

6542

Экз. чит. зала

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.



5 - 6542

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

С.И.Сердюкова

ПРИМЕР РАЗНОСТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
С НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ
ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ТИПА

1972

5 - 6542

С.И.Сердюкова

**ПРИМЕР РАЗНОСТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
С НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ
ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ТИПА**

Направлено в ЖВМ и МФ

В работе^{/1/} получено необходимое и достаточное условие устойчивости в L_2 разностных краевых задач на полубесконечной прямой. Для неустойчивых задач приведены оценки норм степеней оператора перехода от слоя к слою, которые являются точными по порядку. При этом обнаружен новый по сравнению с задачей Коши вид неустойчивости – логарифмический. В предлагаемой работе построен конкретный пример разностной краевой задачи с неустойчивостью логарифмического типа. Кроме того, показано, как практически применять алгоритм проверки устойчивости краевых задач, предложенный в^{/1/}.

Непрерывная краевая задача:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = u_x \\ v_t = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \geq 0, \\ u(0, t) = v(0, t), \quad t \geq 0, - \end{array}$$

заменяется разностной аппроксимацией:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{a^2}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ v_j^{n+1} = v_j^n + \beta (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n), \quad j \geq 1, \quad n \geq 1, \\ u_j^0 = u_0(jh), \quad v_j^0 = v_0(jh), \quad j \geq 0, \\ u_0^n = v_1^n, \quad v_0^n = u_1^n, \quad n \geq 0. \end{array} \right.$$

Положим $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,25$. Тогда соответствующая задача Коши устойчива в L_2 и даже в \tilde{C} . Действительно, характеристическая матрица системы имеет вид $\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}$, где

$$f_1(e^{i\phi}) = 1 - \alpha i \sin \phi - 2\alpha^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}, \quad |f_1| < 1 \quad \text{при} \quad \alpha < 1,$$

$$f_2(e^{i\phi}) = 1 - 4\beta \sin^2 \frac{\phi}{2}, \quad |f_2| \leq 1 \quad \text{при} \quad \beta < \frac{1}{2}.$$

Функции $f_1(e^{i\phi})$, $f_2(e^{i\phi})$ имеют одну точку касания с единичной окружностью при $\phi = 0$. В малой окрестности $\phi = 0$ справедливо разложение:

$$f_1(e^{i\phi}) = \exp\{-i\alpha\phi - \alpha^2\phi^2 + o(\phi^3)\}, \quad f_2(e^{i\phi}) = \exp\{-\beta\phi^2 + o(\phi^3)\}.$$

Коэффициенты при младших нелинейных членах отрицательные. Следовательно, ^{/2/} задача Коши устойчива в C . Чтобы исследовать устойчивость краевой задачи, строим матрицы ^{/1/} $M(z)$, $T^{-1}(z)$, $K_1^{-1}(z)$, $K_2^*(z)$ в окрестности $z = 1$, $\phi = 0$. Имеем

$$M(z) = \begin{pmatrix} -A_p^{-1} A_{p-1} \dots - A_p^{-1} (A_0 - zI) \dots - A_p^{-1} A_{-r} \\ I & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-8z & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2+4z & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $M(z)$ состоит из двух вложенных друг в друга матриц:

$$M_1(z) = \begin{pmatrix} -2+4z & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad M_2(z) = \begin{pmatrix} 6-8z & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения $M(z)$ в окрестности $z = 1$. Собственные значения $M(z)$ удовлетворяют уравнению:

$$\text{Det} \left(\sum_{\nu=-1}^1 A_\nu \kappa^\nu - zI \right) = 0.$$

Отсюда получаем два уравнения второго порядка:

$$\frac{x}{4} + \left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4x} = 0, \quad -\frac{x}{8} + \left(\frac{3}{4} - z\right) + \frac{3}{8x} = 0.$$

Из первого уравнения находим

$$\kappa_{1,2} = 2(z-1) \pm 1 \pm \sqrt{z(z-1)} = 1 \pm 2\sqrt{i\phi} + O(\phi).$$

На единичной окружности $|z|=1$ в окрестности $z=1$ $|\kappa_1| \geq 1$,

$|\kappa_2| \leq 1$. Собственному значению κ_1 отвечает собственный вектор $e = (\kappa_1, 1)$: $M_1 e = \kappa_1 e$. Матрица $M_1(1)$ подобна жордановой клетке. Следовательно, в окрестности $z=1$ непрерывная матрица $M_1(z)$ не может быть приведена к диагональному виду. Преобразование подобия $\begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ приводит ее к треугольному виду. Решаем второе уравнение. Получаем:

$$\kappa_3 = \exp\{-2i\phi - 4\phi^2 + O(\phi^3)\}, \quad \kappa_4 = -3 - 6(z-1) - 3(z-1)^2 + \dots$$

Отсюда видно, что на единичной окружности в окрестности $z=1$

$|\kappa_3| \leq 1$, $|\kappa_4| > 1$. Так как $\kappa_3(1) \neq \kappa_4(1)$, в окрестности $z=1$ матрица $M_2(z)$ может быть приведена к диагональному виду. Соответствующее преобразование подобия дается матрицей $\begin{pmatrix} \kappa_3 & \kappa_4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Теперь нетрудно построить матрицы $T^{-1}(z)$ и $T(z)$ /1/:

$$T^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \kappa_3 & 0 & 0 & \kappa_4 \\ 0 & 0 & \kappa_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa_3 - \kappa_1} & 0 & 0 & -\frac{\kappa_4}{\kappa_3 - \kappa_4} \\ 0 & -\frac{1}{\kappa_1} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\kappa_3 - \kappa_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\kappa_1} & 0 & \frac{\kappa_3}{\kappa_3 - \kappa_4} \end{pmatrix}$$

$T(z)$ приводит $M(z)$ к треугольному виду:

$$TMT^{-1} \left(\begin{array}{cc|cc} \kappa_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & -\kappa_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 0 \\ & & M_{11} & B & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & M_{22} & \end{array} \right)$$

Строим $K_1^{-1}(z)$ в окрестности $z = 1, \phi = 0$:

$$K_1(z) = T_{21}^{-1} - \sum_{\nu=r}^s C_\nu T_{21}^{-1} M_{11}^\nu = \begin{pmatrix} 1 & -\kappa_2 \\ -\kappa_3 & 1 \end{pmatrix},$$

у нас

$$r = s = 1, \quad T_{21}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$K_1^{-1}(z) = \frac{1}{1 - \kappa_2 \kappa_3} \begin{pmatrix} 1 & \kappa_2 \\ \kappa_3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{i\phi}} \begin{pmatrix} 1 & \kappa_2 \\ \kappa_3 & 1 \end{pmatrix} + O(\phi).$$

Далее строим $K_2^*(z)$:

$$K_2^*(z) = K_2(z) + \sum_{\nu=1}^s B_\nu^I(z) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} M_{22}^{\nu-1},$$

$$K_2(z) = -(T_{22}^{-1} - \sum_{\nu=r}^s C_\nu T_{22}^{-1} M_{22}^\nu), \quad B_\nu^I(z) = \sum_{l=\max(r,\nu)}^s C_\nu T_{21}^{-1} M_{11}^{l-\nu}.$$

$$\text{В нашем примере } T_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2(z) = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -1 \\ -1 & \kappa_4 \end{pmatrix},$$

$$B_1^I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1^{-1} K_2^* = \frac{1}{2\sqrt{i\phi}} \begin{pmatrix} -1+6\sqrt{i\phi} & -4+6\sqrt{i\phi} \\ -1+4\sqrt{i\phi} & -4 \end{pmatrix} + O(\phi^{1/2}).$$

Все элементы краевых матриц $K_1^{-1}(z)$, $K_1^{-1}(z)$ $K_2^*(z)$

при $z = 1$ имеют особенность одного и того же порядка $1/2$. Допустимые порядки особенностей здесь такие: $P(\kappa_3) = 1/2$, $P(\kappa_1) = P(\kappa_2) = 3/4$. Таким образом, согласно пункту 1 основной теоремы работы ^{1/1/}, решения рассматриваемой краевой задачи удовлетворяют оценке:

$$\|u^n\| < \sqrt{c_1 + c_2 \ln n},$$

где $\|u^n\| = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |u_j^n|^2 + |v_j^n|^2 \right)^{1/2}$.

Из доказательства следует, что логарифмический порядок роста в $L_2(\sqrt{c_1 + c_2 \ln n})$ должно иметь решение с такими начальными данными: $u_1^0 = 0$, $v_0^0 = 0$, $u_0^0 = 0$, $v_0^0 = 1$, $u_j^0 = v_j^0 = 0$ при $j \geq 2$.

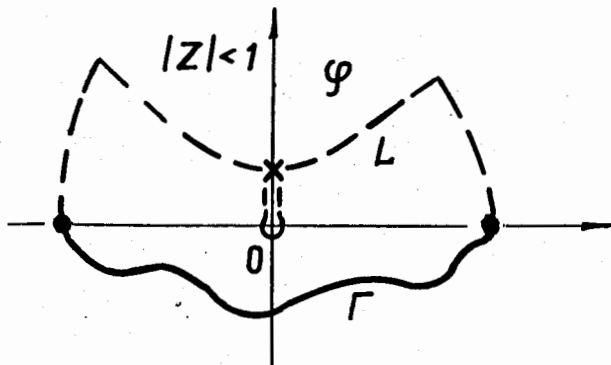
Результат применения резольвенты в окрестности $\phi = 0$ к начальным данным имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} w_{\nu}^I &= M_{11}^{\nu-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 \end{pmatrix} w_1^{II} + M_{11}^{\nu-1} K_1^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= M_{11}^{\nu-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 \end{pmatrix} w_1^{II} + \begin{pmatrix} \kappa_3^{\nu-1} / 6 \sqrt{i\phi} (1 + O(\phi)) \\ \kappa_2^{\nu-1} / 6 \sqrt{i\phi} (1 + O(\phi)) \end{pmatrix}, \\ w_1^{II} &= -M_{22}^{-1} \begin{pmatrix} -1 / (\kappa_3 - \kappa_4) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\kappa_1 (\kappa_3 - \kappa_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ w_{\nu}^{II} &= 0 \quad \text{при} \quad \nu \geq 2, \quad \kappa_3 - \kappa_4 = 4 + O(\phi). \end{aligned} \right.$$

Отсюда получаем, что первая компонента решения с точностью до величины порядка $e^{-x\nu}$ дается интегралом

$$\int_{\Gamma} \frac{(i\phi)^{-1/2}}{6} (1 + O(\phi)) \kappa_3^\nu e^{in\phi} d\phi = \int_{\Gamma} \frac{(i\phi)^{-1/2}}{6} (1 + O(\phi)) \exp \{ i(n - 2\nu)\phi - 4\nu(\phi^2 + O(\phi^3)) \} d\phi.$$

(Контур Γ показан на рисунке).



При $1 \leq \nu \leq \frac{n}{2} - n^{\frac{3}{4}}$ асимптотика этого интеграла строится так: Γ деформируется в контур L , обтекающий особую точку $\phi = 0$ и проходящий через точку перевала, расположенную в верхней полуплоскости. Главный член асимптотики дается "интегральным вычетом" относительно $\phi = 0$. Асимптотический вычет в указанной области изменения ν экспоненциально мал. Главный член интегрального вычета есть $O(1/\sqrt{n - 2\nu})$. Этот член и дает в L_2 рост порядка $\sqrt{\ln n}$.

Приношу благодарность Н.С.Бахвалову за полезные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. С.И.Сердюкова "Необходимое и достаточное условие устойчивости одного класса разностных краевых задач". Препринт ОИЯИ Р5-6320 Дубна 1972.
2. С.И.Сердюкова. "Об устойчивости в равномерной метрике систем разностных уравнений". ЖВМ и МФ, 7, 3, 497-509, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 июня 1972 г.