СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

5 - 6860

С. Будням, Е.П. Жидков

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ГАТО ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ОБЛАСТИ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1972

5 - 6860

С. Будням, Е.П. Жидков

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ГАТО ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ОБЛАСТИ

Модельная задача определения формы замкнутого электронного пучка с большим током /I/,/3/ математически ставится следующим образом. Даны два двумерных интегральных уравнения

$$\gamma(r,z)=\iint\limits_{\Omega} G(r,z,r',z')\gamma(r',z')dr'dz'+f(r,z) \qquad (1)$$

$$h(r,z)=\iint\limits_{\Omega} A(r,z,r',z')h(r',z')dr'dz'+\mathcal{L}(r,z), \qquad (2)$$

где ядра $G(r,z,r',z')$, $A(r,z,r',z')$ и свободные члены $f(r,z)$, $\mathcal{L}(r,z)$ определены при любых r,z,r',z' и являются достаточно гладкими функциями своих аргументов. Кроме того, решения интегральных уравнений (I) – (2) на границе q области Ω связаны следующим нелинейным соотношением:

$$\Phi[\gamma(r,z),h(r,z)]=0, \qquad (3)$$

где $\Phi(r,z)$ – достаточно гладкая нелинейная функция своих аргументов.

В конкретной задаче об определении формы пучка электронов

$$\Phi(\gamma,h)=\gamma^2(r,z)-h^2(r,z)-1.$$

Требуется найти область Ω с достаточно гладкой границей, чтобы решения интегральных уравнений $\gamma(r,z)$, $h(r,z)$ в этой области удовлетворяли на ее границе q нелинейному соотношению (3). Для абстрактного рассмотрения поставленной выше задачи введем следующие функциональные пространства. Пусть Q – совокупность замкнутых кривых, расположенных в плоскости $\{r,z\}$, параметрические уравнения которых задаются в виде:

$$\left.\begin{array}{l} r = r(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{array}\right\} \quad 0 \le \lambda \le 1 \quad \begin{array}{ll} r(0) = r(1) & r'(0) = r'(1) \\ z(0) = z(1) & z'(0) = z'(1), \end{array} \tag{4}$$

причем функции $r(\lambda)$, $z(\lambda)$ непрерывны и имеют непрерывные производные первого порядка. В множестве кривых класса Q введем операции умножения на вещественное число и сложения следующим образом:

I. Умножение кривой q : $\left.\begin{array}{l} r = r(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{array}\right\}$

$0 \le \lambda \le$ I на

вещественное число α означает, что на α умножаются обе функции

$$\alpha \cdot q \ : \begin{cases} r = \alpha \cdot r(\lambda) \\ z = \alpha \cdot z(\lambda) . \end{cases}$$

Ясно, что $\alpha \cdot q \in Q$.

2. Пусть

$$q_1 : \begin{array}{l} r_1 = r_1(\lambda) \\ z_1 = z_1(\lambda) \end{array} \quad \text{и} \quad q_2 : \begin{array}{l} r_2 = r_2(\lambda) \\ z_2 = z_2(\lambda), \end{array}$$

тогда

$$q = q_1 + q_2 \ : \begin{array}{l} r = r_1(\lambda) + r_2(\lambda) \\ z = z_1(\lambda) + z_2(\lambda) \end{array} \quad 0 \le \lambda \le 1 \quad q \in Q.$$

Таким образом, множество Q есть линейное пространство. Введем расстояние между элементами q_1 и q_2 из Q следующим образом:

$$\rho(q_1, q_2) = \max_{0 \le \lambda \le 1} \sqrt{(r_1(\lambda) - r_2(\lambda))^2 + (z_1(\lambda) - z_2(\lambda))^2 + (r_1'(\lambda) - r_2'(\lambda))^2 + (z_1'(\lambda) - z_2'(\lambda))^2} . \tag{5}$$

Легко проверить, что функция $\rho\ (q_1, q_2)$ удовлетворяет аксиомам метрического пространства. Тем самым Q является метрическим пространством. Далее введем норму $q \in Q$ следующим образом:

$$\|q\| = \rho(q, 0) = \max_{\lambda \in [0,1]} \sqrt{r_1^2(\lambda) + z_1^2(\lambda) + r_1'^2(\lambda) + z_1'^2(\lambda)} . \tag{6}$$

В результате мы получаем линейное нормированное пространство гладких плоских кривых класса Q. Аксиомы нормы здесь выполнены. Известно, что такое пространство является полным нормированным пространством. Рассмотрим пространство $C[0,1]$ функций $\Phi(\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, непрерывных и имеющих норму

$$\| \Phi(\lambda) \| = \max_{0 \leq \lambda \leq 1} | \Phi(\lambda) |. \tag{7}$$

Зададим нелинейный оператор $\varphi(q) \equiv \Psi(\lambda)$, где q - произвольная кривая из Q без точек самопересечения и удовлетворяющая при любом λ условию $r'^2_\lambda(\lambda) + z'^2_\lambda(\lambda) \neq 0$. Множество таких кривых q будет областью определения $\mathcal{D}(\varphi)$ оператора φ. С помощью оператора $\varphi(q)$ кривая q переводится в непрерывную функцию $\Psi(\lambda)$, где $0 \leq \lambda \leq 1$. λ - параметр, причем

$$q : \begin{cases} r = r(\lambda) \\ z = z(\lambda). \end{cases}$$

Пусть $q \in \mathcal{D}(\varphi)$. Тогда эта кривая ограничивает некоторую область $\tilde{\Omega}$. Решим для этой области интегральные уравнения (1) и (2) и образуем функцию

$$\Psi(\lambda) \equiv \Phi(\gamma(r(\lambda), z(\lambda)), h(r(\lambda), z(\lambda))).$$

Так определяется оператор φ из $\mathcal{D}(\varphi)$ в $C[0,1]$.

Теперь мы сформулируем задачу (1) - (3) на языке функционального анализа следующим образом. Требуется найти такую кривую

$$q : \begin{cases} r = z(\lambda) \\ z = z(\lambda), \end{cases}$$

принадлежащую $\mathcal{D}(\varphi)$, чтобы

$$\Psi(\lambda) \equiv 0.$$

Пусть кривая

$$q : \begin{cases} r = r(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{cases} \qquad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Кривая q ограничивает область Ω. Придадим функциям кривой q приращение

$$\delta q : \begin{cases} r = \delta r(\lambda) \\ z = \delta z(\lambda) \end{cases} \qquad \delta q \in \mathcal{D}(\varphi) \qquad \text{так, что}$$

$$q_1 : \begin{cases} r_1 = r(\lambda) + \delta r(\lambda) \\ z_1 = z(\lambda) + \delta z(\lambda) \end{cases} \qquad 0 \le \lambda \le 1 .$$

На $\delta r(\lambda)$ и $\delta z(\lambda)$ наложим ограничение, чтобы $q_1 \in \mathcal{D}(\varphi)$. Кривая q_1 ограничивает область Ω_1. Кривой q оператором $\varphi(q)$ ставится в соответствие функция $\psi(\lambda)$, а кривой q_1 – функция $\psi_1(\lambda)$. Найдем линейную по отношению к $\delta r(\lambda)$ и $\delta z(\lambda)$ часть приращения $\psi(\lambda)$ (дифференциал Гато).

Сначала найдем $\delta \gamma(r, z)$.

Предположим, что области Ω и Ω_1 расположены как на рисунке I (область Ω_1 содержит внутри Ω). Предположим, что область $\Delta\Omega$ можно представить в следующем виде:

$$\Delta\Omega(s) : \begin{cases} r(\lambda, s) = r(\lambda) + s\,\delta r(\lambda) \\ z(\lambda, s) = z(\lambda) + s\,\delta z(\lambda) . \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le \lambda \le \mathrm{I} \\ 0 \le s \le \mathrm{I} \end{matrix}$$

При $S = 0$

$$\left.\begin{matrix} r(\lambda, 0) = r(\lambda) \\ z(\lambda, 0) = z(\lambda) \end{matrix}\right\}$$

имеем кривую q.

При $s = \mathrm{I}$ получаем кривую q_1. Рассмотрим в областях Ω и Ω_s, ограниченных соответственно кривыми q и q_1, уравнение (I)

$$\gamma(r, z, 0) = \iint\limits_{\Omega} G(r, z, r', z')\, \gamma(r', z', 0)\, dr'\, dz' + f(r, z) \tag{6}$$

$$\gamma(r, z, 1) = \iint\limits_{\Omega_s} G(r, z, r', z')\, \gamma(r', z', s)\, dr'\, dz' + f(r, z) \tag{7}$$

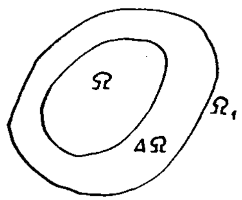

Рис. I.

Очевидно, что $\gamma(z, z)$ зависит теперь еще и от s. Найдем полную производную от $\gamma(z, z, s)$ по s, представляющую собой дифференциал Гато $\delta\gamma(z, z)$. Составим разность.

$$\gamma(z,z,s)-\gamma(z,z,0)=\iint\limits_{\Omega} G(z,z,z',z')(\gamma(z',z',s)-\gamma(z',z',0))dz'dz'+$$

$$+\iint\limits_{\Delta\Omega(s)} G(z,z,z',z')\gamma(z',z',s)\,dz'dz'.$$

Разделяя обе части последнего выражения на s и устремив к нулю, получим:

$$\lim_{s\to 0}\frac{\gamma(z,z,s)-\gamma(z,z,0)}{s}=\iint\limits_{\Omega} G(z,z,z',z')\lim_{s\to 0}\frac{\gamma(z',z',s)-\gamma(z',z',0)}{s}dz'dz'+ \tag{8}$$

$$+\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\iint\limits_{\Delta\Omega(s)} G(z,z,z',z')\gamma(z',z',s)dz'dz'.$$

Найдем предел второго слагаемого правой части выражения (8).

$$J=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\iint\limits_{\Delta\Omega(s)} G(z,z,z',z')\gamma(z',z',s)dz'dz'. \tag{9}$$

В (9) сделаем замену переменных следующим образом:

$$\begin{aligned} &\bar{z}(\lambda,s)=z(\lambda)+s\delta z(\lambda) && 0\le\lambda\le 1 \\ &\bar{z}(\lambda,s)=z(\lambda)+s\delta z(\lambda) && 0\le s\le\tau. \end{aligned} \tag{10}$$

Эти функции определяют соответствие между точками области $\Delta\Omega$ и точками прямоугольника

$$\Delta\Gamma:\begin{cases}0\le\lambda\le 1\\ 0\le s\le\tau.\end{cases}$$

Предположим, что это отображение удовлетворяет следующим условиям:

1. Отображение взаимно однозначно, т.е. различным точкам области $\Delta\Gamma$ отвечают различные точки области $\Delta\Omega$.

2. Функциональный определитель (якобиан)

$$\frac{\mathcal{D}(\bar{z},\bar{\bar{z}})}{\mathcal{D}(\lambda,s)} = z'_\lambda \delta \bar{z}(\lambda) - \bar{z}'_\lambda \delta z(\lambda) + s\left(\delta \bar{z}(\lambda)(\delta z(\lambda))'_\lambda - \delta z(\lambda)[\delta \bar{z}(\lambda)]'_\lambda\right)$$

всюду в области $\Delta\Gamma$ отличен от нуля.

При сделанных предположениях

$$\mathfrak{I} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left\{\iint_{\Delta\Omega(s)} G(z,\bar{z},z',\bar{z}')\,\gamma(z',\bar{z}';s)\,dz'd\bar{z}'\right\} =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left\{\int_0^1\int_0^{\tau} G(z,\bar{z},\bar{z}(\lambda,s),\bar{\bar{z}}(\lambda,s))\,\gamma(\bar{z}(\lambda,s),\bar{\bar{z}}(\lambda,s),s)\left|\frac{\mathcal{D}(\bar{z},\bar{\bar{z}})}{\mathcal{D}(\lambda,s)}\right| ds,d\lambda\right. = \quad (\mathrm{II})$$

$$= \int_0^1 G(z,\bar{z},z(\lambda),\bar{z}(\lambda))\,\gamma(z(\lambda),\bar{z}(\lambda))\left|z'_\lambda(\lambda)\delta\bar{z}(\lambda) - \bar{z}'_\lambda(\lambda)\delta z(\lambda)\right| d\lambda .$$

Таким образом, дифференциал Гато оператора (I) окончательно получаем в виде:

$$\delta\gamma(z,\bar{z}) = \iint_{\Omega} G(z,\bar{z},z',\bar{z}')\,\delta\gamma(z',\bar{z}')\,dz'd\bar{z}' + \int_0^1 G(z,\bar{z},z(\lambda),\bar{z}(\lambda))\,\gamma(z(\lambda),\bar{z}(\lambda))\cdot\left|z'_\lambda\cdot\delta\bar{z}(\lambda) - \bar{z}'_\lambda\cdot\delta z(\lambda)\right| d\lambda . \quad (\mathrm{I2})$$

Теперь мы рассмотрим случай, когда области Ω и Ω_1 расположены так, как показано на рисунке 2 (область Ω содержит внутри себя Ω_1). Предположим, что область $\Delta\Omega$ можно представить в следующем виде:

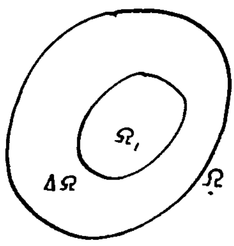

Рис. 2.

$$\Delta\Omega(s):\begin{cases} r(\lambda,s)=r(\lambda)+s\,\delta r(\lambda) & 0\le\lambda\le 1\\ z(\lambda,s)=z(\lambda)+s\,\delta z(\lambda) & 0\le s\le 1. \end{cases}$$

При этом напишем полную производную $\gamma(r, z, s)$ по s, представляющую собой дифференциал Гато $\delta\gamma(r, z)$. Составим разность.

$$\gamma(r,z,s)-\gamma(r,z,0)=\iint_{\Omega} G(r,z,r',z')\left(\gamma(r',z',s)-\gamma(r',z',0)\right)dr'dz'-$$
$$-\iint_{\Delta\Omega(s)} G(r,z,r',z')\,\gamma(r',z',s)\,dr'dz'. \qquad (13)$$

Поделив обе части (13) на s и устремив s к нулю, получим:

$$\lim_{s\to 0}\frac{\gamma(r,z,s)-\gamma(r,z,0)}{s}=\iint_{\Omega} G(r,z,r',z')\lim_{s\to 0}\frac{\gamma(r',z',s)-\gamma(r',z',0)}{s}dr'dz'\,\cdot$$
$$\cdot\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\iint_{\Delta\Omega(s)} G(r,z,r',z')\,\gamma(r',z',s)\,dr'dz'. \qquad (14)$$

Для вычисления второго слагаемого правой части равенства (14) сделаем замену переменных (r, z) на переменные (λ, s). Как и раньше, в результате получим

$$\delta\gamma(r,z)=\iint_{\Omega} G(r,z,r',z')\,\delta\gamma(r',z')\,dr'dz'\,\cdot$$
$$\cdot\int_0^1 G(r,z,r(\lambda),z(\lambda))\,\gamma(r(\lambda),z(\lambda))\left|r'_\lambda\,\delta z(\lambda)-z'_\lambda\,\delta r(\lambda)\right|d\lambda. \qquad (15)$$

Случаи, соответствующие рисункам (1) и (2), отличаются тем, что их якобианы при замене переменных $(r, z)\longrightarrow(\lambda, s)$ отличаются знаком. В результате в обоих случаях получаем одинаковое выражение для дифференциала Гато:

$$\delta\gamma(r,z)=\iint_{\Omega} G(r,z,r',z')\,\delta\gamma(r',z')\,dr'dz'\,+$$
$$+\int_0^1 G(r,z,r(\lambda),z(\lambda))\,\gamma(r(\lambda),z(\lambda))\left(r'_\lambda\,\delta z(\lambda)-z'_\lambda\,\delta r(\lambda)\right)d\lambda. \qquad (16)$$

Теперь ясно, что дифференциал Гато $\delta h(r, z)$ оператора (2) аналогично можно написать:

$$\delta\eta(r,z)=\iint_{\Omega}A(r,z,r',z')\delta\eta(r',z')dr'dz' + \int_0^1 A(r,z,r(\lambda),z(\lambda))\eta(r(\lambda),z(\lambda))(r'_\lambda\delta z(\lambda)-z'_\lambda\delta r(\lambda))d\lambda. \tag{17}$$

Таким образом,дифференциал Гато оператора (I)-(2) по переменным областям есть линейное операторное уравнение того же типа с одинаковым ядром. Вернемся к основному нелинейному оператору (3) и дифференциалу Гато этого оператора. Ясно, что он имеет вид:

$$\delta\Phi(r,z)=\frac{\delta\Phi}{\delta\gamma}\cdot\delta\gamma(r,z)+\frac{\delta\Phi}{\delta\eta}\cdot\delta\eta(r,z). \tag{18}$$

Предположим, что приращения $\delta r(\lambda)$, $\delta z(\lambda)$ заданы таким образом, что области Ω и Ω_1 имеют конечное число точек пересечения. Тогда можно показать, что дифференциал Гато оператора (I) будет таким же,как и правая часть уравнения (I6).

ЛИТЕРАТУРА

1. О.Н.Ярковой. Стационарное состояние пучка в накопителе с большим током.
Препринт ОИЯИ 2182, Дубна, 1965.

2. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин.
Об одном методе введения параметра при решении краевых задач для нелинейных и обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.
ЖВМ и МФ, т.7, № 5, 1967, стр. 1086-1095.

3. С.Будняк и др.
Стационарное состояние электронного кольца во внешнем магнитном поле.
ЖВМ и МФ, 1971, т.11, № 4, стр. 1043-1047.

4. Л.А.Люстерник, В.И.Соболев.
Элементы функционального анализа.
Москва, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 декабря 1972 года.