B-898

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

3539/2-81

20/VII-81

5-81-267

Ву Суан Минь

МИНИМАЛЬНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

1981

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] разработана алгебраическая динамическая система, которая является обобщенной алгебраической структурой для линейных дискретных динамических систем, конечных автоматов и билинейных /однородных и неоднородных/ дискретных динамических систем и универсальной для реализации произвольного дискретного динамического процесса. Однако каждый дискретный динамический процесс может быть реализован с помощью различных пространств состояний. Следовательно, одной из основных задач теории реализации дискретных процессов является нахождение необходимого и достаточного условия минимального пространства состояний, реализующего заданный динамический процесс [2-4]. В предлагаемой работе для установления необходимого и достаточного условия минимальной алгебраической динамической системы, реализующей произвольный дискретный динамический процесс, разработана теория эквивалентных преобразований, основанных на методах универсальной алгебры [5,6]. Сущность теории эквивалентных преобразований заключается в определении условий, при которых преобразование пространств состояний становится эквивалентным преобразованием алгебраических динамических систем, реализующих один и тот же дискретный динамический процесс.

2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Напомним, что, по определению в [1], алгебраическая динамическая система есть восьмерка

$$S = \langle T, X, U, Y, \phi, a, \beta, \mu \rangle,$$

где $T = N = \{0, 1, 2, \dots\}$ - множество моментов времени; X, U и Y - множество состояний, входное множество и выходное множество соответственно; $\phi \subsetneq U^T \times Y^T$ - дискретный динамический процесс; $a: X \to X$ - внутренняя динамика; $\beta: U \to \mathcal{T}(X)$ - внешняя динамика, здесь $\mathcal{T}(X)$ - множество всех преобразований множества X в себя; $\mu: X \times X \to X: (x, x') \mapsto x.x'$ - динамическая композиция; операции a, β и μ определяют одношаговую переходную функцию состояния в пространстве состояний X:

$$x_{t+1} = x_t a . x_t \beta(u_t)$$

для всех $x_t \in X$, $u_t \in U$ и $t \in T$; переходная функция состояния

$\lambda: X\times U^T\times T \to X$ определяется с помощью принципа индукции для натуральных чисел:

$$\lambda(x,v,0) = \lambda(x,v|[0,0)) = x$$

$$\lambda(x,v,1) = \lambda(x,v|[0,1)) = x\alpha . x\beta(v(0))$$

$$\lambda(x,v,t+1) = \lambda(x,v|[0,t+1)) = \lambda(x,v|[0,t))\alpha.\lambda(x,v|[0,t))\beta(v(t))$$

для всех $t\in T$, где $v|[0,t)$ - ограничение временной функции $v\in U^T$ на интервал $[0,t)$; для которой существует по крайней мере одно допустимое выходное отображение, т.е. такое выходное отображение $\eta: X\to Y$, что для каждой пары $(v,\omega)\in\phi$ существует начальное состояние $x\in X$, при котором $S_{x\eta}(v)=\omega$, где $S_{x\eta}$ - отображение вход-выход системы S при начальном состоянии x и выходном отображении η, определяемое следующим образом:

$$S_{x\eta}: U^T\to Y^T$$

$$S_{x\eta}(v)(t) = \eta(\lambda(x,v|[0,t)))$$

для любого $v\in U^T$ и $t\in T$.

Для каждой алгебраической динамической системы S множество всех ее допустимых выходных отображений обозначается через H_S.

Для каждого дискретного динамического процесса ϕ множеством входных воздействий V называется совокупность функций $v\in U^T$ таких, что для каждой из них существует функция $\omega\in Y^T$ такая, что $(v,\omega)\in\phi$.

/2.1/ Определение

Мы будем называть подмножество X' пространства состояний X алгебраической динамической системы $S=\langle T,X,U,Y,\phi,\alpha,\beta,\mu\rangle$ подпространством ее пространства состояний тогда и только тогда, когда X' замкнуто относительно α,β и μ, т.е. для любых $x,x'\in X'$ и $u\in U$ удовлетворяются условия $x\alpha\in X'$, $x\beta(u)\in X'$ и $x.x'\in X'$.

Может быть случай, когда подпространство X' в свою очередь также может реализовать процесс ϕ. Мы сформулируем это положение.

/2.2/ Определение

Пусть будет дана алгебраическая динамическая система $S=\langle T,X,U,Y,\phi,\alpha,\beta,\mu\rangle$ и X' - подмножество множества X. Если X' есть подпространство пространства состояний X и для восьмерки $S=\langle T,X',U,Y,\phi,\alpha',\beta',\mu'\rangle$, где $\alpha'=\alpha|X'$, $\beta'(u) = \beta(u)|X'$ для всех $u\in U$ и $\mu'=\mu|(X'\times X')$, существует допустимое выходное отображение, то S' называется алгебраической динамической подсистемой системы S.

/2.3/ Определение

Областью достижимости состояния $x\in X$ алгебраической динамической системы S называется множество $\mathcal{R}_x$ всех таких состояний $x'\in X$, для каждого из которых существуют входное воздействие $v\in V$ и момент $t\in T$ такие, что $\lambda(x,v|[0,t))=x'$. Каждое состояние $x'\in\mathcal{R}_x$ называется достижимым из состояния x.

Очевидно, что $x\in\mathcal{R}_x$ для всех $x\in X$.

/2.4/ Предложение

Пусть X' - подпространство пространства состояний алгебраической динамической системы $S=\langle T,X,U,Y,\phi,\alpha,\beta,\mu\rangle$. Тогда область достижимости любого состояния $x\in X'$ включается в X', т.е. $\mathcal{R}_x\subseteq X'$.

Доказательство

Пусть $x'\in\mathcal{R}_x$, тогда существуют $v\in V$ и $t\in T$ такие, что $\lambda(x,v|[0,t)) = x'$. Докажем предложение индукцией по t. При $t=0$ имеем $\lambda(x,v|[0,0)) = x$, тогда по условию предложения $x\in X'$. При $t=1$ имеем $x\alpha.x\beta(v(0)) = \lambda(x,v|[0,1))\in X'$, так как X' замкнуто относительно $\alpha,\beta(v(0))$ и μ. Предположим, что $\lambda(x,v|[0,t))\in X'$. Тогда аналогично имеем $\lambda(x,v|[0,t+1)) = \lambda(x,v|[0,t))\alpha.\lambda(x,v|[0,t))\beta(v(t))\in X'$.

Таким образом, по индукции получим $\lambda(x,v|[0,t))\in X'$ для всех $t\in T$. □

/2.5/ Следствие

Область достижимости любого состояния x алгебраической динамической системы S включается в подпространство, которое представляет собой пересечение всех содержащих x подпространств и называется подпространством, порожденным состоянием x.

Доказательство

Очевидно, что пересечение любого множества подпространств пространства состояний X есть снова его подпространство. Отсюда следует следствие. □

/2.6/ Предложение

Пусть $S'=\langle T,X',U,Y,\phi,\alpha',\beta',\mu'\rangle$ - алгебраическая динамическая подсистема системы $S=\langle T,X,U,Y,\phi,\alpha,\beta,\mu\rangle$ и $\eta'\in H_{S'}$ - допустимое выходное отображение подсистемы S'. Тогда любое расширение η' до отображения пространства X системы S в выходное множество Y является допустимым выходным отображением системы S. Следовательно, любое допустимое выходное отображение подсистемы S' есть ограничение некоторого допустимого выходного отображения системы S на подпространство X' системы S.

Доказательство

Пусть $\eta' \in H_{S'}$ и η - произвольное расширение η' до X. Тогда для любого $(v,\omega) \in \phi$ найдется $x \in X'$ такое, что $S'_{x\eta'}(v) = \omega$. По /2.4/ $\lambda(x, v|[0,t)) \in X'$ для любого $t \in T$. Отсюда имеем $\lambda'(x, v|[0,t)) = \lambda(x, v|[0,t))$ для всех $t \in T$ и $S'_{x\eta'}(v)(t) = \eta'(\lambda(x, v|[0, t))) = \eta(\lambda(x, v|[0, t))) = S_{x\eta}(v)(t)$. Следовательно, $S_{x\eta}(v) = S'_{x\eta'}(v) = \omega$ и η является допустимым выходным отображением системы S. □

/2.7/ Определение

Пусть $S = \langle T, X, U, Y, \phi, a, \beta, \mu \rangle$ и $S' = \langle T, X', U, Y, \phi, a', \beta', \mu' \rangle$ - две алгебраические динамические системы, реализующие один и тот же дискретный динамический процесс ϕ. Тогда гомоморфизмом системы S в систему S′ называется отображение $f: X \to X'$, удовлетворяющее условиям:

$$f(x.x') = f(x).f(x')$$

$$f(xa) = f(x)\,a'$$

$$f(x\beta(u)) = f(x)\,\beta'(u)$$

для всех $x, x' \in X$ и $u \in U$.

В дальнейшем для сокращения мы еще будем называть алгебраические динамические системы просто системами, а системы, реализующие один и тот же дискретный динамический процесс ϕ, просто системами процесса ϕ и условимся, что верхний индекс j системы S^j всегда означает, что соответствующее пространство состояний и операции на нем имеют один и тот же индекс, т.е. X^j, a^j, β^j и μ^j, когда все это не приводит к путанице.

/2.8/ Предложение

Образ гомоморфизма $f: X \to X'$ системы S в систему S′ процесса ϕ является подпространством пространства состояний системы S′, а произведение двух гомоморфизмов есть снова гомоморфизм.

Доказательство

Для любого $x' \in fX$ существует $x \in X$ такое, что $f(x) = x'$. Следовательно, $x'a' = f(x)\,a' = f(xa) \in fX$ и $x'\beta'(u) = f(x)\,\beta'(u) = f(x\beta(u)) \in fX$ для любого $u \in U$. Если $x'_1, x'_2 \in fX$, то существуют $x_1, x_2 \in X$ такие, что $f(x_1) = x'_1$ и $f(x_2) = x'_2$. Следовательно, $x'_1 . x'_2 = f(x_1).f(x_2) = f(x_1.x_2) \in fX$. Пусть $f: X \to X'$ - гомоморфизм системы S в систему S′, а $g: X' \to X''$ - гомоморфизм системы S′ в систему S″. Покажем, что произведение $gf: X \to X''$ есть гомоморфизм системы S в систему S″. Действительно, для $x \in X$ имеем $gf(xa) = g(f(x)\,a') = gf(x)a''$ и $gf(x\beta(u)) = g(f(x)\,\beta'(u)) = gf(x)\,\beta''(u)$ для всех $u \in U$, а для $x_1, x_2 \in X$ имеем $gf(x_1.x_2) = g(f(x_1).f(x_2)) = gf(x_1).gf(x_2)$. □

/2.9/ Определение

Пусть S и S′ - две системы процесса ϕ. Тогда эквивалентным преобразованием системы S в систему S′ называется отображение $f: X \to X'$, удовлетворяющее условиям:

а/ f - гомоморфизм

в/ образ fX отображения f образует подсистему системы S′, т.е. для восьмерки $S'' = \langle T, fX, U, Y, \phi, a'', \beta'', \mu'' \rangle$, где $a'' = a'|fX$, $\beta''(u) = \beta'(u)\,|\,fX$ для всех $u \in U$ и $\mu'' = \mu'|(fX \times fX)$, существует допустимое выходное отображение.

Заметим, что условие /а/ есть гомоморфное отношение пространств состояний, а условие /в/ есть отношение эквивалентности между образом и прообразом в смысле реализации процесса ϕ.

В общем случае произведение двух эквивалентных преобразований не является эквивалентным преобразованием. Однако мы выделяем один полезный случай.

/2.10/ Предложение

Пусть $f: X \to X'$ и $g: X' \to X''$ - два эквивалентных преобразования систем S, S′ и S″ процесса ϕ. При этом отображение f есть отображение на. Тогда отображение gf является эквивалентным преобразованием системы S в систему S″.

Доказательство

Из /2.8/ произведение gf есть гомоморфизм. Кроме того, образ gfX совпадает с образом gX′, так как f является отображением на. Следовательно, для gfX существует допустимое выходное отображение. □

Если $f: X \to X'$ - гомоморфизм системы S в систему S′ процесса ϕ, то мы также будем обозначать его через $f: S \to S'$. В частности, если f - эквивалентное преобразование, то мы будем обозначать подсистему системы S′, образуемую подпространством состояний fX, через fS.

Гомоморфизм /эквивалентное преобразование/ системы S в себя называется эндоморфизмом /эндоморфным эквивалентным преобразованием/. Эндоморфизм /эндоморфное эквивалентное преобразование/ системы S, являющийся тождественным отображением пространства состояний X в себя, называется тождеством системы S и обозначается через 1_S. Гомоморфизм /эквивалентное преобразование/ $f: X \to X'$, образом которого является все пространство X′, называется эпиморфизмом /эквивалентным преобразованием на/. Гомоморфизм /эквивалентное преобразование/ $f: S \to S'$ называется изоморфизмом /изоморфным преобразованием/, если существует гомоморфизм $g: S' \to S$ такой, что $gf = 1_S$ и $fg = 1_{S'}$. Изоморфизм /изоморфное преобразование/ системы S в себя называется автоморфизмом /самопреобразованием/. Гомоморфизм /эквивалентное преобразование/ $f: X \to X'$ называется вложением /взаимно однозначным преобразованием/ системы S в систему S′, если отображение f взаимно однозначно.

Очевидно, что эпиморфизмы и изоморфизмы /в том числе и автоморфизмы и тождества/ являются эквивалентными преобразованиями. В общем случае для установления условий, при которых гомоморфизмы являются эквивалентными преобразованиями, нам понадобится некоторый промежуточный результат.

/2.11/ Лемма

Пусть S и S′ - две системы процесса ϕ и $f: S \to S'$ - гомоморфизм. Тогда для любого $x \in X$, $v \in U^T$ и $t \in T$ выполняется равенство

$$f(\lambda(x, v|[0,t))) = \lambda'(f(x), v|[0,t)) .$$

Доказательство

Если $t=0$, то по определению переходной функции имеем $f(\lambda(x,v|[0,0)))=f(x)=\lambda'(f(x),v|[0,0))$. При $t=1$ мы имеем $f(\lambda(x,v|[0,1)))=$ $= f(x\alpha . x\beta(v(0))) = f(x\alpha) . f(x\beta(v(0))) = f(x)\alpha' . f(x)\beta'(v(0)) = \lambda'(f(x), v|[0,1))$.

Предположим, что $f(\lambda(x,v|[0, t))) = \lambda'(f(x), v|[0,t))$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, v|[0,t+1))) &= f(\lambda(x, v|[0,t))\alpha . \lambda(x, v|[0,t))\beta(v(t))) \\ &= f(\lambda(x, v|[0,t)))\alpha' . f(\lambda(x, v|[0,t)))\beta'(v(t)) \\ &= \lambda'(f(x), v|[0,t))\alpha' . \lambda'(f(x), v|[0,t))\beta'(v(t)) \\ &= \lambda'(f(x), v|[0,t+1)) , \end{aligned}$$

отсюда по индукции получим $f(\lambda(x, v|[0,t))) = \lambda'(f(x), v|[0,t))$ для всех $t \in T$. □

/2.12/ Предложение

Вложение $f: S \to S'$ системы S в систему S′ процесса ϕ является эквивалентным преобразованием, т.е. взаимно однозначным преобразованием.

Доказательство

Для произвольного $\eta \in H_S$ положим $\eta': fX \to Y : x' \mapsto \eta(f^{-1}(x'))$. Тогда для любой пары $(v,\omega) \in \phi$ существует $x \in X$ такое, что $S_{x\eta}(v) = \omega$. По лемме /2.11/ имеем $S'_{f(x)\eta'}(v)(t) =$ $= \eta'(\lambda'(f(x), v|[0,t))) = \eta'(f(\lambda(x, v|[0,t)))) = \eta(\lambda(x, v|[0,t))) = S_{x\eta}(v)(t)$.

Отсюда $S'_{f(x)\eta'}(v) = S_{x\eta}(v) = \omega$. Таким образом, η' есть допустимое выходное отображение для подпространства fX. □

/2.13/ Теорема

Пусть S и S′ -системы процесса ϕ и $f: S \to S'$ - гомоморфизм. Тогда f является эквивалентным преобразованием тогда и только тогда, когда существуют наблюдения $\eta \in H_S$ и $\eta' \in H_{S'}$ такие, что $\eta = \eta' f$, т.е. диаграмма отображений

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\eta"] \arrow[d, "f"'] & \\ & Y \\ X' \arrow[ur, "\eta'"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство

Пусть $f: S \to S'$ - эквивалентное преобразование. Тогда fX образует подсистему fS системы S′. По /2.6/ существует допустимое выходное отображение $\eta' \in H_{S'}$ такое, что ограничение $\eta'|fX$ есть допустимое выходное отображение подсистемы fS. Покажем, что $\eta = \eta' f$ есть допустимое выходное отображение системы S. Рассмотрим произвольную пару $(v,\omega) \in \phi$, тогда существует $x' \in fX$ такое, что $S'_{x'\eta'}(v) = \omega$. С другой стороны, в системе S существует $x \in X$ такое, что $f(x) = x'$. Тогда по лемме /2.11/ для любого $t \in T$ имеем $S_{x\eta}(v)(t) = \eta(\lambda(x, v|[0,t))) =$ $= \eta' f(\lambda(x, v|[0,t))) = \eta'(\lambda'(f(x), v|[0,t))) = \eta'(\lambda'(x', v|[0, t))) =$ $= S'_{x'\eta'}(v)(t)$. Отсюда $S_{x\eta}(v) = S'_{x'\eta'}(v) = \omega$. Таким образом, η является допустимым выходным отображением системы S. И наоборот, пусть в системах S и S′ существуют $\eta \in H_S$ и $\eta' \in H_{S'}$ такие, что $\eta = \eta' f$. Тогда для любой пары $(v,\omega) \in \phi$ существует $x \in X$ такое, что $S_{x\eta}(v) = \omega$. С другой стороны, для всех $t \in T$ по лемме /2.11/ имеем $S'_{f(x)\eta'}(v)(t) = \eta'(\lambda'(f(x), v|[0,t))) =$ $= \eta'(f(\lambda(x, v|[0,t)))) = \eta(\lambda(x, v|[0,t))) = S_{x\eta}(v)(t)$. Отсюда $S'_{f(x)\eta'}(v) = S_{x\eta}(v) = \omega$. И так для любой пары $(v,\omega) \in \phi$ существует состояние $f(x) = x' \in fX$ такое, что $S'_{x'\eta'}(v) = \omega$. Следовательно, fX образует подсистему системы S′ и f является эквивалентным преобразованием. □

Из первой части доказательства теоремы /2.13/ мы также получим

/2.14/ Предложение

Если $f: S \to S'$ - эквивалентное преобразование системы S в систему S′, то для любого $\eta' \in H_{S'}$, для которого ограничение $\eta'|fX$ есть допустимое выходное отображение подсистемы fS, существует такое $\eta \in H_S$, что $\eta = \eta' f$. □

/2.15/ Определение

Пусть X-пространство состояний системы S, $q \subseteq X \times X$ - отношение на X. Тогда q называется конгруэнцией в пространстве X, если q удовлетворяет следующим условиям:

1/ $(x,x) \in q$ для всех $x \in X$;

2/ если $(x_1, x_2) \in q$, то $(x_2, x_1) \in q$;

3/ если $(x_1, x_2) \in q$ и $(x_2, x_3) \in q$, то $(x_1, x_3) \in q$;

4/ если $(x_1, x_2) \in q$, то $(x_1 \alpha, x_2 \alpha) \in q$;

5/ если $(x_1, x_2) \in q$, то $(x_1 \beta(u), x_2 \beta(u)) \in q$ для всех $u \in U$;

6/ если $(x_1, x_2) \in q$ и $(x_1', x_2') \in q$, то $(x_1 . x_1', x_2 . x_2') \in q$.

Первые три условия являются условиями эквивалентности q на X, а остальные - условия замкнутости q относительно α, β и μ.

Если $f: X \to X'$ - гомоморфизм системы S в систему S', то ядром гомоморфизма f, обозначаемым через $\ker f$, называется отношение $f^{-1} . f$, т.е. $\ker f = f^{-1} . f$. Иными словами, $(x_1, x_2) \in \ker f$ тогда и только тогда, когда $f(x_1) = f(x_2)$. Очевидно, что $\ker f$ является конгруэнцией в пространстве X. Действительно, /1/, /2/ и /3/ проверяются тривиально; /4/ и /5/: если $(x_1, x_2) \in q$, то $f(x_1 \alpha) = f(x_1)\alpha' = f(x_2)\alpha' = f(x_2 \alpha)$, отсюда $(x_1 \alpha, x_2 \alpha) \in q$, аналогично $(x_1 \beta(u), x_2 \beta(u)) \in q$; /6/: если $(x_1, x_2) \in q$ и $(x_1', x_2') \in q$, то $f(x_1 . x_1') = f(x_1) . f(x_1') = f(x_2) . f(x_2') = f(x_2 . x_2')$, отсюда $(x_1 . x_1', x_2 . x_2') \in q$.

Если q-конгруэнция в X, то мы обозначим ее множество всех классов эквивалентности через X/q, и на нем определим операции α^*, β^* и μ^* следующим образом: $x^q \alpha^* = (x\alpha)^q$, $x^q \beta^*(u) = (x\beta(u))^q$ для всех $u \in U$ и $x_1^q . x_2^q = (x_1 . x_2)^q$, где x^q - класс эквивалентности состояния x. Тогда множество $X^* = X/q$ вместе с определенными на нем операциями α^*, β^* и μ^* называется фактор-пространством пространства состояний по конгруэнции q. Очевидно, что естественное отображение, которое обозначается через $\mathrm{nat}\, q: X \to X/q: x \mapsto x^q$, является гомоморфизмом пространства X в факторпространство $X^* = X/q$. Действительно, $\mathrm{nat}\,q(x\alpha) = (x\alpha)^q = x^q \alpha^* = \mathrm{nat}\,q(x)\alpha^*$, $\mathrm{nat}\,q(x\beta(u)) = (x\beta(u))^q = x^q \beta^*(u) = \mathrm{nat}\,q(x)\beta^*(u)$ для всех $u \in U$, $\mathrm{nat}\,q(x_1 . x_2) = (x_1 . x_2)^q = \mathrm{nat}\,q(x_1) . \mathrm{nat}\,q(x_2)$.

/2.16/ Теорема

Пусть $f: S \to S'$ - эквивалентное преобразование системы S в систему S' процесса ϕ с ядром $q = \ker f$. Тогда факторпространство $X^* = X/q$ пространства состояний X образует систему $S^* = \langle T, X^*, U, Y, \phi, \alpha^*, \beta^*, \mu^* \rangle$ процесса ϕ, естественное отображение $\theta = \mathrm{nat}\,q$ является эквивалентным преобразованием системы S на систему S^* и имеет место разложение $f = j\bar{f}\theta$, где j - взаимно однозначное преобразование системы fS в систему S' и $\bar{f}: X/q \to fX$ - изоморфное преобразование системы S^* в систему fS, иными словами, диаграмма эквивалентных преобразований

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta = \mathrm{nat}\,q"'] & S' \\ S^* \arrow[r, "\bar{f}"] & fS \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство

Сначала докажем, что для S^* существует допустимое выходное отображение. f - эквивалентное преобразование, следовательно, по определению /2.9/, fS есть подсистема системы S'. Тогда по /2.6/ каждое допустимое выходное отображение подсистемы fS может быть представлено в виде $\eta'|fX$, где $\eta' \in H_{S'}$. С другой стороны, по /2.14/ для η' существует $\eta \in H_S$ такое, что $\eta = \eta' f$. Определим выходное отображение для системы S^* следующим образом $\eta^*: X/q \to Y: x^q \mapsto \eta'(f(x))$. Покажем, что η^* является допустимым выходным отображением системы S^*. Действительно, для любой пары $(v, \omega) \in \phi$ существуют $x \in X$ и $x' \in fX$ такие, что $x' = f(x)$ и $S'_{x'\eta'}(v) = S'_{f(x)\eta'}(v) = \omega$. Тогда, пользуясь леммой /2.11/, имеем $S^*_{x^q\eta^*}(v)(t) = \eta^*(\lambda^*(x^q, v|[0,t))) = \eta^*(\lambda^*(\theta(x), v|[0,t))) = \eta^*(\theta(\lambda(x, v|[0,t)))) = \eta^*(\lambda(x, v|[0,t)))^q = \eta'(f(\lambda(x, v|[0,t)))) = \eta'(\lambda'(f(x), v|[0,t))) = S'_{f(x)\eta'}(v)(t)$.
Отсюда $S^*_{x^q\eta^*}(v) = S'_{f(x)\eta'}(v) = \omega$ и η^* - допустимое выходное отображение системы S^*. Следовательно, S^* является системой процесса ϕ, а $\theta = \mathrm{nat}\,q$ - эквивалентное преобразование системы S на систему S^*, так как для произвольного $x^q \in X^*$ $\theta(x) = x^q$. Очевидно, что $\bar{f}: X/q \to fX: x^q \mapsto f(x)$ является изоморфным преобразованием. Кроме того, с учетом /2.12/ справедливо разложение $f = j\bar{f}\theta$. □

Для каждого выходного отображения $\eta: X \to Y$ системы S мы также будем называть $\ker\eta = \eta^{-1} . \eta$ его ядром. В общем случае ядро выходного отображения является эквивалентностью на множестве состояний X, но не является конгруэнцией в пространстве состояний X. Мы будем называть конгруэнтным такое выходное отображение η, ядро $\ker\eta$ которого является конгруэнцией в пространстве состояний X.

/2.17/ Теорема

Пусть q - конгруэнция в пространстве состояний X системы S процесса ϕ и $X^* = X/q$ - факторпространство пространства X по конгруэнции q. Тогда восьмерка $S^* = \langle T, X^*, U, Y, \phi, \alpha^*, \beta^*, \mu^* \rangle$ является системой процесса ϕ тогда и только тогда, когда для системы S существует такое $\eta \in H_S$, ядро $\ker\eta$ которого содержит q, т.е. $q \subseteq \ker\eta$.

Доказательство

Пусть S^* - система процесса ϕ. Тогда очевидно, что $\theta = \mathrm{nat}\, q$ есть эквивалентное преобразование системы S на систему S^*. По /2.14/ для любого $\eta^* \in H_{S^*}$ существует $\eta \in H_S$ такое, что $\eta = \eta^* \theta$. Покажем, что $q \subseteq \ker \eta$. Действительно, если $(x, x') \in q$, то $\theta(x) = \theta(x')$ и $\eta(x) = \eta^*(\theta(x)) = \eta^*(\theta(x')) = \eta(x')$. Отсюда $(x, x') \in \ker \eta$.

Обратно, пусть существует $\eta \in H_S$ такое, что $q \subseteq \ker \eta$. Тогда можно определить выходное отображение $\eta^*: X/q \to Y: x^q \mapsto \eta(x)$, так как если $x^q = x'^q$, то $x^\eta = x'^\eta$ и $\eta^*(x^q) = \eta(x) = \eta(x') = \eta^*(x'^q)$. Покажем, что $\eta^* \in H_{S^*}$.

Действительно, для любой пары $(v, \omega) \in \phi$ существует $x \in X$ такое, что $S_{x\eta}(v) = \omega$. Тогда по лемме /2.11/ имеем $S^*_{x^q \eta^*}(v)(t) =$
$= \eta^*(\lambda^*(x^q, v|[0, t))) = \eta^*((\lambda(x, v|[0, t)))^q) = \eta(\lambda(x, v|[0, t))) =$
$= S_{x\eta}(v)(t)$. Отсюда $S^*_{x^q \eta^*}(v) = S_{x\eta}(v) = \omega$, т.е. $\eta^* \in H_S$. □

В дальнейшем конгруэнция q в пространстве состояний системы S процесса ϕ, для которой факторпространство $X^* = X/q$ образует систему процесса ϕ, будет называться динамической конгруэнцией.

/2.18/ Теорема

Пусть $f: S \to S'$ - гомоморфизм системы S в систему S' процесса ϕ. Тогда f является эквивалентным преобразованием тогда и только тогда, когда существует $\eta \in H_S$ такое, что $\ker f \subseteq \ker \eta$.

Доказательство

Пусть f - эквивалентное преобразование. Тогда по теореме /2.16/ $X/\ker f$ образует систему процесса ϕ. Отсюда по /2.17/ существует $\eta \in H_S$ такое, что $\ker f \subseteq \ker \eta$.

С другой стороны, если существует $\eta \in H_S$ такое, что $\ker f \subseteq \ker \eta$, то по /2.17/ $X/\ker f$ образует систему процесса ϕ. Но факторпространство $X^* = X/\ker f$ изоморфно пространству fX, следовательно, из /2.12/ fX образует подсистему fS системы S'. Таким образом, f является эквивалентным преобразованием. □

3. МИНИМАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В общем случае интуитивно под минимальной математической структурой динамических систем подразумевают такую структуру, пространство состояний которой нельзя уменьшить и применить эквивалентные преобразования, кроме взаимно однозначных преобразований, т.е. дальнейшие эквивалентные преобразования не приводят к уменьшению мощности пространства состояний. Сейчас мы сформулируем строгое понятие минимальных алгебраических динамических систем. Затем будем находить их необходимое и достаточное условие.

/3.1/ Определение

Алгебраическая динамическая система S процесса ϕ называется простой тогда и только тогда, когда она не содержит никакой собственной подсистемы, т.е. единственной ее подсистемой является сама S.

/3.2/ Определение

Алгебраическая динамическая система S процесса ϕ называется тупиковой тогда и только тогда, когда любое эквивалентное преобразование ее в другую систему процесса ϕ является взаимно однозначным преобразованием.

/3.3/ Определение

Алгебраическая динамическая система называется минимальной тогда и только тогда, когда она проста и тупикова.

В работе [1] мы пользовались пространством лингвистических состояний для доказательства теоремы алгебраической реализации произвольного дискретного динамического процесса. В этом параграфе мы будем пользоваться этим пространством для исследования минимальных алгебраических динамических систем. Напомним основные его понятия.

/3.4/ Определение

Пусть A - некоторое непустое множество и U - входное множество. Тогда $\Omega = U \sqcup \{\alpha, \mu\}$ называется областью динамических операторов и под множеством $X_\Omega(A)$ лингвистических состояний /состояний-слов/ области динамических операторов Ω, порожденным множеством A, мы будем подразумевать множество всех лингвистических состояний, определяемых приписыванием по обобщенному индуктивному определению:

1/ если $a \in A$, то a - лингвистическое состояние;

2/ если a - лингвистическое состояние, то $a\alpha$ - лингвистическое состояние;

3/ если a - лингвистическое состояние, то au - лингвистическое состояние для всех $u \in U$;

4/ если a и b - лингвистические состояния, то $ab\mu$ - лингвистическое состояние.

/3.5/ Определение

Пусть A - некоторое непустое множество и U - входное множество. Тогда под пространством лингвистических состояний /состояний-слов/ области динамических операторов $\Omega = U \sqcup \{\alpha, \mu\}$, порожденным множеством A, мы будем подразумевать ее множество лингвистических состояний $X_\Omega(A)$, порожденное множеством A со следующими операциями приписывания:

$\alpha : X_\Omega(A) \to X_\Omega(A) : a \mapsto a\alpha;$

$\beta(u) : X_\Omega(A) \to X_\Omega(A) : a \mapsto au$ для всех $u \in U;$

$\mu : X_\Omega(A) \times X_\Omega(A) \to X_\Omega(A) : (a, b) \mapsto ab\mu.$

/3.6/ Определение

Пусть ϕ - произвольный заданный дискретный динамический процесс. Тогда под универсальной алгебраической динамической системой процесса ϕ будем подразумевать систему $S<T, X_\Omega(A), U, Y, \phi, \alpha, \beta, \mu>$, где $X_\Omega(A)$ - пространство лингвистических состояний области динамических операторов $\Omega = U \sqcup \{\alpha, \mu\}$, порожденное множеством A, изоморфным множеству ϕ.

То, что для универсальной системы существует допустимое выходное отображение, было известно в [1] при доказательстве теоремы алгебраической реализации произвольного дискретного динамического процесса. Для удобства в дальнейшем мы еще обозначим универсальную систему процесса ϕ через S^ϕ, а соответствующее пространство состояний - через X^ϕ.

/3.7/ Теорема

Для любой системы S процесса ϕ существует эквивалентное преобразование универсальной системы S^ϕ этого процесса в систему S.

Доказательство

Для произвольного допустимого выходного отображения $\eta \in H_S$ системы S выбираем минимальное по включению множество I начальных состояний, т.е. для любой пары $(v, \omega) \in \phi$ существует состояние $x \in I$ такое, что $S_{x\eta}(v) = \omega$, и любое собственное подмножество множества I не удовлетворяет этому условию. Очевидно, что по мощности $|I| \leq |\phi| = |A|$. Построим произвольное отображение $h : A \to I$ множества A на множество I. Продолжим отображение h до отображения $f : X_\Omega(A) \to X$ следующим образом. Каждое состояние-слово x однозначно представимо в виде

$x = a_1 \dots a_M \quad (a_i \in U \sqcup \{\alpha, \mu\} \sqcup A).$

Положим $f(x) = a_1' \dots a_M'$,

где $$a' = \begin{cases} \beta(a), & \text{если } a \in U \\ a, & \text{если } a \in \{\alpha, \mu\} \\ h(a), & \text{если } a \in A. \end{cases}$$

Очевидно, что f(x) является единственным элементом пространства состояний X, который получен заменой $a \in A$ на h(a). Так как α и μ инвариантны при замене, мы имеем $f(x\alpha) = f(x)\alpha$ и $f(xx'\mu) = f(xx')\mu = f(x) f(x')\mu = f(x) . f(x')$ для всех $x, x' \in X_\Omega(A)$. Далее, имеем $f(xu) = f(x)\beta(u)$ для всех $x \in X_\Omega(A)$ и $u \in U$. Таким образом, f является гомоморфизмом

пространства $X_\Omega(A)$ в пространство X. Кроме того, $fX_\Omega(A)$ содержит I, так как h есть отображение на. Отсюда по /2.4/ ограничение $\eta | fX_\Omega(A)$ есть допустимое выходное отображение для образа $fX_\Omega(A)$. Таким образом, f является эквивалентным преобразованием универсальной системы S^ϕ в систему S. □

/3.8/ Теорема

Алгебраическая динамическая система S процесса ϕ является минимальной тогда и только тогда, когда любое эквивалентное преобразование $f : S^\phi \to S$ является эпиморфизмом /эквивалентным преобразованием на/ и ядро kerf - максимальной по включению динамической конгруэнцией на X^ϕ, т.е. любая другая конгруэнция q на X^ϕ, содержащая kerf, не образует системы процесса ϕ.

Доказательство

Пусть S - минимальная система процесса ϕ. Если $f : S^\phi \to S$ - произвольное эквивалентное преобразование универсальной системы S^ϕ в систему S, то образ fS^ϕ есть подсистема системы S. Однако система S проста, следовательно, $fS^\phi = S$. Покажем, что ядро kerf является максимальной по включению динамической конгруэнцией на X^ϕ. Предположим противное, т.е. что существует конгруэнция q, содержащая kerf, т.е. $\ker f \subset q$, и для фактор-пространства X^ϕ/q существует допустимое выходное отображение. Тогда отображение $F : X^\phi/\ker \to X^\phi/q : x^{\ker f} \mapsto x^q$ является эквивалентным преобразованием на. Действительно, если обозначим операции в $X^\phi/\ker f$ через α^*, β^* и μ^*, а в X^ϕ/q - через $\overline{\alpha^*}$, $\overline{\beta^*}$ и $\overline{\mu^*}$, то имеем $F(x^{\ker f}\alpha^*) = F(x\alpha)^{\ker f} = (x\alpha)^q = x^q\overline{\alpha^*} = F(x^{\ker f})\overline{\alpha^*}$, аналогично $F(x^{\ker f}\beta^*(u)) = F(x^{\ker f})\overline{\beta^*}(u)$ для всех $u \in U$ и $F(x_1^{\ker f} . x_2^{\ker f}) = F((x_1 . x_2)^{\ker f}) = (x_1 . x_2)^q = x_1^q . x_2^q = F(x_1^{\ker f}) . F(x_2^{\ker f})$. Очевидно, что F есть отображение на. Из /2.16/ пространство $X^\phi/\ker f$ изоморфно пространству X, так как $fS^\phi = S$. Если положим $g : X \to X^\phi/\ker f$ - изоморфизм пространства X в пространство $X^\phi/\ker f$, то по /2.10/ Fg есть эквивалентное преобразование системы S в систему, образуемую пространством X^ϕ/q. Но S - тупиковая система, следовательно, Fg - взаимно однозначное преобразование. Отсюда F - взаимно однозначное преобразование, следовательно, оно является изоморфным преобразованием и $q = \ker f$. Это противоречит предложению $\ker f \subset q$. Таким образом, kerf является максимальной по включению динамической конгруэнцией на X^ϕ.

И наоборот, пусть выполняются все условия и покажем, что система S минимальна, т.е. она проста и тупикова. Предположим, что S не проста. Тогда она содержит в себе собственную подсистему $S' \subset S$. По теореме /3.7/ существует эквивалентное преобразование $h : S^\phi \to S'$ универсальной системы S^ϕ в подсистему S'. Пусть $j : S' \to S$ - вложение подсистемы S' в систему S. По /2.12/ оно является эквивалентным преобразованием. Тогда очевидно, что jh является эквивалентным преобразованием системы S^ϕ

в систему S, которое не является эпиморфизмом. Это противоречит тому условию, что любое эквивалентное преобразование системы S^{ϕ} в систему S является эпиморфизмом. Таким образом, система S проста. Далее, пусть $g: S \to S'$ - произвольное эквивалентное преобразование системы S в любую систему S' процесса ϕ и $f: S^{\phi} \to S$ - эквивалентное преобразование системы S^{ϕ} в систему S. Тогда по /2.10/ $gf: S^{\phi} \to S'$ есть эквивалентное преобразование системы S^{ϕ} в систему S', так как f - эпиморфизм. Отсюда $\ker f \subseteq \ker gf$. Однако по условию $\ker f$ является максимальной по включению динамической конгруэнцией на X^{ϕ}, следовательно, $\ker f = \ker gf$ и g является вложением, т.е. взаимно однозначным преобразованием. Таким образом, система S тупикова. □

/3.9/ Следствие

Любая минимальная алгебраическая динамическая система S процесса ϕ является образом некоторого эквивалентного преобразования универсальной системы S^{ϕ}.

Доказательство

Из теоремы /3.7/ вытекает, что всегда существует эквивалентное преобразование системы S^{ϕ} в систему S. Тогда по теореме /3.8/ оно является эпиморфизмом. Следовательно, система S есть образ некоторого эквивалентного преобразования универсальной системы S^{ϕ}. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эквивалентные преобразования алгебраических динамических систем являются основными элементами теории алгебраической реализации дискретных динамических систем. С помощью их теории здесь получено необходимое и достаточное условие минимальной алгебраической динамической системы, реализующей произвольный дискретный динамический процесс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ву Суан Минь. ОИЯИ, 5-81-266, Дубна, 1981.
2. Калман Р., Фалб П.Л., Арбиб М.А. Очерки по математической теории системы. "Мир", М., 1971.
3. Математические методы в теории систем. Под ред. Ю.А.Журавлева. "Мир", М., 1979.
4. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: Математические основы. "Мир", М., 1978.
5. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. Физматгиз, М., 1962.
6. Кон П. Универсальная алгебра."Мир", М., 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 апреля 1981 года.