ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

5 - 6366

Г.Неметх

РАЗЛОЖЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА

Специальность 01 008 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Дубна 1972

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук В.И.ДМИТРИЕВ,
кандидат физико-математических наук Г.Н.ТЕНТЮКОВА

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
ВЦ АН СССР. г. Москва.

Автореферат разослан " " ____________ 1972 года.

Защита диссертации состоится "____" ____________ 1972 г. на заседании Ученого совета Лаборатории вычислительной техники и автоматизации в конференц-зале ЛТФ ОИЯИ, г.Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета

Е.А.ЛОГИНОВА

5 - 6366

Г.Неметх

РАЗЛОЖЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА

Специальность 01 008 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Приближение функций полиномом является одной из важных задач прикладной математики. Целый ряд книг /I - 5/, вышедших в последние годы, посвящен приближению специальных функций, в частности, построению алгоритмов, пригодных для расчетов на электронных вычислительных машинах. Идеи получения приближения функций с помощью полиномов известны давно/6 - IO/ .Одним из способов такого приближения является использование ряда Тейлора. Этот ряд сходится только внутри некоторого круга. Вне этого круга применяют разложение по отрицательным степеням аргумента, которое вообще расходится. Более эффективными на практике, по сравнению со степенными разложениями,оказываются разложения по некоторым классам полиномов /23/, которые определены в вещественной области аргумента и аппроксимируют функцию на всем отрезке не только в отдельных точках.

Один из самых интересных классов полиномов - полиномы Чебышева. В принципе коэффициенты чебышевского разложения

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x) \quad , \quad -1 \le x \le 1 ,$$

могут быть выражены интегралами

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} f(x)\, T_k(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \quad k=0,1,2,\dots \qquad \text{(I)}$$

Однако часто нельзя вычислить эти интегралы в конечном виде.

Данная работа посвящена приближению обобщенной гипергеометрической функции типа

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k \frac{x^k}{k!}, \qquad \text{при } x \to 0,$$

где

$$\Pi_k = \frac{\prod_{i=1}^{p} \Gamma(a_i + k\alpha_i)/\Gamma(a_i)}{\prod_{i=1}^{q} \Gamma(b_i + k\beta_i)/\Gamma(b_i)}.$$

В этом случае коэффициенты (I) можно выразить в конечном виде (через другие гипергеометрические функции). Поэтому можно решить обычные вычислительные проблемы при составлении приближения для машинных программ. Эти проблемы относятся к отрезку, форме приближения, точности, удобству вычисления коэффициентов и т.д. Следующий пример, взятый из работы автора /I6/, представляет возможность и путь решения упомянутых проблем и говорит об эффективности чебышевского разложения:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) P_0(x) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) Q_0(x)\right\},$$

$$P_0(x) \sim 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!\,(8x)^2} + \cdots,$$

$$Q_0(x) \sim \frac{1}{8x} - \frac{1^2 3^2 5^2}{3!\,(8x)^3} + \cdots,$$

$$J_0(x) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k T_{2k}(x/a), \quad 0 \le x \le a, \quad a > 0,$$

$$a_k = J_k^2(a/2),$$

$$P_0(x) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_{2k} T_{2k}(a/x), \quad x \ge a,$$

$$Q_0(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_{2k+1} T_{2k+1}(a/x), \quad x \ge a,$$

$$A_k = \frac{\sqrt{2a}}{\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-a\eta} K_0(a\eta) \frac{\eta^{k-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+\eta^2}\left(1+\sqrt{1+\eta^2}\right)^k}\, d\eta,$$

$$A_k = e^{-2\sqrt{2ak}} \cdot O(k^{-3/4}), \quad k \to \infty.$$

Для самых важных специальных функций формулы подобного типа исследованы в работах автора /II - 22/. Главные результаты этих работ состоят в том, что удалось представить рассмотренные специальные функции, имеющие расходящиеся тейлоровские ряды, при помощи сходящихся рядов по полиномам Чебышева.

Настоящая диссертация является развитием и обобщением результатов, полученных как автором работ /II-22/, так и другими авторами /24-26/.

Основные результаты диссертации изложены в четырех частях.

В I части дана общая формулировка задачи многочленных приближений. Приведены правила и основные формулы, по которым можно построить по заданному тейлоровскому ряду базисные ряды, ряды по специальным гипергеометрическим полиномам:

$$u_k(x) = \sum_{j=0}^{k} (-k)_j x^j, \qquad (a)_j = a(a+1)\cdots(a+j-1),$$

$$v_k(x) = \sum_{j=0}^{k} (-k)_j (k+\lambda)_j x^j, \qquad \lambda > 0,$$

и канонические ряды по полиномам

$$p_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-k)_j g_j x^j,$$

$$q_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-k)_j(k+\lambda)_j g_j x^j.$$

Во II части приведены разложения гипергеометрической функции на отрезке (0,I), на отрезке (-I,I) и на мнимой оси.

Даются интегральные представления коэффициентов разложений, при помощи которых исследуются скорости сходимости коэффициентов при $k \to \infty$.

Далее исследован вопрос: какому разностному уравнению удовлетворяют коэффициенты разложений. Доказано, что если числа α_i и β_i положительные и рациональные, тогда коэффициенты разложений удовлетворяют разностному уравнению конечного порядка.

Часть III посвящена описанию алгоритмов численного нахождения коэффициентов рассмотренных чебышевских разложений. Даются примеры того, как можно построить канонические ряды из известного разложения. При этом коэффициенты канонического разложения вычисляются более просто, чем коэффициенты чебышевского ряда.

Предложен метод, названный методом фактора, при помощи которого можно получить из приближения функции $g(x)$ приближение для функции $f(x)$, если функция $f(x)$ представима в виде $f=Ag$, где A-некоторый оператор. Некоторые применения метода фактора можно найти в работах автора /27 - 33/. Далее представлен метод Миллера /5/ для вычисления коэффициентов. Он состоит в том, что коэффициенты чебышевского разложения можно определить при помощи их разностного уравнения. Исследуется асимптотическое поведение общего решения разностного уравнения для коэффициентов.

Доказана сходимость метода Миллера для частных случаев $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 1$.

Часть IУ содержит большое количество (I77) таблиц численных значений коэффициентов чебышевских разложений целого ряда специальных функций. Табличный материал составлен таким образом, что при вычислении значений рассмотренных функций можно достигнуть точности I5 десятичных цифр. В заголовке таблиц приведены формулы, необходимые для практического их применения.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах /II-22/ и /27 - 33/.

ЛИТЕРАТУРА

I. Hastings, C.: Approximations for Digital Computers. Princeton University Press /1955/.

2. Clenshaw, C.W.: Chebyshev Series for Mathematical Functions. Nat.Phys.Lab. London. /1962/

3. Л.А.Люстерник, О.А.Червоненкис, А.Р.Янпольский. Математический анализ. Вычисление элементарных функций. Гос.изд.физ.мат.лит. Москва)(I963).

4. Hart, J. et al.: Computer Approximations. New-York /1968/.

5. Luke, Y.L.: The Special Functions and Their Approximations. Acad.Press. London-New-York /1969/.

6. С.Н.Бернштейн. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. Сообщения Харьковского Математического Общества I3 (1912) 49-I94, Харьков.

7. Е.Я.Ремез. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Киев. I957.

8. Н.И.Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. Гостехиздат. I947. Москва.

9. И.С.Березин, Н.П.Жидков. Методы вычислений, т.I,2.
Гос.изд.физ.мат.лит., 1961, Москва.

10. И.П.Натансон. Конструктивная теория функций.
Гостехиздат, 1949, Москва.

11. Németh,G. , : KFKI Közl. 12 (1964) 201-204.

12. - " - : KFKI Közl. 13 (1965) 163-170.

13. - " - : KFKI Közl. 13 (1965) 171-176.

14. - " - : Numerische Mathematik 7 (1965) 310-312.

15. - " - : KFKI Közl. 14 (1966) 3-10.

16. - " - : KFKI Közl. 14 (1966) 159-169, 299-309;
16 (1968) 147-160.

17. - " - : KFKI Közl. 15 (1967) 183-191.

18. - " - : Matematikai Lapok XVIII. (1967) 329-333.

19. - " - : KFKI Közl. 16 (1968) 161-166.

20. - " - : KFKI Közl. 17 (1969) 105-118.

21. - " - : KFKI Közl. 17 (1969) 93-104.

22. - " - : MTA III. Osztály Közleményei. 20 (1971) 13-33.

23. К.Ланцош. Практические методы прикладного анализа.
Гос.изд.физ.мат.лит. (1961). Москва.

24. Miller, G. F. : Journal SIAM Numer.Math. 3 (1966) 390-409.

25. Luke, Y.L., Wimp,J.: Math.of Comput. 17 (1963) 395.

26. Wimp, J.: Math.of Comput 22 (1968) 363.

27. Németh,G., et al.:Acta Physica Hungarica 30 (1971) 83-87.

28. - " - : Journal of Chem. Physics 54(1971) 1701-1708.

29. - " - : Chemical Physics Letters 7 (1970) 314-316.

30. Németh, G. : MTA Mat.Kut.Int.Közl. 8 (1963) 641-643.

31. - " - : Függvények approximációja.
Magyar Kémikusok Egyesülete. Bpest.(1966).

32. - " - : KFKI Közl. 14 (1966) 11-14.

33. - " - : KFKI Közl. 17 (1969) 257-265.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 апреля 1972 г.