nu(f;x)$ порядка $\le\nu$, полученным по методу наименьших квадратов. Отметим, что ввиду того, что коэффициенты этого полинома

$$T_\nu(f;x) = I_{n,\nu}(f;x) = a_0^{(n)}/2 + \sum_{j=1}^{\nu} a_j^{(n)}\cos jx + b_j^{(n)}\sin jx$$

линейно зависят от f и выражаются следующими простыми формулами

$$a_j^{(n)} = \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{\ell=0}^{2n} f(x_\ell^{(n)})\cos jx_\ell^{(n)}, \quad b_j^{(n)} = \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{\ell=0}^{2n} f(x_\ell^{(n)})\sin jx_\ell^{(n)},$$

то этот полином часто используется в практическом гармоническом анализе.

§3. СЛЕДСТВИЕ И ЗАМЕЧАНИЕ

Следствие 2 /см. /1/, т.11, стр.50/. Для любой ограниченной и интегрируемой по Риману функции f и для любого $p\in(1,\infty)$

$$\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{L^p}\to 0, \qquad \|\tilde f-\tilde I_{n,\nu}(f)\|_{L^p}\to 0,$$

$$\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{\ell^p_{2n+1}}\to 0 \qquad (n\ge\nu\to\infty).$$

Последнее утверждение получим из оценок /6/, /7/ и /8/ при $k=1$, учитывая, что для любой ограниченной и интегрируемой по Риману функции f

$$\tau_1(f;\delta)_{L^p}\to 0 \qquad \text{при} \quad \delta\to+0 \qquad /9/$$

/при $p=1$ это известно /7/ /. Действительно, если положим

$$M=\sup\{|f(t)|:\ t\in(-\infty,\infty)\},$$

то

$$0\le\tau_1(f;\delta)^p_{L^p} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega_1(f;x,\delta)^{p-1}\,\omega_1(f;x,\delta)\,dx \le$$

$$\le (2M)^{p-1}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega_1(f;x,\delta)\,dx = (2M)^{p-1}\,\tau_1(f;\delta)_{L^1}\to 0$$

при $\delta\to+0$ /см. /7/ /, чем и доказано /9/.

Если $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и $f^{(k)}\in L^p$ $(k\ge1)$, то

$$\tau_{k+1}(f;\delta)_{L^p} \le \delta^{k-1}\tau_2(f^{(k-1)};\delta)_{L^p} \le C\delta^k\omega_1(f^{(k)};\delta)$$

/см. /6,8/ /, получаем

Следствие 3. Пусть $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и $f^{(k)}\in L^p$, $p\in(1,\infty)$. Тогда имеет место оценка

$$\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{L^p(\ell^p_{2n+1})} \le C_{k,p}\,\nu^{-k}\,\omega_1(f^{(k)};1/\nu)_{L^p}.$$

Следствие 3 показывает, что для дифференцируемых функций f величины /3/ и /4/ можно оценить одним лишь интегральным модулем непрерывности соответствующей производной /обратите внимание, что $\omega_k(f;\delta)_{L^p}\le\tau_k(f;\delta)_{L^p}$ /.

Замечание 1. Теоремы, аналогичные сформулированным выше, можно получить и для интерполяционных полиномов $E_n(f;x)$ /см. /1/ т.11, стр.24/ и их частичных сумм $E_{n,\nu}(f;x)$, построенных по $2n$ равноотстоящих узлов.

Замечание 2. Через модули $\tau_k(f;\delta)_{L^p}$ можно получить оценки уклонения по норме L^p между f и некоторыми другими интерполяционными процессами, например, для второго процесса Бернштейна /интерполяционный аналог сумм Бернштейна-Рогозинского, см. /10/, стр.269, 566/ и для процесса С.И. Раппопорта /интерполяционный аналог интеграла Валле-Пуассона, см. /10/, стр.257,574/.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Доказательства теорем 1 и 4 предпошлем несколькими леммами. Везде и в дальнейшем ν, k и n – натуральные числа, $\nu\le n$, а f – конечная и интегрируемая по Риману.

Лемма 1 /[1], т.11, стр.50/. Справедливо неравенство

$$\|I_{n,\nu}(f)\|_{L^p} \le C_p \|I_n(f)\|_{L^p} \quad (1<p<\infty). \qquad /10/$$

Лемма 2 /[1], т.11, стр.46/. Для любого тригонометрического полинома $T(x)$ порядка не выше n имеют место неравенства

$$\|T\|_{\ell^p_{2n+1}} \le C\|T\|_{L^p} \quad (1\le p<\infty), \qquad /11/$$

$$\|T\|_{L^p} \le C_p \|T\|_{\ell^p_{2n+1}} \quad (1<p<\infty). \qquad /12/$$

Лемма 3. Справедливо неравенство

$$\|I_{n,\nu}(f)\|_{L^p} \le C_p \|f\|_{\ell^p_{2n+1}} \quad (1<p<\infty), \qquad /13/$$

где точки ξ_j, $j=0,1,\dots,2n$ /см. /2// в последней норме - узлы интерполяции /1/, по которым построен $I_n(f;x)$.

Доказательство. Учитывая /10/, /12/ и то, что $I_n(f;x_j^{(n)}) = f(x_j^{(n)})$, $j=0,1,\dots,2n$, получаем

$$\|I_{n,\nu}(f)\|_{L^p} \le C_p\|I_n(f)\|_{L^p} \le C_p\|I_n(f)\|_{\ell^p_{2n+1}} = C_p\|f\|_{\ell^p_{2n+1}},$$

чем и доказано /13/.

Пусть m и r - натуральные числа и $h_m = 2\pi/m$. Обозначим через $S_{r,m}$ множество 2π -периодических сплайнов порядка r дефекта 1 по равномерному разбиению периода точками $t_j^{(m)} = jh_m + a_r h_m$, $j=0,1,\dots,m$, $a_r = (1+(-1)^r)/4$, т.е. функция $\phi\in S_{r,m}$, если $r-1$ - производная функции ϕ непрерывна и на каждом промежутке $[t_{j-1}^{(m)}, t_j^{(m)}]$ $(j=1,2,\dots,m)$ функция ϕ есть алгебраический многочлен степени не выше r /см. [11], стр.281/.

Лемма 4. Для любого сплайна $\phi\in S_{k,2n+1}$ выполнено неравенство

$$\|\phi\|_{\ell^p_{2n+1}} = \{h_{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}|\phi(\xi_j)|^p\}^{1/p} \le C_{k,p}\|\phi\|_{L^p}. \qquad /14/$$

Доказательство. Для любого алгебраического многочлена P степени не выше k имеет место неравенство /см. [9], с.251/

$$\max\{|P(u)| : u\in[a,b]\} \le \left(\frac{2(1+p)k^2}{b-a}\right)^{1/p}\left(\int_a^b |P(u)|^p du\right)^{1/p} \quad (1\le p<\infty).$$

Учитывая, что каждая точка ξ_j $(j=0,1,\dots,2n)$ по модулю 2π принадлежит только одному из интервалов вида $(t_i^{(2n+1)}, t_{i+1}^{(2n+1)}]$ $(i=0,1,\dots,2n)$ и то, что ϕ на отрезке $[t_i^{(2n+1)}, t_{i+1}^{(2n+1)}]=\Delta_i$ есть алгебраический многочлен степени не выше k, из последнего неравенства при $a=t_i^{(2n+1)}$, $b=t_{i+1}^{(2n+1)}$ и $P=\phi$ получаем

$$|\phi(\xi_j)|^p \le (\max\{|\phi(u)| : u\in\Delta_i\})^p \le$$

$$\le 2(1+p)k^2 h_{2n+1}^{-1}\int_{\Delta_i}|\phi(u)|^p du \qquad (j=0,1,\dots,2n).$$

Следовательно,

$$\|\phi\|_{\ell^p_{2n+1}} \le (4\pi(1+p)k^2)^{1/p}\left\{\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{2n}\int_{\Delta_i}|\phi(u)|^p du\right\}^{1/p} =$$

$$= (4\pi(1+p)k^2)^{1/p}\|\phi\|_{L^p} = C_{k,p}\|\phi\|_{L^p}.$$

Лемма доказана.

Как обычно, обозначим через W_p^k множество 2π периодических функций f таких, что $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и $\|f^{(k)}\|_{L^p}$ ограниченна.

Лемма 5. Для любой функции $f\in W_p^k$ имеет место неравенство

$$\|f - I_{n,\nu}(f)\|_{L^p} \le C_{k,p}(n^{-k}\|f^{(k)}\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}) \ (1<p<\infty). \qquad /15/$$

Доказательство. Для любой функции $f\in W_p^k$ существует сплайн $\phi(f;t)$ $(=S_k(f;2\pi/(2n+1),t))\in S_{k,2n+1}$ такой, что /см. [12,13], стр.168/

$$\phi(f;x_j^{(n)}) = f(x_j^{(n)}), \quad j=0,1,\dots,2n+1 \qquad /16/$$

и

$$\|\phi(f)-f\|_{L^p} \le C_k n^{-k}\|f^{(k)}\|_{L^p} \qquad /17/$$

/приводим результат в частной форме, которая нам достаточна для доказательства леммы/. Следовательно, учитывая /16/ и /13/, получаем

$$\|I_{n,\nu}(f)-f\|_{L^p} \le \|I_{n,\nu}(f)\|_{L^p} + \|f\|_{L^p} \le$$

$$\le \|I_{n,\nu}(\phi(f))\|_{L^p} + \|f\|_{L^p} \le C_p\|\phi(f)\|_{\ell^p_{2n+1}} + \|f\|_{L^p}.$$

Ввиду /14/ и /17/, имеем

$$\|\phi(f)\|_{\ell^p_{2n+1}} \le C_{k,p} \|\phi(f)\|_{L^p} \le C_{k,p}(\|\phi(f)-f\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}) \le$$

$$\le C_{k,p}(n^{-k} \|f^{(k)}\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}),$$

чем и доказано утверждение леммы.

Лемма 6. Для любой функции $f \in W^k_p$ имеет место неравенство

$$\|I_{n,\nu}(f) - f\|_{L^p} \le C_{k,p} \nu^{-k} \|f^{(k)}\|_{L^p} \qquad (1 < p < \infty). \qquad /18/$$

Доказательство. Отметим /см.[1], т.1, стр.423/, что при $p \in (1, \infty)$ частичные суммы $s_\nu(f;x)$ ряда Фурье $S[f]$ функции f осуществляют совместное приближение функций f и $f^{(k)}$ порядком наилучшего приближения, т.е. что

$$\|f - s_\nu(f)\|_{L^p} \le C_p E_\nu(f)_{L^p} \le C_{k,p} \nu^{-k} \|f^{(k)}\|_{L^p}$$

и

$$\|f^{(k)} - s^{(k)}_\nu(f)\|_{L^p} = \|f^{(k)} - s_\nu(f^{(k)})\|_{L^p} \le$$

$$\le C_p E_\nu(f^{(k)})_{L^p} \le C_p \|f^{(k)}\|_{L^p},$$

где $E_\nu(f)_{L^p} = \inf\{\|f - T\|_{L^p} : T(x)$ - триг. полиномы порядка $\le \nu\}$.

Учитывая еще, что $I_{n,\nu}(T,x) \equiv T(x)$ для любого тригонометрического полинома порядка не выше ν, из /15/ получаем

$$\|I_{n,\nu}(f) - f\|_{L^p} = \|I_{n,\nu}(f - s_\nu(f)) - (f - s_\nu(f))\|_{L^p} \le$$

$$\le C_{k,p}(n^{-k} \|(f - s_\nu(f))^{(k)}\|_{L^p} + \|f - s_\nu(f)\|_{L^p}) \le$$

$$\le C_{k,p}(n^{-k} \|f^{(k)}\|_{L^p} + \nu^{-k} \|f^{(k)}\|_{L^p}) \le C_{k,p} \nu^{-k} \|f^{(k)}\|_{L^p}.$$

Лемма доказана.

Лемма 7 /см.[5,14]/. Для любой конечной функции $f \in L^p$ $(1 \le p \le \infty)$ и любого $h>0$ существует функция $f_{k,h} \in W^k_p$ такая, что

$$|f_{k,h}(x) - f(x)| \le \omega_k(f; x, 2h), \qquad /19/$$

$$\|f_{k,h} - f\|_{L^p} \le 2\omega_k(f;h)_{L^p}, \qquad /20/$$

$$\|f^{(r)}_{k,h}\|_{L^p} \le C_r h^{-r} \omega_r(f;h)_{L^p} \qquad (r = 1,2,\dots,k). \qquad /21/$$

Лемма 8 /см.[5]/. Для любого $h \ge 2\pi/(2n+1)$ справедливо неравенство $(1 \le p < \infty)$

$$\|\omega_k(f; x, 2h)\|_{\ell^p_{2n+1}} \le C_k r_k(f;h)_{L^p}. \qquad /22/$$

Доказательство теоремы 1. Будем следовать схеме доказательства теоремы 1 из [5]. Пусть $f_{k,h}$ - функция из леммы 7. Тогда

$$\|I_{n,\nu}(f) - f\|_{L^p} \le \|I_{n,\nu}(f - f_{k,h})\|_{L^p} + \|I_{n,\nu}(f_{k,h}) - f_{k,h}\|_{L^p} +$$

$$+ \|f_{k,h} - f\|_{L^p} = A_1 + A_2 + A_3. \qquad /23/$$

Ввиду /13/, /19/ и /22/ имеем

$$A_1 \le C_p \|f - f_{k,h}\|_{\ell^p_{2n+1}} \le$$

$$\le C_p \|\omega_k(f;x,2h)\|_{\ell^p_{2n+1}} \le C_{k,p} r_k(f;h)_{L^p},$$

где точки ξ_j, $j = 0,1,\dots,2n$ в последних дискретных нормах совпадают с узлами интерполяции /1/.

Из /18/ и /21/ при $r = k$, учитывая, что $f_{k,h} \in W^k_p$, получаем

$$A_2 \le C_{k,p} \nu^{-k} \|f^{(k)}_{k,h}\|_{L^p} \le C_{k,p} (\nu h)^{-k} \omega_k(f,h)_{L^p}.$$

Наконец, из неравенства /20/ следует, что

$$A_3 \le 2\omega_k(f;h)_{L^p}.$$

Подставляя полученные оценки для A_1, A_2 и A_3 в /23/, получаем утверждение теоремы 1.

Замечание 3. Анализируя доказательство теоремы 1, видим, что существенными элементами при получении оценки /5/ являются леммы 3 и 6 для оператора $I_{n,\nu}(f)$ и его линейность. Этот факт был отмечен в [5].

Доказательство теоремы 4. Ввиду замечания 3, для доказательства оценки /8/ достаточно получить аналоги неравенств /13/ и /18/ для случая, когда интегральная L^p - норма в их левых частях - заменена дискретной нормой $\|\cdot\|_{\ell^p_{2n+1}}$.

Аналогом оценки /13/ для случая дискретных норм является неравенство

$$\|I_{n,\nu}(f) - f\|_{\ell^p_{2n+1}} \le C_p \|f\|_{\ell^p_{2n+1}} \qquad (1 < p < \infty); \qquad /24/$$

Справедливость его сразу вытекает из /11/ и /13/.

Докажем, что для $f \in W_p^k$ имеет место

$$\|f - I_{n,\nu}(f)\|_{\ell^p_{2n+1}} \le C_{k,p} \nu^{-k} \|f^{(k)}\|_{L^p} \quad (1 < p < \infty). \qquad /25/$$

В самом деле, из того, что $f(x_j^{(n)}) = I_n(f; x_j^{(n)})$, $j = 0, 1, \dots, 2n$, следует

$$\|f - I_{n,\nu}(f)\|_{\ell^p_{2n+1}} = \|I_n(f) - I_{n,\nu}(f)\|_{\ell^p_{2n+1}} \le \|I_n(f)\|_{\ell^p_{2n+1}} +$$

$$+ \|I_{n,\nu}(f)\|_{\ell^p_{2n+1}} \le C(\|I_n(f)\|_{L^p} + \|I_{n,\nu}(f)\|_{L^p}) \le C_p \|I_n(f)\|_{L^p}.$$

Тогда для $f \in W_p^k$ в силу леммы 5,

$$\|I_n(f)\|_{L^p} \le C_{k,p} (n^{-k} \|f^{(k)}\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}),$$

и, следовательно,

$$\|f - I_{n,\nu}(f)\|_{\ell^p_{2n+1}} \le C_{k,p} (n^{-k} \|f^{(k)}\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}).$$

Из последнего неравенства, как в доказательстве леммы 6, получаем /25/.

Из оценок /24/ и /25/, используя функцию $f_{k,h}$ из леммы 7, путем выкладок, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 1, получаем оценку /8/.

Доказательство теоремы 3. Учитывая, что /6,8/

$$\tau_{k+1}(f;\delta)_{L^p} \le \delta^r \tau_{k-r+1}(f^{(r)};\delta)_{L^p} \quad (1 \le r \le k),$$

$$\tau_2(f;\delta)_{L^p} \le C\delta\omega_1(f';\delta)_{L^p}$$

и что

$$\omega_1(f+g;\delta)_{L^p} \le \omega_1(f;\delta)_{L^p} + \omega_1(g;\delta)_{L^p},$$

получаем

$$\tau_{k+1}(f;1/\nu)_{L^p} \le C\nu^{-k}\omega_1(f^{(k)};1/\nu)_{L^p} \le$$

$$\le C\nu^{-k}\{\|f^{(k)} - I_{n,2^{m+1}}(f^{(k)})\|_{L^p} + \omega_1(I_{n,2^{m+1}}(f^{(k)});1/\nu)_{L^p}\}. \qquad /26/$$

Для оценки последнего члена воспользуемся стандартным методом Салема-Стечкина /см. /9/ стр.345/. Используя свойства модуля непрерывности $\omega_1(f;\delta)_{L^p}$, неравенство Минковского и неравенство Бернштейна, получаем

$$\omega_1(I_{n,2^{m+1}}(f^{(k)});1/\nu)_{L^p} \le \nu^{-1}\|I'_{n,2^{m+1}}(f^{(k)})\|_{L^p} \le$$

$$\le \nu^{-1}\{\|I'_{n,1}(f^{(k)})\|_{L^p} + \sum_{j=0}^{m} \|I'_{n,2^{j+1}}(f^{(k)}) - I'_{n,2^j}(f^{(k)})\|_{L^p}\} \le$$

$$\le \nu^{-1}\{\|I_{n,0}(f^{(k)}) - f^{(k)}\|_{L^p} + 3\sum_{j=0}^{m} 2^j \|I_{n,2^j}(f^{(k)}) - f^{(k)}\|_{L^p}\}.$$

Подставляя последнюю оценку в /26/, получаем утверждение теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т.1 и 2. "Мир", М., 1965.
2. Erdös P., Turan P. On Interpolation, (I) Quadrature and Mean Convergence in the Lagrange Interpolation. Ann.Math., 1938, 38, p.142-155.
3. Popov V.A. Comptes rendus de l'Acad.Bulg. des Sci., 1977, 30, No.11, p.1529-1532.
4. Андреев А., Попов В.А., Сендов Бл. Матем. заметки, 1979, 26, №5, с.791-804.
5. Andreev A.S., Popov V.A. Approximation of Functions by Means of Linear Summation Operators in L_p. Proc. of Conf. on Construct. Function Theory. Budapest, 1980 (to appear).
6. Popov V.A., Andreev A.S. Comptes rendus de l'Acad. Bulg. des Sci., 1978, 31, No.2, p.151-154.
7. Долженко Е.П., Севастьянов Б.А. Матем. сборник, 1976, 101/143/, №4, с.508-541.
8. Попов В.А. Докл.БАН, 1979, 32, №10, с.1319-1322.
9. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, М., 1960.
10. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. Гос. изд. техн.-теорет. лит., М., 1949.
11. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. "Наука", М., 1976.
12. Субботин Ю.Н. Матем. заметки, 1970, 7, №4, с.423-430.
13. Субботин Ю.Н. Труды МИ АН СССР, 1975, 138, с.118-173.
14. Брудный Ю.А. Изв. АН СССР, сер.матем., 1970, 34, с.564-583.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 мая 1981 года.