сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

5-81-266

Ву Суан Минь

ОБОБЩЕННАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1981

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее пятнадцатилетие алгебраические методы /методы абстрактной алгебры/ плодотворно проникли в самые различные области теории обработки информации и управления. Это объясняется алгебраической природой электронных цифровых вычислительных машин /1,2/, которые являются главными инструментами машинной обработки информации и управления сложными системами, а также современной тенденцией алгебраизации математических методов в этих областях исследования /3-6/. Математические модели объектов управления на ЭЦВМ и сами вычислительные машины являются дискретными динамическими системами. Следовательно, разработка алгебраических методов в теории дискретных динамических систем представляет собой весьма актуальную проблему /4-6/.

В настоящее время алгебраические структуры разработаны только для двух классов дискретных динамических систем. Это линейные системы и конечные автоматы. Однако на практике встречаются самые разнообразные дискретные динамические системы, которые не являются ни линейными системами, ни конечными автоматами. Например, в последнее десятилетие было обнаружено, что билинейные системы /7,8/ являются более адекватными для ряда физических объектов, чем линейные системы. Более того, в связи с интенсивным развитием системного подхода к обработке информации и управлению, в последнее десятилетие наблюдается тенденция обобщения математических структур динамических систем /5,9-11/.

Учитывая все это, автор данной работы предлагает и обосновывает обобщенную алгебраическую структуру для широких классов дискретных динамических систем на языке универсальной алгебры /12,13/.

Перед тем как сформулировать обобщенную структуру, мы упоминаем основные классы дискретных динамических систем, для которых мы хотим строить общую алгебраическую структуру.

1/ Линейные дискретные динамические системы. Они составляют класс систем, структура которых описывается системой уравнений

$$x_{t+1} = Ax_t + Cu_t$$
$$y_t = Dx_t, \qquad /1.1/$$

где $t=0,1,2,\ldots$; $x_t \in K^n$ - состояние системы в момент времени t; $u_t \in K^p$ - входное воздействие в момент времени t; $y_t \in K^q$ выходная величина в момент времени t; здесь n, p и q - положительные целые числа; A, C и D - постоянные матрицы размеров $n\times n$, $n\times p$ и $q\times n$ соответственно; K - некоторое фиксированное поле.

Линейные системы /1.1/ являются конечномерными. Теоретически они также могут быть бесконечномерными. В таком случае A, C и D являются бесконечномерными матрицами.

2/ Конечные автоматы. Они составляют класс конечных дискретных динамических систем, структура которых описывается упорядоченной шестеркой

$$\langle N, X, Y, Y, \delta, \eta\rangle$$
$$\delta: X\times U \to X \qquad /1.2/$$
$$\eta: X \to Y,$$

где $N=\{0,1,2,\ldots\}$; X - конечное множество состояний; U - конечный входной алфавит; Y - конечный выходной алфавит; δ - одношаговая переходная функция состояния и η - выходное отображение, т.е. $x_{t+1}=\delta(x_t,u_t)$ и $y_t=\eta(x_t)$; здесь $t\in N$, $x_t\in X$, $u_t\in U$ и $y_t\in Y$.

3/ Однородные билинейные дискретные динамические системы. Структура систем этого класса описывается системой уравнений

$$x_{t+1} = Ax_t + \sum_{i=1}^{i=p} u_{ti} B_i x_t \qquad /1.3/$$
$$y_t = Dx_t ,$$

где u_{ti} - i -ая координата входного воздействия u_t; $B_i (i=1,2,\ldots,p)$ - постоянные матрицы размера $n\times n$, а остальные те же самые, что в системе /1.1/. Системы данного класса также могут быть бесконечномерными.

4/ Неоднородные билинейные дискретные динамические системы. Класс этих систем представляет собой объединение свойств классов систем /1.1/ и /1.3/. Их структура имеет вид:

$$x_{t+1} = Ax_t + \sum_{i=1}^{i=p} u_{ti} B_i x_t + Cu_t , \qquad /1.4/$$
$$y_t = Dx_t .$$

Очевидно, что при $B_i=0$ /нулевые матрицы/ для всех $i=1,2,\ldots,p$ неоднородные билинейные системы превращаются в линейные системы /1.1/, а при $C=0$ они превращаются в однородные билинейные системы /1.3/.

5/ Общие дискретные динамические системы по вход-выходу. Они описывают внешнее поведение дискретных динамических систем, которое представляет собой подмножество

$$\phi \subseteq U^T \times Y^T \qquad /1.5/$$

декартового произведения множества U^T всевозможных отображений $v: T\to U$ из множества времени T во входное множество U и множества Y^T всевозможных отображений $\omega: T\to Y$ из T в выходное множество Y.

Здесь T изоморфно множеству натуральных чисел $N=\{0,1,2,\ldots\}$.

Отношение /1.5/ является общим для дискретных динамических систем всех классов. Действительно, для исследования любого физического объекта проводят эксперименты и наблюдения над ним. При этом каждый одиночный эксперимент /наблюдение/ над объектом может быть представлен в виде пары (v,ω) временных функций $v: T\to U$ и $\omega: T\to Y$. Тогда совокупность всех экспериментов над объектом представляет собой подмножество /1.5/. С другой стороны, каждая заданная математическая структура динамических систем также характеризуется некоторым внешним поведением в виде /1.5/. Для различия структуры динамических систем от их внешнего поведения в дальнейшем мы назовем отношение /1.5/ дискретным динамическим процессом.

В настоящее время дискретные динамические системы, описываемые структурами /1.1/-/1.4/, являются самыми распространенными. При этом структуры /1.1/, /1.3/ и /1.4/ являются основными объектами исследования в теории управления многомерными дискретными динамическими системами [3,7,8], а структура /1.2/ является математической моделью вычислительных машин [1,2]. Наконец, отношение /1.5/ возникает как основной объект в общей теории систем и нахождение его динамической реализации представляет большой интерес [4,10].

Ниже автором разрабатывается алгебраическая динамическая система, которая является обобщенной для всех структур /1.1/-/1.4/ и процессов /1.5/.

II. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Для строгой формулировки динамических систем нам следует отметить, что каждая динамическая система характеризуется и структурой, и поведением, так как каждая структура определяет различное поведение /динамические процессы/ в зависимости от входных воздействий и начальных состояний систем, а каждый динамический процесс может быть реализован различными динамическими структурами.

/2.1/ Определение

Алгебраической динамической системой называется упорядоченная восьмерка

$S = \langle T, X, U, Y, \phi, \alpha, \beta, \mu \rangle$,

где $T = N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ - множество моментов времени; X - множество состояний, являющееся основанием пространства состояний; U - входное множество; Y - выходное множество; $\phi \subseteq U^T \times Y^T$ - дискретный динамический процесс /внешнее поведение/, при этом назовем каждую функцию $v: T \to U$ входным воздействием, а $\omega: T \to Y$ - выходной реакцией; $\alpha: X \to X$ - преобразование множества X в себя, называемое внутренней динамикой; $\beta: U \to \mathcal{P}(X)$ - отображение входного множества U в множество всех преобразований $\mathcal{P}(X)$ множества X, называемое внешней динамикой; $\mu: X \times X \to X: (x, x') \mapsto x.x'$ - бинарная операция в пространстве состояний X, называемая динамической композицией; операции α, β и μ определяют одношаговую переходную функцию состояния в пространстве состояний X:

$$x_{t+1} = x_t\alpha . x_t\beta(u_t)$$

для всех $x_t \in X$, $u_t \in U$ и $t \in T$, для которой существует по крайней мере одно допустимое выходное отображение, т.е. такое $\eta: X \to Y$, что для каждой пары $(v, \omega) \in \phi$ существует начальное состояние $x \in X$, при котором система S преобразует входное воздействие v в выходную реакцию ω.

Замечания:

1. Заданный динамический процесс $\phi \subseteq U^T \times Y^T$ полностью определяет множество допустимых входных воздействий V и множество допустимых выходных реакций W динамической системы S, а именно:

а/ $v \in V$ тогда и только тогда, когда существует функция $\omega \in Y^T$ такая, что $(v, \omega) \in \phi$;

б/ $\omega \in W$ тогда и только тогда, когда существует функция $v \in U^T$ такая, что $(v, \omega) \in \phi$.

2. Для точного представления алгебраической динамической системы /2.1/ нам нужно еще дать строгое определение допустимого выходного отображения, которое мы будем формулировать ниже. Для каждой динамической системы S мы будем обозначать множество всех ее допустимых выходных отображений через H_S.

3. В общем случае мы не накладываем никакого условия на динамический процесс ϕ, тем самым и на множество допустимых входных воздействий V, и на множество выходных реакций W.

4. Для удобства в одношаговой переходной функции состояния преобразования множества X в себя / α и $\beta(u)$ / приписываются справа от состояния x.

5. Переходная функция состояния динамической системы $\lambda: X \times U^T \times T \to X$ полностью определяется одношаговой переходной функцией состояния с помощью принципа индукции для натуральных чисел:

$$\begin{aligned} \lambda(x, v, 0) &= \lambda(x, v|[0,0)) = x \\ \lambda(x, v, 1) &= \lambda(x, v|[0,1)) = x\alpha . x\beta(v(0)) \\ \lambda(x, v, t+1) &= \lambda(x, v|[0,t+1)) = \lambda(\lambda(x, v|[0,t)), v|[t,t+1)) \\ &= \lambda(x, v|[0,t))\alpha . \lambda(x, v|[0,t))\beta(v(t)) \end{aligned} \qquad /2.2/$$

для всех $t \in T$, где $v|[0,t)$ - ограничение временной функции v на интервал $[0,t)$.

Сейчас мы устанавливаем связь между входными воздействиями и выходными реакциями.

/2.3/ Определение

Пусть дана алгебраическая динамическая система

$S = \langle T, X, U, Y, \phi, \alpha, \beta, \mu \rangle$, $x \in X$

и $\eta: X \to Y$ - выходное отображение. Тогда отображением вход-выход системы S при начальном состоянии x и выходном отображении η называется отображение $S_{x\eta}: U^T \to Y^T$, определяемое соотношением

$$S_{x\eta}(v)(t) = \eta(\lambda(x, v|[0,t)))$$

для любого $v \in U^T$ и $t \in T$.

С помощью отображения вход-выход мы можем дать строгое определение понятия допустимого выходного отображения.

/2.4/ Определение

Пусть дана алгебраическая динамическая система $S = \langle T, X, U, Y, \phi, \alpha, \beta, \mu \rangle$ и $\eta: X \to Y$ - произвольное выходное отображение. Тогда отображение η является допустимым выходным отображением системы S, т.е. $\eta \in H_S$ тогда и только тогда, когда для каждой пары $(v, \omega) \in \phi$ существует $x \in X$ такое, что $S_{x\eta}(v) = \omega$.

Итак, алгебраическая динамическая система полностью определена. Ясно, что ее пространство состояний представляет собой некоторую Ω -алгебру, область операторов Ω которой состоит из унарной операции α, унарных операций $\beta(u)$ для всех $u \in U$ и бинарной операции μ, т.е. $\Omega = U \sqcup \{\alpha, \mu\}$ /где $\sqcup$ - свободное объединение/.

Сейчас мы покажем, что дискретные динамические системы /1.1/-/1.4/ являются алгебраическими динамическими системами.

1. Линейные дискретные динамические системы. Если в /2.1/ $X = K^n$, $U = K^p$, $Y = K^q$, $\alpha : x \mapsto Ax$, $\beta(u) : x \mapsto Cu$ для всех $u \in U$ и $\mu = +$ - сложение векторов. Тогда получим алгебраическую динамическую систему $S = \langle T, K^n, K^p, K^q, \phi, \alpha, \beta, + \rangle$, одношаговая переходная функция состояния которой имеет вид

$$x_{t+1} = x_t \alpha + x_t \beta(u_t) = Ax_t + Cu_t,$$

т.е. совпадает с /1.1/. Итак, линейная дискретная динамическая система представляет собой алгебраическую динамическую систему, в которой множество состояний, входное множество и выходное множество являются векторными пространствами над фиксированным полем K, внутренняя динамика - линейным преобразованием векторного пространства состояний K^n, внешняя - линейным преобразованием входного векторного пространства K^p в векторное пространство операций - констант в пространстве состояний K^n, которое совпадает с K^n, а динамическая композиция является операцией сложения векторов в пространстве состояний K^n.

2. Конечные автоматы. Если в /2.1/ X, U и Y - конечные множества, $\alpha = I$ - тождественное отображение пространства состояний X в себя, $\beta(u) : x \mapsto \delta(x, u)$ для всех $u \in U$ /где $\delta : X \times U \to X$ / и $\mu : (x, x') \mapsto x'$, то получим алгебраическую динамическую систему $S = \langle T, X, U, Y, \phi, I, \beta, \mu \rangle$, одношаговая переходная функция состояния которой имеет вид:

$$x_{t+1} = x_t I . x_t \beta(u_t) = x_t \beta(u_t) = \delta(x_t, u_t),$$

т.е. совпадает с /1.2/. Итак, конечный автомат представляет собой конечную алгебраическую динамическую систему, в которой внутренняя динамика есть тождественное отображение I пространства состояний в себя, а динамическая композиция полностью определена вторым элементом, т.е. $\mu(x, x') = x'$ для всех $(x, x') \in X \times X$.

В изложенной выше структуре конечного автомата динамическая композиция является тривиальной бинарной операцией. Однако в полугрупповом конечном автомате [6] она нетривиальна. Действительно, пусть $\phi : U^* \to Y$ - отображение вход-выход конечного автомата, здесь U^* - свободная полугруппа над U с единичным элементом, являющимся пустой последовательностью Λ. Пусть далее $q \subseteq U^* \times U^*$ - отношение эквивалентности Майхилла на U^*, т.е. $(v, v') \in q$ тогда и только тогда, когда $\phi(v_1 v v_2) = \phi(v_1 v' v_2)$ для всех $v_1, v_2 \in U^*$. Обозначим класс эквивалентности последовательности v через v^q для всех $v \in U^*$ и построим алгебраическую динамическую систему

$$S = \langle T, U^*/q, U, Y, \phi, I, \beta, \mu \rangle,$$

где $X = U^*/q$ - фактормножество множества U^* по отношению q; $\beta : U \to U^*/q : u \mapsto u^q$ - естественное отображение множества U в фактормножество U^*/q; $\mu : U^*/q \times U^*/q \to U^*/q : (v_1^q, v_2^q) \mapsto (v_1 v_2)^q$ - - умножение классов эквивалентности в U^*/q, здесь $v_1 v_2$ - склеивание последовательностей v_1 и v_2. Очевидно, что динамическая композиция μ представляет собой полугрупповую операцию в пространстве состояний $X = U^*/q$, так как $((v_1^q, v_2^q), v_3^q) = (v_1 v_2 v_3)^q = (v_1^q, (v_2^q, v_3^q))$ для любой тройки $v_1, v_2, v_3 \in U^*$. Итак, полугрупповой конечный автомат представляет собой алгебраическую динамическую систему, в которой дискретный динамический процесс является отображением вход-выход $\phi : U^* \to Y$, пространство состояний есть фактормножество U^*/q множества U^* по отношению эквивалентности Майхилла q, внутренняя динамика есть тождественное отображение I пространства состояний $X = U^*/q$ в себя, внешняя динамика β - естественное отображение входного множества U в фактормножество U^*/q, а динамическая композиция μ - полугрупповая операция, представляющая собой умножение классов эквивалентности в U^*/q. При этом одношаговая переходная функция состояний имеет вид

$$v_{t+1}^q = v_t^q I . v_t^q \beta(u_t) = v_t^q . u_t^q = (v_t u_t)^q .$$

Легко показать, что выходное отображение $\eta : U^*/q \to Y : v^q \mapsto \phi(v)$ представляет собой допустимое выходное отображение построенной системы S при начальном состоянии, являющемся классом эквивалентности Λ^q пустой последовательности Λ. Действительно, для любого $v \in U^*$ имеем $S_{\Lambda^q \eta}(v)(t) = \eta(\lambda(\Lambda^q, v^q)) = \eta(v^q) = \phi(v)$ для всех $t \geqq \ell(v)$, где $\ell(v)$ - длина последовательности v.

3. Однородные билинейные дискретные динамические системы. Если в /2.1/ $X = K^n$, $U = K^p$, $Y = K^q$, $\alpha : x \mapsto Ax$, $\beta : K^p \to \mathrm{End}(K^n)$ - линейное преобразование векторного пространства K^p в векторное пространство $\mathrm{End}(K^n)$ линейных преобразований векторного пространства K^n в себя, при этом $\beta(u) : x \mapsto \sum_{i=1}^{i=p} u_i B_i x$ для всех $u \in U$ и $\mu = +$ - сложение векторов, то получим алгебраическую динамическую систему $S = \langle T, K^n, K^p, K^q, \phi, \alpha, \beta, + \rangle$, одношаговая переходная функция состояния которой принимает вид

$$x_{t+1} = x_t \alpha + x_t \beta(u_t) = Ax_t + \sum_{i=1}^{i=p} u_{ti} B_i x_t,$$

т.е. совпадает с /1.3/. Таким образом, однородная билинейная дискретная динамическая система представляет собой алгебраическую динамическую систему, в которой множество состояний, входное множество и выходное множество являются векторными пространствами над фиксированным полем K, внутренняя динамика является линейным преобразованием векторного пространства состояний K^n, внешняя динамика является линейным преобразованием входного векторного пространства K^p в векторное пространство $\mathrm{End}(K^n)$ линейных преобразований векторного пространства состояний K^n, а динамическая композиция является операцией сложения векторов в пространстве состояний K^n.

4. Неоднородные билинейные дискретные динамические системы. Они отличаются от линейных систем и однородных билинейных систем только внешней динамикой, которая имеет вид $\beta(u): x \mapsto \mapsto \sum_{i=1}^{i=p} u_{ti} B_i x + Cu$ для всех $u \in U$. Тогда получим алгебраическую динамическую систему $S = \langle T, K^n, K^p, K^q, \phi, \alpha, \beta, + \rangle$, одношаговая переходная функция состояния которой равна

$$x_{t+1} = x_t \alpha + x_t \beta(u_t) = Ax_t + \sum_{i=1}^{i=p} u_{ti} B_i x_t + Cu_t,$$

т.е. совпадает с /1.4/. Учитывая тот факт, что неоднородная билинейная система является обобщенной по отношению к однородной билинейной системе и линейной системе, мы разложим ее внешнюю динамику β на две составляющие - мультипликативную, которая представляет собой линейное преобразование $\sigma: K^p \to \mathrm{End}(K^n): u \mapsto \sum_{i=1}^{i=p} u_i B_i$, и аддитивную составляющую, которая представляет собой линейное преобразование $\gamma: K^p \to K^n: u \mapsto Cu$. Тогда $\beta(u) = \sigma(u) + \gamma(u)$.

Итак, все дискретные динамические системы /1.1/-/1.4/ являются алгебраическими динамическими системами. Нам остается доказать, что структура алгебраической динамической системы, определенной в /2.1/, является универсальной в смысле реализации произвольного дискретного динамического процесса /1.5/. С этой целью сначала мы конструируем так называемое пространство лингвистических состояний, которое служит не только нашему доказательству, но и дальнейшей разработке элементов теории реализации дискретных динамических систем.

/2.5/ Определение

Пусть A - некоторое непустое множество и U - входное множество. Тогда $\Omega = U \sqcup \{\alpha, \mu\}$ называется областью динамических операторов и под множеством $X_\Omega(A)$ лингвистических состояний /состояний-слов/ области динамических операторов Ω, порожденным множеством A, мы будем подразумевать множество всех лингвистических состояний, определяемых приписыванием по обобщенному индуктивному определению:

1/ если $a \in A$, то a - лингвистическое состояние;
2/ если a - лингвистическое состояние, то $a\alpha$ - лингвистическое состояние;
3/ если a - лингвистическое состояние, то au - лингвистическое состояние для всех $u \in U$;
4/ если a и b - лингвистические состояния, то $ab\mu$ - лингвистическое состояние.

/2.6/ Определение

Пусть A - некоторое непустое множество и U - входное множество. Тогда под пространством лингвистических состояний /состояний-слов/ области динамических операторов $\Omega = U \sqcup \{\alpha, \mu\}$, порожденным множеством A, будем подразумевать ее множество лингвистических состояний $X_\Omega(A)$, порожденное множеством A со следующими операциями приписывания:

$\alpha: X_\Omega(A) \to X_\Omega(A): a \mapsto a\alpha$;

$\beta(u): X_\Omega(A) \to X_\Omega(A): a \mapsto au$ для всех $u \in U$;

$\mu: X_\Omega(A) \times X_\Omega(A) \to X_\Omega(A): (a, b) \mapsto ab\mu$.

Сейчас переходим к основному утверждению.

/2.7/ Теорема

Для любого дискретного динамического процесса $\phi \subseteq U^T \times Y^T$ существует алгебраическая динамическая система $S = \langle T, X, U, Y, \phi, \alpha, \beta, \mu \rangle$, удовлетворяющая аксиомам в /2.1/. Иными словами, структура алгебраической динамической системы, определяемой в /2.1/, является универсальной в смысле реализации произвольного дискретного динамического процесса $\phi \subseteq U^T \times Y^T$.

Доказательство

Для произвольного заданного дискретного динамического процесса $\phi \subseteq U^T \times Y^T$ выбираем некоторое множество A, изоморфное ϕ и $\theta: \phi \to A$ - изоморфизм между ними. Покажем, что восьмерка $S = \langle T, X_\Omega(A), U, Y, \phi, \alpha, \beta, \mu \rangle$, где α, β и μ - операции приписывания в пространстве лингвистических состояний $X_\Omega(A)$, является алгебраической динамической системой, реализующей ϕ. Тогда надо доказать, что для нее существует допустимое выходное отображение. В пространстве $X_\Omega(A)$ для каждой пары $(v, \omega) \in \phi$ обозначим множество достижимых состояний из $\theta(v, \omega)$ под входным воздействием v через $\Gamma_{\theta(v,\omega)}$, т.е. $\Gamma_{\theta(v,\omega)}$ есть множество состояний $x \in X_\Omega(A)$ таких, что для каждого из них существует момент $t \in T$ такой, что $x = \lambda(\theta(v,\omega), v|[0,t))$. Очевидно, что если $t \neq t'$, то $\lambda(\theta(v,\omega), v|[0,t)) = x \neq x' = \lambda(\theta(v,\omega), v|[0,t'))$, и если $(v,\omega) \neq (v',\omega')$ то $\Gamma_{\theta(v,\omega)} \cap \Gamma_{\theta(v',\omega')} = \emptyset$. Далее, положим $\Gamma_\phi = \bigcup_{(v,\omega)\in\phi} \Gamma_{\theta(v,\omega)}$ и построим отображение $\chi : \Gamma_\phi \to Y : \lambda(\theta(v,\omega), v|[0,t)) \mapsto \omega(t)$. Тогда любое расширение χ до выходного отображения $\eta : X_\Omega(A) \to Y$ пространства $X_\Omega(A)$ в Y является допустимым выходным отображением для восьмерки $S = \langle T, X_\Omega(A), U, Y, \phi, \alpha, \beta, \mu \rangle$, так как для любой пары $(v,\omega) \in \phi$ существует состояние $\theta(v,\omega) \in X_\Omega(A)$, для которого $S_{\theta(v,\omega)}(v) = \omega$. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная и обоснованная в этой работе алгебраическая динамическая система является универсальной для реализации произвольного дискретного динамического процесса. Она представляет собой обобщенную структуру известных классов дискретных динамических систем, таких, как линейные дискретные динамические системы, конечные автоматы и билинейные /однородные и неоднородные/ дискретные динамические системы. Следовательно, алгебраическая динамическая система служит общей математической структурой для исследования различных задач в теории дискретных динамических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра, языки, программирование. "Наукова Думка", Киев, 1974.
2. Лифшиц В.Н., Садовский Л.Е. УФН, 1972, т.26, вып.3.
3. Kalman R.E. Lecture on Controlobility and Observability. Centro Inter. Matematico, Bologna, Italy, 1968.
4. Калман Р., Фалб П.Л., Арбиб М.А. Очерки по математической теории систем. "Мир", М., 1971.
5. Anderson B.D.O., Arbib M.A., Manse E.G. Journ. of the Franklin Inst., 1976, vol.301, pp.497-508.
6. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп. Под ред. М.Арбиба. "Статистика", М., 1975.
7. Theory and Application of Variable Systems. Ed. by R.Mohler and A.Ruberti. Academic Press, New York, 1972.
8. d'Alessandro P. Ricerche di Aitomatica, 1972, vol.3, No.2.
9. Математические методы в теории систем. Под ред. Ю.А.Журавлева. "Мир", М., 1979.

10. Масарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. "Мир", М., 1978.
11. Кухтенко А.И. В сб.: Кибернетика и вычислительная техника". "Наукова Думка", Киев, 1980.
12. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. Физматгиз, М., 1962.
13. Кон П. Универсальная алгебра. "Мир", М., 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 апреля 1981 года.