ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

5-80-140

Нгуен Хыу Монг

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Специальность: 01.01.07. - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1980

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор Е.П.ЖИДКОВ

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
профессор П.Н.ЗАИКИН

кандидат физико-математических наук
старший научный сотрудник В.И.ЖУРАВЛЕВ

Ведущее научно-исследовательское учреждение –
Институт физики высоких энергий, г.Серпухов

Автореферат разослан "___" _______________ 1980 г.

Защита диссертации состоится "____" ___________ 1980 г. в "___" часов на заседании Ученого Совета Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ, г.Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук Ив. З.М.ИВАНЧЕНКО

Общая характеристика работы

Актуальность

Вопросы, связанные с решением нелинейных уравнений, приобрели в современной физике большое значение. Многие важные физические задачи приводятся к исследованию нелинейных уравнений. Случаи, когда можно найти точные решения, довольно редки. Поэтому успех в развитии того или иного физического направления во многом зависит от наличия эффективных методов приближенного решения соответствующих нелинейных уравнений.

Так, уравнения типа Чу-Лоу и близкие к ним уравнения $\pi\pi$ - рассеяния, описывающие сильные взаимодействия соответственно π - мезонов и пионов, являются нелинейными сингулярными интегральными уравнениями. Со времени своего возникновения[1] эти важные в теории дисперсионных соотношений уравнения стали объектом всестороннего исследования многих математиков и физиков[2-6]. Они остаются актуальными и в настоящее время. Многие математические вопросы, связанные с решением этих уравнений, далеки от завершения. Это особенно относится к численным методам приближенного решения.

Актуальными являются также вопросы повышения точности приближенных решений нелинейных задач при численных расчетах на ЭВМ.

Цель работы

Диссертация посвящена вопросам приближенного решения широкого класса нелинейных сингулярных интегральных уравнений, к которому приводятся уравнения типа Чу-Лоу и $\pi\pi$ - рассеяния. Исследуются вопросы существования и единственности решения, сходимости и устойчивости итерационных процессов, а также повышения точности приближенных решений. Целью работы являлись также разработка эффективных численных алгоритмов итерационных процессов и расчет с их помощью конкретных физических моделей на ЭВМ.

Научная новизна

Впервые проведено строгое математическое исследование вопросов, связанных с численным решением названных выше уравнений. При этом установлены области существования и единственности решения; доказаны сходимость и устойчивость итерационных процессов приближенного решения; получено асимптотическое разложение приближенных решений, позволяющее ускорить сходимость разностных схем.

Практическая ценность

I. Построен эффективный алгоритм приближенного решения уравнения типа Чу-Лоу с произвольной матрицей кроссинг-симметрии для широкой области значений константы связи.

2. Полученные приближенные решения уравнений $\pi\pi$-рассеяния при различных значениях константы связи дали возможность выяснить качественное поведение точного решения, что практически очень важно при физическом исследовании рассеяния пионов.

3. Полученное в диссертации асимптотическое разложение решений позволило значительно повысить точность приближенных решений без существенного увеличения машинного времени и памяти ЭВМ. При этом численные расчеты двухрядной системы уравнений Чу-Лоу и $\pi\pi$ – рассеяния показали высокую эффективность этого метода.

4. Установленные в диссертации общие теоремы о существовании и единственности решения дают менее ограничительные, по сравнению с ранее известными, условия на модули решения и константу связи, которая является важной числовой характеристикой уравнений типа Чу-Лоу.

Апробация работы

Работы, положенные в основу диссертации, докладывались на семинарах ОИЯИ, МИБАН(София), ВЦ МГУ.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 6 работ, в том числе в ЖВМ и МФ и в сообщениях ОИЯИ.

Объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и приложения и содержит III страниц машинописного текста, включая 9 таблиц, I рисунок и список литературы из 93 пунктов.

Содержание работы

Во введении даны краткое изложение основных результатов диссертации и обзор литературы по рассмотренным здесь вопросам.

В главе I рассматриваются вопросы существования и единственности решения широкого класса нелинейных сингулярных интегральных уравнений.

В § I исследуется уравнение

$$x(t) = \Phi(t, x(t), \lambda + Fx(t)), \tag{I}$$

где

$$Fx(t) = Sx(t) + K\dot{x}(t).$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_N(t))$ $(N \geqslant 1)$ – искомая вектор-функция, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ – заданный вектор параметров,

$$Sx(t) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{x(\tau)\,d\tau}{\tau - t}, \quad t \in \Gamma$$

– так называемый сингулярный оператор типа Коши, Γ – некоторая кривая Ляпунова, а $Kx(t)$ – вполне непрерывный оператор пространства суммируемых со степенью ρ $(0 < \rho < \infty)$ вектор-функций.

Доказана следующая (обозначения соответствуют диссертации):

Теорема I

I. Пусть R, λ таковы, что

$$f_\lambda + [R_1^\circ(R) + R_2^\circ(R)F_\nu]R \le R, \tag{2}$$

тогда уравнение (I) имеет в шаре

$$S_R = \{x(t) \mid x(t) \in H_{N,0}^\nu(\Gamma),\ \|x\| \le R\}$$

хотя бы одно решение.

2. Если

$$R_1(R) + R_2(R)F_L < 1, \tag{3}$$

то уравнение (I) имеет в S_R не более одного решения.

3. При выполнении неравенства (2) и

$$R_1^\nu(R) + R_2^\nu(R)F_\nu < 1 \tag{4}$$

уравнение (I) имеет в S_R единственное решение $x^*(t)$, которое может быть получено методом простой итерации.

Неравенства (2)-(4) есть неявные ограничения на норму решения R и константу λ.

В § 2 исследуются уравнения Чу-Лоу, описывающие рассеяния π -мезонов

$$h_\alpha(z) = \frac{\lambda_\alpha}{z} + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \rho(\omega)\left[\frac{|h_\alpha(\omega)|^2}{\omega - z} + \sum_{\beta=1}^{N} C_{\alpha\beta}\frac{|h_\beta(\omega)|^2}{\omega + z}\right]d\omega, \tag{5}$$

$\alpha = 1, \dots, N;$

где $h_1(z), \dots, h_N(z)$ – искомые аналитические функции, имеющие в нуле полюс первого порядка с заданными вычетами λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_N$ соответственно, $\lambda_\alpha = -\sum_{\beta=1}^{N} C_{\alpha\beta}\lambda_\beta$, $\alpha = 1, \dots, N$.
Заданная функция $\rho(\omega)$, так называемая функция обрезания, предполагается непрерывной по Гельдеру. Квадратная матрица $C = (C_{\alpha\beta})$ называется матрицей перекрестной симметрии ($C^2 = E$, E – единичная матрица).

Показано, что для решения системы (5) достаточно найти мнимые части $\Im m\, h_\alpha(\omega)$ функций $h_\alpha(z)$ на разрезе $[1, \infty)$. В результате несложных преобразований для функций

$$v_\alpha(t) = \Im m\, h_\alpha(t)/t, \quad t = 1/\omega, \quad t \in [0, 1]$$

имеются следующие уравнения

$$v_\alpha(t) = t\rho(t)\left[v_\alpha^2(t) + U_\alpha^2(t)\right], \tag{6}$$

где

$$U_\alpha(t) = \lambda_\alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{v_\alpha(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \sum_{\beta=1}^{N} C_{\alpha\beta}\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{v_\beta(\tau)\,d\tau}{\tau + t},$$

$\alpha = 1, \dots, N.$

Уравнения (6) с произвольной матрицей C, любыми вектором λ и непрерывной по Гельдеру функцией обрезания $\rho(t)$ называются уравнениями типа Чу-Лоу. Эти уравнения приводятся к виду (I) со следующей функцией $\Phi(t, x, y)$:

$$\Phi(t, x, y) = t\rho(t)[x^2 + y^2],$$

где вектор-функция $y(t)$ может быть определена формулой

$$y(t) = \lambda + Sx(t) + CS_+x(t) \equiv \lambda + Fx(t),$$

$$Sx(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x(\tau)\,d\tau}{\tau - t}, \quad S_+x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x(\tau)\,d\tau}{\tau + t}.$$

Здесь $x^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_N^2)$.

Таким образом, для уравнений типа Чу-Лоу (6) справедлива при некоторых ограничениях на R, λ теорема I. Более того, благодаря свойству неотрицательности решения уравнений (6) удалось ослабить ограничения (2)-(4) на константы R и λ. В частности, для λ получены оценки, менее ограничительные по сравнению с ранее известными.

В § 3 уравнения $\pi\pi$- рассеяния с одним вычитанием

$$h_\alpha(z) = \lambda_\alpha + 3h_2(0) + \frac{z}{\pi}\int_1^\infty \frac{\rho(\omega)}{\omega}\left[\frac{|h_\alpha(\omega)|^2}{\omega - z} - \sum_{\beta=1}^{3} C_{\alpha\beta}\frac{|h_\beta(\omega)|^2}{\omega + z}\right]d\omega,$$

$\alpha = 1, 3;$

$$h_2(z) = \frac{z-1}{\pi}\int_1^\infty \rho(\omega)\left[\frac{|h_2(\omega)|^2}{(\omega - z)(\omega - 1)} - \sum_{\beta=1}^{3} C_{2\beta}\frac{|h_\beta(\omega)|^2}{(\omega + z)(\omega + 1)}\right]d\omega, \tag{7}$$

$$\rho(\omega) = (1+\omega)^{-1/2}(\omega - 1)^{1/2}, \quad \omega \geqslant 1,$$

$$C = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6 & -54 & 30 \\ -2 & 9 & 5 \\ 6 & 27 & 3 \end{pmatrix}$$

приводятся известным из § 2 способом к уравнениям типа (I). Установлено, что при каждом малом λ существует так называемая адиабатическая ветвь решений этих уравнений.

В главе II исследованы вопросы приближенного решения в метрическом пространстве X широкого класса операторных уравнений

$$x = Ax, \tag{I'}$$

включающего уравнения типа Чу-Лоу и $\pi\pi$-рассеяния.

В § I доказаны сходимость и устойчивость разностных схем

$$x_n = A_n x_n,$$

аппроксимирующих уравнение (I') со сжимающими операторами A_n.

В § 2 для приближенного решения уравнений типа Чу-Лоу рассматриваются разностные задачи

$$v_n(t_j) = t_j \rho(t_j)\left[v_n^2(t_j) + u_n^2(t_j)\right], \qquad (8)$$

где $\quad t_j \in \Omega_n = \{t_i \mid t_i = ih,\ i = 0,1,\dots,n;\ \ h = n^{-1}\}$,

$$u_n(t_j) = \lambda + B_n^1 v_n(t_j) + C B_n^2 v_n(t_j).$$

Здесь $B_n^1 v_n(t_j)$, $B_n^2 v_n(t_j)$ – квадратурные формулы при каждой точке $t_j \in \Omega_n$ для Sv и S_+v соответственно, n – число узлов сетки Ω_n.

Доказано, что при каждом фиксированном n разностная задача (8) имеет единственное решение $v_n^*(t_j)$, $t_j \in \Omega_n$, которое может быть получено методом простой итерации. Для построения приближенных решений уравнений типа Чу-Лоу (6) применяется известный параболический сплайн $\bar\varphi_n$. Справедлива следующая

<u>Теорема 2</u>

Пусть $\rho(t)$ – m раз непрерывно дифференцируема, причем $\rho^{(m)}(t)$ непрерывна по Гельдеру. Тогда

I) процесс нахождения v_n^* (каркасов) сходится и устойчив:

$$\tau_m \equiv \|\varphi_n v^* - v_n^*\|_{C,\Omega_n} \le \begin{cases} M_1 n^{-\nu}\ln 2n + \|C\| M_2 (2n+1)^{-\nu}, & m = 0\\ M_3 (2n-1)^{-m-\nu+1} + \|C\| M_4 (2n+1)^{-m-\nu}, & m \ge 1,\end{cases}$$

(φ_n – оператор простого сноса, $\|\cdot\|_{C,\Omega_n}$ – равномерная норма на Ω_n);

2) процесс построения приближенных решений сходится и устойчив:

$$\|v^{(n)} - v^*\|_C \le \begin{cases} M_5 n^{-\nu} + \|\bar\varphi_n\|\tau_0, & m = 0,\\ M_6 n^{-m} + \|\bar\varphi_n\|\tau_m, & m \ge 1,\end{cases}$$

($\|\cdot\|_C$ – равномерная норма пространства непрерывных вектор-функций).

Из этой теоремы видно, что быстрота сходимости итерационных процессов зависит от степени гладкости функции обрезания.

Были рассчитаны на ЭВМ приближенные решения уравнения (6) с трехрядной матрицей Чу-Лоу

$$C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 16\\ -2 & 7 & 4\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

и функцией обрезания

$$\rho(t) = \frac{k^3}{12\pi}\exp\left(-\frac{k^2}{49M}\right),\quad k = \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)^{1/2},\quad 0 \le t \le 1,$$

(M – масса мезона, равная I) для различных значений константы связи λ, вплоть до значения $\|\lambda\| = 7.8$.

В § 3 уравнения (7), описывающие рассеяния пионов, заменой переменных $\tau = \cos\varphi$, $t = \cos\psi$ преобразуются к виду, позволяющему получить приближенные решения с точностью порядка $O(h^2)$ ($h = \pi/2n$, n – число узлов). Получены приближенные решения для различных значений константы связи вплоть до значения 0.2, близкого к предельному.

Точность расчетов, а следовательно, эффективность предложенных алгоритмов приближенного решения уравнений (6) или (7) проиллюстрирована на физической модели

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \rho(t) = t(1-t^2)^{1/2},\quad 0 \le t \le 1, \qquad (9)$$

имеющей точное решение для всех λ таких, что $0 \le \|\lambda\| < 2$. Зависимость максимальной погрешности $\Delta(h)$ от шага сетки имеет следующий вид:

h	20^{-I}	40^{-I}	80^{-I}	160^{-I}
$\Delta(h)$	$1{,}365\cdot 10^{-5}$	$3{,}644\cdot 10^{-6}$	$9{,}626\cdot 10^{-7}$	$2{,}461\cdot 10^{-7}$

Так как функция обрезания в точной модели (9) имеет такую же особенность, что и функция $\rho(t) = (1-t)^{1/2}(1+t)^{-1/2}$ в уравнениях $\pi\pi$-рассеяния, то полученные приближенные решения уравнений (7) для различных значений λ отличаются от точных на величину порядка $O(10^{-7})$.

В третьей главе диссертации показана возможность применения линейной экстраполяции Ричардсона /9-I2/ для повышения точности приближенных решений уравнений (6) и (7).

В § I для уравнений типа Чу-Лоу (6) доказана следующая

Теорема 3

Пусть $v^*(t)$ – решение уравнения (6), а v^*_n – решение разностной задачи, аппроксимирующей уравнение (6) с помощью квадратурных формул типа трапеций на сетке Ω_n. Тогда

$$v^*_n(t_j) = v^*(t_j) + \sum_{k\geq 2}^{2m-2} C_k(t_j) h^k + w_n , \quad t_j \in \Omega_n , \qquad (10)$$

где $C_k(t)$ – не зависящие от h, $2m+1-k$ раз непрерывно дифференцируемые функции ($m \geq 2$), w_n – величина порядка $O(h^{2m})$.

На основе разложения (10) производилось уточнение приближенных решений методом Ричардсона.

Кроме теоремы 3, предложен также один итерационный процесс, сходящийся сразу к решению с повышенной точностью. Имеет место следующая

Теорема 4

Пусть $v^*(t)$ – решение уравнения (6), которое может быть получено методом простой итерации. Тогда итерационный процесс

$$v^{(k+1)}_{2n}(t_j) = t_j \rho(t_j)\{[v^{(k)}_{2n}(t_j)]^2 + (\lambda + F_{2n} v^{(k)}_{2n}(t_j))^2 \chi_k\} , \qquad (11)$$

$$k = 0,1,\ldots ; \quad v^{(0)}_{2n}(t_j) \equiv 0 , \quad t_j \in \Omega_{2n} ,$$

где

$$\chi_k = \frac{4r_k - r_k^2}{4r_k - 1} , \quad r_k = \frac{\lambda + F_n v^{(k)}_n(t_j)}{\lambda + F_{2n} v^{(k)}_{2n}(t_j)} \equiv \frac{U_n(t_j)}{U_{2n}(t_j)} ,$$

сходится к некоторой сеточной функции $v^*_{2n}(t_j)$ и справедливо разложение

$$v^*_{2n}(t_j) = v^*(t_j) + w_n , \quad t_j \in \Omega_{2n} , \quad w_n = O(h^3) .$$

Показано, что можно вместо теоремы 4 доказать аналогичную, позволяющую получить приближенные решения на сетке $\Omega_{2^\ell n}$ $(\ell \geq 1)$ с точностью $O(h^{\ell+1})$. Однако при большом ℓ реализация аналогичного (11) процесса связана с трудностями при определении коэффициентов типа χ_k.

Эффективность предложенных методов (теоремы 3,4) проиллюстрирована численными расчетами модели (9).

Аналогичные теоремам 3,4 результаты получены в § 2 для уравнений $\pi\pi$ -рассеяния. Здесь приведены уточненные решения этих уравнений для различных значений λ вплоть до 0,2 с точностью порядка $O(h^5)$. Кроме этого, предложен один численный метод экстраполяции для нахождения максимального (предельного) значения константы связи. Этим методом найдено значение λ_{max}=0,2145, которое, согласно тестовому варианту, отличается от точного на величину порядка $O(h^2)$.

Основные результаты

1. Доказаны теоремы, устанавливающие области изменения константы связи, где уравнения типа Чу-Лоу и $\pi\pi$- рассеяния имеют хотя бы одно решение, не более одного решения, и единственное решение, и показано, что эти решения могут быть получены методом простой итерации.

2. Обоснованы сходимость и устойчивость разностных схем, аппроксимирующих уравнения типа Чу-Лоу и $\pi\pi$- рассеяния. При этом установлено, что быстрота сходимости итерационных процессов зависит от порядка аппроксимации сингулярного оператора типа Коши квадратурными формулами. Этот порядок аппроксимации в свою очередь определяется степенью гладкости заданной функции обрезания.

3. Построен алгоритм для расчетов на ЭВМ решений указанных уравнений для широкой области изменения константы λ. Получены приближенные решения уравнений с двухрядной и трехрядной матрицами Чу-Лоу, и для уравнений $\pi\pi$ -рассеяния.

4. Предложен метод численного определения на ЭВМ верхней границы допустимых значений константы связи для уравнений типа Чу-Лоу и $\pi\pi$- рассеяния.

5. Впервые показана возможность применения экстраполяционного метода Ричардсона для повышения точности приближенных решений нелинейных сингулярных интегральных уравнений.

Для уравнений типа Чу-Лоу и $\pi\pi$- рассеяния обосновано асимптотическое разложение решения по степеням шага сетки, которое позволяет значительно повысить точность приближенных решений без существенного увеличения памяти ЭВМ и машинного времени.

Расчеты двухрядной системы уравнений Чу-Лоу показали эффективность метода Ричардсона.

Для уравнений $\pi\pi$- рассеяния этим методом получены приближенные решения с точностью порядка $o(h^5)$.

6. Предложен итерационный процесс приближенного решения уравнений типа Чу-Лоу и $\pi\pi$- рассеяния, сходящийся сразу к решению с той же точностью, которую дает метод Ричардсона. Такой процесс позволяет получить уточненные решения на объединении сеток за более короткий интервал времени при меньшем объеме памяти ЭВМ, чем метод Ричардсона, и может быть использован для повышения точности решений разностных схем, аппроксимирующих нелинейные сингулярные интегральные уравнения.

Работы, положенные в основу диссертации:

I. Е.П.Жидков, Нгуен Монг, Б.Н. Хоромский. Качественное исследование и приближенное решение нерегуляризованного уравнения Лоу. ОИЯИ, Р5-II9I2, Дубна, I978.
2. Е.П.Жидков, Нгуен Монг, Б.Н.Хоромский. О сходимости итерационных процессов приближенного решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения Лоу. ОИЯИ, PII-I2247, Дубна, I979.
3. Е.П.Жидков, Нгуен Монг, Б.Н.Хоромский. Об одном классе систем нелинейных интегральных уравнений. ОИЯИ, Р5-I2602,Дубна,I979.
4. Е.П.Жидков, Нгуен Монг, Б.Н.Хоромский. Численное решение системы уравнений $\pi\pi$-рассеяния с одним вычитанием. ОИЯИ, Р5-I2574, Дубна, I979.
5. Е.П.Жидков, Нгуен Монг, Б.Н.Хоромский. Повышение точности приближенных решений нелинейных сингулярных интегральных уравнений типа Чу-Лоу. ОИЯИ, Р5-I29I6, Дубна, I979.
6. Е.П.Жидков, Нгуен Монг, Б.Н.Хоромский. Уточнение приближенных решений и численное определение константы связи уравнений $\pi\pi$-рассеяния. ОИЯИ, Р5-I3040, Дубна, I980.

Цитированная литература

I. F.Low. Phys. Rev., 1955, 97, 1392; G.Chew, F.Low, Phys. Rew., 1956, 101, 1570.
2. Н.Н.Боголюбов. Изв. АН СССР. Сер.физ., I957, XIX, 237; Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев, М.К.Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, I957.
3. Д.В.Ширков, В.В.Серебряков, В.А.Мещеряков. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М.,"Наука", I967.

4. В.И.Журавлев, В.А.Мещеряков. ЭЧАЯ, I974, 5, вып.I, I72.
5. I.P.Nedelkov. Phys. Rev., 1972, 6D, 2842;J. Math. Phys., 1974, 15, 9.
6. R.Warnoock. Phys. Rev., 1968, 170, 1323; 1969, 174, 2169; H.Mc Paniel, R.Warnoock. Nuovo Cimento, 1969,64, 905.
7. Е.П.Жидков, Нгуен Монг, Н.П.Недялков, Б.Н.Хоромский. ЖВМ и МФ, I979, 4, 998.
8. А.А.Самарский. Теория разностных схем. М., "Наука", I977.
9. Г.И.Марчук, В.В.Шайдуров. Повышение точности решений разностных схем. М., "Наука", I979.
I0. Е.П.Жидков, Нгуен Монг, Б.Н.Хоромский. ОИЯИ, Р5-I2979,Дубна, I979.
II. Нгуен Монг, Б.Н.Хоромский, Р.М.Ямалеев. ОИЯИ, Р5-I2993, Дубна, I979.
I2. Е.П.Жидков, Э.Айрян. ОИЯИ, PII-I2709, Дубна, I979.

Рукопись поступила в издательский отдел 20 февраля I980 года.