2336 С 133.4
Н-501

24/4-72

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

5 - 6336

1296/2-72

Г.Неметх

ТАБЛИЦЫ РАЗЛОЖЕНИЙ ПЕРВЫХ 10 НУЛЕЙ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

1972

I. Определения и формулы

I.I. Нули функции $J_\nu(x)$.

Известно[I], что функцию Бесселя $J_\nu(x)$, решение

$$y'' + \frac{1}{x} y'' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

дифференциального уравнения второго порядка, можно представить в виде сходящегося ряда

$$J_\nu(x) = (x/2)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} .$$

Эта функция имеет бесконечное множество нулей на действительной оси. Обозначим через $j_{\nu,n}$ n-й корень (по Олверу[I]). Корень $j_{\nu,n}$ (аналитическая функция индекса ν) можно представить около нуля в виде ряда $j_{\nu,n} = c_0 + c_1\nu + c_2\nu^2 + \ldots$

обращением степенного ряда $J_\nu(x)$. К сожалению, коэффициенты $c_0, c_1, \ldots$ очень сложны:

$$c_0 = j_{0,n}\ , \quad c_1 = \left\{ j_{0,n}\, J_1^2(j_{0,n}) \right\}^{-1}, \ldots$$

Если ν велико, $j_{\nu,n}$ представима асимптотическим рядом

$$j_{\nu,n} \sim \nu\left[1 + d_1\nu^{-2/3} + d_2\nu^{-4/3} + \ldots\right] , \quad \nu \to \infty ,$$

где $d_1 = \alpha$, $d_2 = \frac{3}{10}\alpha^2, \ldots$,

и α есть n-й корень уравнения $Ai(-2^{\frac{1}{3}}x) = 0$ (Ai функция Эйри).

1.2. Нули функции $J'_\nu(x)$

Функция $J'_\nu(x)$ имеет бесконечное множество нулей на действительной оси. Обозначим n-й корень (считая от нуля) через $j'_{\nu,n}$. Кроме случая $n = 1$, эти нули - аналитические функции индекса ν:

$$j'_{\nu,n} = c_0 + c_1\nu + c_2\nu^2 + \ldots .$$

Первые коэффициенты этого ряда

$$c_0 = j_{1,n-1}, \quad c_1 = -\left[j_{1,n-1} J_0^2(j_{1,n-1})\right]^{-1}, \ldots$$

В случае $n = 1$ (для первого корня) получим обращением степенного ряда $J'_\nu(x)$:

$$j'_{\nu,1} = \sqrt{2\nu}\left[1 + \frac{3}{8}\nu - \frac{43}{382}\nu^2 + \frac{599}{9216}\nu^3 + \ldots\right].$$

Если ν велико, $j'_{\nu,n}$ представима асимптотическим рядом /I/:

$$j'_{\nu,n} \cong \nu\left[1 + d_1\nu^{-2/3} + d_2\nu^{-4/3} + \ldots\right], \quad \nu \longrightarrow \infty,$$

где

$$d_1 = \alpha, \quad d_2 = \frac{3}{10}\alpha^2 - \frac{1}{10\alpha}, \ldots$$

и α есть n-й корень уравнения

$A'_i(-2^{1/3}x) = 0$ (A'_i производная функции Эйри).

1.3. Нули функции $\left\{x^{-1/2} J_\nu(x)\right\}'$

Обозначим через $j^{(-1/2)}_{\nu,n}$ n-й корень уравнения

$$\left\{x^{-1/2} J_\nu(x)\right\}' = 0.$$

Олвер использует обозначение $a_{m,n}$, где $m = \nu - \frac{1}{2}$ - положительное целое число. Можно доказать, что в случае $n \neq 1$ нули аналитические функции индекса ν и около нуля представимы со сходящимися рядами:

$$j^{(-1/2)}_{\nu,n} = c_0 + c_1\nu + c_2\nu^2 + \ldots$$

Нетрудно доказать, что для первого корня в интервале $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$ уравнение не имеет решения. Для случая $\nu \geq \frac{1}{2}$ можно получить разложение по степеням $\nu - \frac{1}{2}$:

$$j_{\nu,1}^{(-1/2)} = \sqrt{3(\nu-\tfrac{1}{2})}\left\{1 + \tfrac{7}{15}(\nu-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{41}{600}(\nu-\tfrac{1}{2})^2 + \dots\right\}.$$

Если ν велико, $j_{\nu,n}^{(-\frac{1}{2})}$ представима асимптотическим рядом /I/:

$$j_{\nu,n}^{(-1/2)} \sim \nu\left[1 + d_1\nu^{-2/3} + d_2\nu^{-4/3} + \dots\right], \quad \nu \to \infty$$

где

$$d_1 = \alpha, \quad d_2 = \frac{3}{10}\alpha^2 - \frac{7}{20\alpha}, \quad \dots$$

и α есть n-й корень уравнения $Ai(-2^{1/3}x) = 0$ (Ai - функция Эйри).

I.4. Нули функции $\left\{x^{1/2} J_\nu(x)\right\}'$.

Обозначим через $j_{\nu,n}^{(1/2)}$ n-й корень уравнения

$$\left\{x^{1/2} J_\nu(x)\right\}' = 0.$$

(Бойер/2/ эти значения обозначает $\bar{j}'_{\nu,n}$). Нетрудно доказать, что $j_{\nu,n}^{(1/2)}$ - аналитическая функция индекса ν, и около нуля ее можно представить рядом:

$$j_{\nu,n}^{(1/2)} = c_0 + c_1\nu + c_2\nu^2 + \dots$$

Если ν велико, $j_{\nu,n}^{(1/2)}$ представима асимптотическим рядом/2/:

$$j_{\nu,n}^{(1/2)} \sim \nu\left[1 + d_1\nu^{-2/3} + d_2\nu^{-4/3} + \dots\right], \quad \nu \to \infty$$

где

$$d_1 = \alpha, \quad d_2 = \frac{3}{10}\alpha^2 + \frac{3}{20\alpha}, \quad \dots$$

и α есть решение уравнения $Ai(-2^{1/3}x) = 0$ (Ai функция Эйри).

В этой работе мы составили таблицы разложений нулей на основе их аналитических свойств. Ряды мы переписали в ряд по полиномам Чебышева, что даст самую экономичную форму разложений функций.

2. Метод вычисления

Разложения в таблицах I – IУ мы вычислили методом интерполяции. Практические рассмотрения показывают, что интерполяционная формула с 18–24 чебышевскими узлами дает достаточно точные (с 15 десятичными цифрами) коэффициенты разложений по полиномам Чебышева. Значение функций мы вычислили в точках интерполирования методом обратной интерполяции Миллера и Джонса.

2.1. Формулы обратной интерполяции

Сущность метода состоит в том, что α-корень решения $y(x)$ дифференциального уравнения

$$y'' + f y' + g y = 0$$

ищем как функцию величины

$$u = \frac{y}{xy'} ,$$

а корень β производной $y'(x)$ ищем как функцию величины

$$v = \frac{xy'}{y} .$$

Можно составить ряд по степеням „u" и „v":

$$\alpha = x\left\{1 - u + \frac{1}{2}xfu^2 - \frac{1}{6}x^2(f' + 2f^2 - 2g)u^3 + \dots\right\}$$

$$\beta = x\left\{1 + \frac{v}{x^2 g} - \frac{1}{2}\left(f + \frac{g'}{g}\right)\frac{v^2}{x^3 g^2} + \left[-\frac{1}{g} + \frac{f}{g^2}\left(f + 2\frac{g'}{g}\right) - \frac{f^2}{2g^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{g'}{g}\right)^2\right]\frac{v^3}{3x^4 g} + \dots\right\}$$

При помощи этих формул дается итерационный подход для определения α и β, так что правую часть формул вычисляем, полагая x соответственно приближенным значением α и β и так получаем новое приближение α и β, и т.д. Зная вид функций f и g, можно использовать следующие итеративные формулы:

<u>1. $j_{\nu,n}$;</u>

$$f=\frac{1}{x}, \quad g=1-\frac{\nu^2}{x^2},$$

$$x_{k+1}=x_k\left[1-v_k+\frac{1}{2}v_k^2+(2x_k^2-2\nu^2-1)\frac{v_k^3}{6}+(8\nu^2-12x_k^2+1)\frac{v_k^4}{24}\right]$$

$$v_k=\frac{J_\nu(x_k)}{x_k J_\nu'(x_k)}, \quad x_k \longrightarrow j_{\nu,n}, \quad k\longrightarrow\infty .$$

<u>2. $j'_{\nu,n}$;</u>

$$f=\frac{1}{x}, \quad g=1-\frac{\nu^2}{x^2},$$

$$x_{k+1}=x_k\left[1+\frac{v}{x_k^2-\nu^2}+\frac{x_k^2+\nu^2}{2(x_k^2-\nu^2)^2}v_k^2+\frac{x_k^4-8\nu^2x_k^2+\nu^4-2(x_k^2-\nu^2)^3}{6(x_k^2-\nu^2)^5}v_k^3\right]$$

$$v_k=\frac{x_k J_\nu'(x_k)}{J_\nu(x_k)}, \quad x_k\longrightarrow j'_{\nu,n}, \quad k\longrightarrow\infty .$$

<u>3. $\dot{j}^{(-1/2)}_{\nu,n}$;</u>

$$f=\frac{2}{x}, \quad g=1-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2},$$

$$x_{k+1}=x_k\left[1+v_k-Y_k v^2+(6Y_k^2-Y_k-x_k^2+\nu^2-\tfrac{1}{4})v^3\right]$$

$$Y_k=\frac{x_k^2}{x_k^2-\nu^2+1/4}, \quad v_k=x\left.\frac{[x^{-1/2}J_\nu(x)]'}{x^{-1/2}J_\nu(x)}\right|_{x=x_k}, \quad x_k\longrightarrow \dot{j}^{(-1/2)}_{\nu,n}$$

$$k\longrightarrow\infty$$

$4.\ \dot{j}^{(1/2)}_{\nu,n}.$ $\quad f=0\ ,\ g=1-\frac{\nu^2-1/4}{x^2}\ ,$

$$X_{k+1}=X_k\left[1+\upsilon_k^*+(1-Y_k)\upsilon_k^{*2}+(2.75-X_k^2+\nu^2-9Y_k+6Y_k^2)\frac{\upsilon_k^{*3}}{3}\right]$$

$$\upsilon_k^*=\frac{\upsilon_k}{X_k^2-\nu^2+\frac{1}{4}}\ ,\quad \upsilon_k=x\frac{(x^{1/2}J_\nu(x))'}{x^{1/2}J_\nu(x)}\Big|_{x=X_k}\ ,\quad Y_k=\frac{X_k^2}{X_k^2-\nu^2+\frac{1}{2}}\ ,$$

$$X_k\longrightarrow \dot{j}^{(1/2)}_{\nu,n}\qquad k\to\infty\ .$$

В предыдущих итеративных формулах нужно знать значение $\upsilon=y/(xy')$. Это значение выражается через $F=J_\nu(x)/J_{\nu+1}(x)$ и имеет следующий вид:

для $j_{\nu,n}$: $\quad \upsilon=-\frac{F}{X-\nu F}$, $\qquad$ для $j'_{\nu,n}$: $\quad \upsilon=\nu-\frac{X}{F}$,

для $\dot{j}^{(-1/2)}_{\nu,n}$: $\quad \upsilon=\nu-\frac{1}{2}-\frac{X}{F}$, $\qquad$ для $\dot{j}^{(1/2)}_{\nu,n}$: $\quad \upsilon=\nu+\frac{1}{2}-\frac{X}{F}$.

Значение $F=J_\nu(x)/J_{\nu+1}(x)$ вычисляем при помощи его представления в виде непрерывной дроби:

$$F=\frac{2}{X}(\nu+1)-\cfrac{1}{\frac{2}{X}(\nu+2)-\cfrac{1}{\frac{2}{X}(\nu+3)-\cfrac{1}{\dots}}}\ .$$

2.2. Формулы первого приближения

Первое приближение нулей можно вычислить из следующих эмпирических формул:

а). Случай малого аргумента ($\nu\le n$):

для $j_{\nu,n}$:

$$X_1=3.15n+1.46\nu-0.87;$$

для $j'_{\nu,n}$, $\dot{j}^{(-1/2)}_{\nu,n}$, $\dot{j}^{(1/2)}_{\nu,n}$:

$$X_1=3.15n+1.46\nu-2.44.$$

б). Случай большого аргумента ($\nu\ge n$):

Для $j_{\nu,n}$:

$$x_1 = \nu\left[1 + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{3}{40}\lambda_1^2\right]$$

$$\lambda_1 = \left[\left(s_1 + \frac{5}{72 s_1}\right)\frac{3}{\nu}\right]^{2/3}, \quad s_1 = (n - 1/4)\pi ;$$

для $\quad j'_{\nu,n}, \quad j^{(-1/2)}_{\nu,n}, \quad j^{(1/2)}_{\nu,n}$:

$$x_1 = \nu\left[1 + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{3}{40}\lambda_2^2\right]$$

$$\lambda_2 = \left[\left(s_2 - \frac{19}{144 s_2}\right)\frac{3}{\nu}\right]^{2/3}, \quad s_2 = (n - 3/4)\pi .$$

Формулы б) принадлежат Эйри /3/. Наша практика показала, что с этими начальными приближениями достаточно выполнить два шага итераций к достижению точности 15 десятичных цифр.

3. Использование таблиц; литература

Значение нулей можно вычислить при помощи частичных сумм ряда. Частичную сумму

$$F(u) = \sum_{k=0}^{N} C_k T_k^*(u)$$

удобно вычислять по методу Кленшоу /4/. Пусть

$$B_{N+1} = 0, \quad B_N = C_N .$$

Далее вычисляем B_n для $n = N-1, N-2, \ldots, 1, 0$, по формулам:

$$B_n = 2(2u-1)B_{n+1} - B_{n+2} + C_n .$$

Тогда

$$F(u) \equiv B_0 - (2n-1)B_1 .$$

I. Пример. Вычислить $\delta_{1/5,4}$.

Используя таблицу четвертого корня, получим:

n	b_n
I9	. 0
I8	-. I
I7	. 88
I6	-. 5884
I5	. 377I2
I4	-. 240I96
I3	. I537742
I2	-. 9922339
II	. 64647369
I0	-. 426I63724
9	. 2849969I35
8	-. I94045944I9
7	. I35I9930 73I9
6	-. 97II893I3355
5	. 7277636647320
4	-. 5803778769912I
3	. 5II9076I3352298
2	-.05472725258366515
I	3.00I40091I45878229
0	9.40251586473086603

Поэтому

$$b_0 + 0.9b_1 = 12.1037766850437\underline{7009}.$$

Более точное значение /I/

$$\delta_{1/5,4} = 12.10377668504376917 2$$

совпадает с нашим приближением по крайней мере с точностью до I5 десятичных цифр.

2. Пример. Вычислить $j'_{10,10}$.

Это значение можно вычислить из ряда малого аргумента и из ряда большого аргумента. Во-первых,

$$F = 43.606764901379515$$

и во-вторых:

$$10 * F = 43.60676490137951,$$

поэтому, как видно, совпадение приближений имеется по крайней мере с точностью до 15 десятичных цифр.

Автор выражает благодарность Г.И.Макаренко и А.А.Корнейчуку за полезную дискуссию при работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. F.W.J. Olver: Royal Society Mathematical. Tables Vol. 7. Bessel Functions Part III. Zeras and Associated Values Cambridge University Press, Cambridge, England, 1960.
2. T.H.Bojer. Concerning the Zeros of Some Functions Relatedto Bessel Functions. Journal of Math. Phys. Vol. 10. No9, pp.1729-1744, 1969.
3. J.R.Airey. The Numerical Calculation of the Roofs of the Bessel Function $J_n(x)$ and its first derivative $J'_n(x)$. "Philosophical Magazine" 1917, (6) 34, pp. 189-195.
4. C.W.Clenshaw. Chebyshev Series for Mathematical Functions. National Physical Laboratory Mathematical Tables, Vol. 6, Her Majesty's Stationery office, London, England, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 марта 1972 г.

4. Таблица I. Нули функции $J_\nu(x)$

$$j_{\nu,1}=\sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k^*(u),\quad u=\nu/2<1.$$

K	c_K
0	3.80I775243633476
I	I.3607047375II120
2	-. 307077I026II06
3	. 4526823746202
4	-. 808682832I34
5	. I592I8792489
6	-. 33225I8976I
7	. 7205599763
8	-. I606II0397
9	. 365439424
I0	-. 84498039
I	. I9793815
2	-. 4687054
3	. II20052
4	-. 269767
5	. 65420
6	-. I596I
7	. 39I4
8	-. 965
9	. 239
20	-. 59
I	. I5
2	-. 4
3	. I

$$j_{\nu,2}=\sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k^*(u),\quad u=\nu/2<1$$

K	c_K
0	6.99237024404616I
I	I.446379282056534
2	-. 23458616207293
3	. 2I72I49448700
4	-. 246262775620
5	. 30990I80959
6	-. 4I54I83047
7	. 580766328
8	-. 83648I75
9	. I23I7355
I0	-. I844887
I	. 280076
2	-. 42986
3	. 6658
4	-. I039
5	. I63
6	-. 26
7	. 4
8	-. I

$$j_{\nu,1}=\nu\sum_{k=0}^{\infty} d_k T_k^*(\vartheta),\quad \vartheta=\left(\frac{2}{\nu}\right)^{2/3},\quad \nu\geq 2$$

K	d_K
0	I.735063412537096
I	.78447810095I978
2	. 48881473I80370
3	-. 57827978302I
4	-. 38984957864
5	. 5758297879
6	-. 327583229
7	-. 3853878
8	. 2284653
9	-. I53079
I0	-. 895
I	. 283
2	. 43
3	. I0
4	-. 3

$$j_{\nu,2}=\nu\sum_{k=0}^{\infty} d_k T_k^*(\vartheta),\quad \vartheta=\left(\frac{2}{\nu}\right)^{2/3},\quad \nu\geq 2$$

K	d_K
0	2.4656II864263400
I	I.60795298847I069
2	0.I38758034431497
3	-. 368779II82054
4	-. 5I276007868
5	. 45II3570749
6	-. 7579I72I52
7	. 736469208
8	-. IIII8527
9	-. II9I9884
I0	. 2696788
I	-. 3I4488
2	. 8I24
3	. 52II
4	-. I292
5	. I58
6	-. 4
7	-. 3
8	. I

Таблица П. Нули функции $J'_\nu(x)$.

$$j'_{\nu,1}=\sqrt{2\nu}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k^*(\nu),\quad 0<\nu\leqslant 1$$

к	c_k
0	I.I58343I97852390
I	0.I50237849282402
2	-.7300687445935
3	.707682249086
4	-.84I89261532
5	.II0I5325923
6	-.I520I5I268
7	.2I6929478
8	-.3I67I635
9	.470I496
I0	-.706842
I	.I07352
2	-.I644I
3	.2536
4	-.393
5	.6I
6	-.I0
7	.2

$$j'_{\nu,1}=\nu\sum_{k=0}^{\infty} d_k T_k^*(\nu^{-2/3}),\quad \nu\geqslant 1.$$

к	d_k
0	I.4I8569088388762
I	.42I482933502073
2	.I936I03745997
3	-.8887825 3I639
4	.8726446642I
5	-.23I7866666
6	-.572733880
7	.59I594I4
8	.694641I
9	-.I672575
I0	-.I39969
I	.83062
2	-.4086
3	-.34I5
4	.728
5	.70
6	-.56
7	.6
8	.2
9	-.I

$$j'_{\nu,2}=\sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k^*(u),\quad u=\nu/2,\quad 0\leqslant\nu\leqslant 2$$

к	c_k
0	5.300832I08549420
I	I.433046I43I4II8I
2	-.3I2390257333386
3	.40458008757I8
4	-.649982724667
5	.II69I3694I68
6	-.22526072660
7	.4542506243
8	-.94582I280
9	.20I6I9896
I0	-.43755580
I	.963031I
2	-.2I43742
3	.48I692
4	-.I0909I
5	.24874
6	-.5705
7	.I3I5
8	-.305
9	.7I
20	-.I7
I	.4
2	-.I

$$j'_{\nu,2}=\nu\sum_{k=0}^{\infty} d_k T_k^*(\vartheta),\quad \vartheta=\left(\frac{2}{\nu}\right)^{2/3},\quad \nu\geqslant 2$$

к	d_k
0	2.088868II2I423I3
I	I.I783490088I2742
2	.8769724I996774
3	-.I83234386I8II
4	-.29722923004
5	.I642629488I
6	-.23264393I4
7	.2092584I4
8	-.6725455
9	-.I902354
I0	.484880
I	-.62747
2	.358I
3	.469
4	-.I59
5	.22
6	-.I

Таблица III. Нули функции $\left\{x^{-1/2} J_\nu(x)\right\}'$

$$j^{(-1/2)}_{\nu,1} = \sqrt{3u}\sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k^*(u),\quad u=\nu-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\le\nu\le\frac{3}{2}$$

k	c_k
0	1.104300243788224
1	.100663866690197
2	-.3380646711961
3	.233395068860
4	-.20170142378
5	.1942334150
6	-.199016417
7	.21210290
8	-.2321782
9	.259070
10	-.29324
1	.3356
2	-.388
3	.45
4	-.5
5	.1

$$j^{(-1/2)}_{\nu,1} = \nu\sum_{k=0}^{\infty} d_k T_k^*(\vartheta),\quad \vartheta=\left(\frac{3}{2\nu}\right)^{2/3},\quad \nu\ge 3/2$$

k	d_k
0	1.228461498898861
1	.196941401439634
2	-.34495872054353
3	-.3058813776220
4	-.104856681426
5	-.23636179188
6	-.2074082430
7	-.287597657
8	-.36072063
9	-.4523661
10	-.723644
1	-.88224
2	-.11921
3	-.1953
4	-.297
5	-.31
6	-.5
7	-.1

$$j^{(-1/2)}_{\nu,2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k^*(u),\quad u=\frac{\nu}{2},\quad 0\le\nu\le 2$$

k	c_k
0	5.198556991253757
1	1.456860187807255
2	-.35860413358410
3	.5037243357241
4	-.872423980018
5	.168149877082
6	-.34538349794
7	.7395428384
8	-.1630171471
9	.367089559
10	-.84026050
1	.19484464
2	-.4566219
3	.1079590
4	-.257171
5	.61660
6	-.14868
7	.3603
8	-.877
9	.214
20	-.53
1	.13
2	-.3

$$j^{(-1/2)}_{\nu,2} = \nu\sum_{k=0}^{\infty} d_k T_k^*(\vartheta),\quad \vartheta=\left(\frac{2}{\nu}\right)^{2/3},\quad \nu\ge 2$$

0	2.073385608101699
1	1.157670877546555
2	.82634004717894
3	-.1715551403722
4	-.2736156814
5	.9808570161
6	-.1545684935
7	.179953564
8	-.15968303
9	.559258
10	.163336
1	-.45843
2	.6611
3	-.514
4	-.15
5	.12
6	-.2

- 1

5 - 6336

Г.Неметх

ТАБЛИЦЫ РАЗЛОЖЕНИЙ ПЕРВЫХ 10 НУЛЕЙ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Таблица IУ. Нули функции $\{x^{1/2} J_\nu(x)\}'$.

$$j_{\nu,1}^{(1/2)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k^*(\nu), \quad 0 \leq \nu \leq 1$$

к	c_k
0	I.5622887I8908008
I	.6II236346I6577I
2	-.8727686II3048
3	.I265I7602I348
4	-.229587798516
5	.4648I74I667
6	-.999075926I
7	.2225367224
8	-.507285739
9	.II7540434
I0	-.27574I06
I	.653359I
2	-.I56II80
3	.375767
4	-.9I029
5	.22I79
6	-.5432
7	.I337
8	-.330
9	.82
20	-.20
I	.5
2	-.I

$$j_{\nu,2}^{(1/2)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k^*(u), \quad u = \frac{\nu}{2}, \quad 0 \leq \nu \leq 2$$

к	c_k
0	5.400830I00853644
I	I.4I0663638862325
2	-.27054752601497
3	.3I83372504726
4	-.46459I4I8444
5	.76095789679
6	-.I3396269577
7	.2477078464
8	-.474476263
9	.93305280
I0	-.I8722020
I	.38I6564
2	-.787954
3	.I6437I
4	-.34585
5	.7330
6	-.I563
7	.335
8	-.72
9	.I6
20	-.3
I	.I

$$j_{\nu,1}^{(1/2)} = \nu \sum_{k=0}^{\infty} d_k T_k^*(\nu^{-2/3}), \quad \nu \geq 1$$

к	d_k
0	I.5400524I9883052
I	.583862593274430
2	.428962080506685
3	-.935771930669
4	-.II8I23I5706
5	.87683875I6
6	-.II94274687
7	.48875593
8	.I4392828
9	-.2940213
I0	.I6437
I	.8002I
2	-.8929
3	-.2325
4	.74I
5	.I6
6	-.47
7	.8
8	.2
9	-.I

$$j_{\nu,2}^{(1/2)} = \nu \sum_{k=0}^{\infty} d_k T_k^*(\vartheta), \quad \vartheta = \left(\frac{2}{\nu}\right)^{2/3}, \quad \nu \geq 2.$$

к	d_k
0	2.I042062525235I5
I	I.I98742596869728
2	.92657562798277
3	-.I960I84977575
4	-.55075637006
5	.22995978266
6	-.3I076I5580
7	.233810970
8	.4I47420
9	-.4595I42
I0	.803023
I	-.70498
2	-.I659
3	.I7I6
4	-.303
5	.24
6	.I
7	-.I