ЖВМ и МФ, 1971, т.11, №4, с.1043-50

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

5 - 5396

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

С. Будням, Е.П. Жидков, И.Н. Иванов,
Э.А. Перельштейн

СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1970

5 - 5396

С. Будням, Е.П. Жидков, И.Н. Иванов,

Э.А. Перельштейн

СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Направлено в ЖВМФ

I. Постановка задачи

В коллективном методе ускорения в качестве ускоряющих используются собственные поля заряженных сгустков частиц /I/. Собственные силы, действующие на частицы в системе, сравнимы по величине с внешними. Математическими моделями таких образований являются частные решения самосогласованной системы уравнений А.А.Власова.

Здесь рассматривается модель стационарного кольцевого сгустка – модель О.И.Яркового /2,3,4/. Функция распределения частиц в фазовом пространстве выбирается в виде функции от двух интегралов движения. Первый – полная энергия – следствие стационарности системы; второй – обобщенный момент количества движения – следствие азимутальной симметрии. Полная энергия, а также обобщенные моменты, выбираются одинаковыми для всех частиц α одного сорта и равными соответственно H_α и M_α. Использование такой функции распределения приводит к системе нелинейных двумерных интегральных уравнений для кинетических энергий E_α и азимутальных импульсов частиц $P_{\varphi\alpha}$, зависящих от координат r, z в цилиндрической системе координат. Найти решение полученной системы в общем виде не удается. Во многих интересных физических случаях трудно получить даже аналитическое приближенное решение. Нас интересует стационарное состояние кольца электронов во внешнем магнитном поле слабофокусирующего типа с показателем спада n. Будем считать заданными параметры $H_0 = mc^2\gamma_0$, M_0, n, а также r_0 и $P_{\varphi 0} = mch_0$ – соответственно радиус равновесной орбиты и азимутальный импульс одиночного электрона (в отсутствии собственных сил), $\bar{\mathcal{H}} = \frac{2e^2N}{\bar{E}S}$ где N – полное число частиц в кольце, e и m – заряд и масса электрона, $\bar{E}$ – кинетическая энергия электрона, усредненная по сечению кольца, площадь которого равна S. Выбирая таким образом основные параметры, мы стремимся упростить систему уравнений модели. Можно вместо r_0, $P_{\varphi 0}$ задать соответствующие величины с учетом собственных сил, а вместо x – полное число электронов N, это не вызовет необходимости менять метод численного решения, который мы используем. Система интегральных уравнений модели Яркового в нашем случае имеет вид:

$$\gamma(r,z) = -\frac{\bar{\bar{\mathcal{H}}}}{4\pi} \int\limits_{\Omega} G_\varphi(r,z,r',z')\,\gamma(r',z')\,dr'dz' + \gamma_0 \tag{I}$$

$$\eta(r,z) = -\frac{\bar{\bar{\mathcal{H}}}}{4\pi} \int\limits_{\Omega} G_A(r,z,r',z')\,\eta(r',z')\,dr'dz' + \eta_0\left[1+\frac{1}{2}(1-n)\frac{(r-r_0)^2}{r_0^2}+\frac{n}{2}\frac{z^2}{r_0^2}\right] \tag{2}$$

$\mathcal{L}$ – граница искомой области Ω задается функциональным нелинейным уравнением

$$\gamma^2(r,z) - \eta^2(r,z) - 1 \equiv \Phi(\gamma,\eta) = 0. \tag{3}$$

В формулах (I–3) $\gamma(r,t) \equiv \frac{E_\alpha}{mc^2}$, $\eta(r,z) \equiv \frac{P_{\varphi\alpha}}{mc}$ – неизвестные функции; (m – масса покоя электрона; c – скорость света).

$$G_\varphi = \frac{4}{\sqrt{(r+r')^2+(z-z')^2}}\,K(\bar{\bar{k}}), \tag{4}$$

а

$$G_A = \frac{4}{\sqrt{(r+r')^2+(z-z')^2}}\left[\left(\frac{2}{\bar{\bar{k}}^2}-1\right)K(\bar{\bar{k}}) - \frac{2}{\bar{\bar{k}}^2}E(\bar{\bar{k}})\right], \tag{5}$$

где $K(\bar{\bar{k}})$ и $E(\bar{\bar{k}})$ – полные эллиптические интегралы,

$$\bar{\bar{k}}^2 = \frac{4rr'}{(r+r')^2+(z-z')^2}.$$

Требуется найти в плоскости (r, z) такую область Ω с границей $\mathcal{L}$, чтобы решение уравнений (I) и (2) на кривой $\mathcal{L}$ удовлетворяло соотношению (3).

2. Метод решения задачи

При решении поставленной выше задачи использовался метод введения дополнительного параметра /5/. Введем непрерывный параметр "время t" в задаче (I-3).

Пусть (r, z) -точка границы области Ω, зависящая от "времени t":

$$r = r(t) \ , \quad z = z(t) .$$

Заменим функциональное уравнение (3) соотношением

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi , \qquad (6)$$

которое должно выполняться в каждой точке границы области $\Omega(t)$ при любом фиксированном t ($0 \le t < +\infty$).

Перепишем (6) в виде

$$\left(2\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial r} - 2\eta\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)r'_t + \left(2\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial z} - 2\eta\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)z'_z = -\Phi. \qquad (7)$$

Будем деформировать контур области $\Omega(t)$ по нормали. В этом случае к уравнению (7) добавляется еще одно уравнение $K_1 r'_t - K_2 z'_z = 0$, где K_1, K_2 – координаты вектора касательной в данной точке границы контура $\Omega(t)$. Для определения r'_z и z'_z в данной точке границы области $\Omega(t)$ мы имеем систему двух линейных уравнений.

$$\left.\begin{aligned}\left(2\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial r} - 2\eta\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)r'_z + \left(2\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial z} - 2\eta\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)z'_t = -\Phi(\gamma, \eta)\\ K_1 r'_t - K_2 z'_t = 0\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Полученная система разрешима относительно r'_t и z'_t, если ее определитель не равен нулю. Предположим, что задано начальное приближение искомой области Ω_0. Будем считать, что оно соответствует $t = 0$, $\Omega = \Omega(t)\big|_{t=0}$.

Тогда уравнения (I) и (2), разрешенные каким-либо способом для области Ω_0, позволяют найти все коэффициенты при неизвестных r'_t, z'_t и свободные члены системы (8) в любой фиксированной точке границы области Ω_0. Таким образом, в каждой точке границы области

Ω мы можем найти r'_t и z'_t и, следовательно, совершить один шаг интегрирования τ по переменной t по формулам

$$\tau^{-1}\left(r_i(t_1)-r_i(0)\right)=V_i\,(r(0),z(0))$$
$$\tau^{-1}\left(z_i(t_1)-z_i(0)\right)=W_i\,(r(0),z(0))$$

с начальными условиями

$$r_i(0)=r_{0i}$$
$$z_i(0)=z_{0i} \qquad i=1,\dots,m,$$

где $\{r_{0i}, z_{0i}\}$ – множество граничных точек заданной области Ω_0. Таким образом определяется новая область Ω_1 и на ней весь цикл вычислений повторяется. Если при $t\to+\infty$ область $\Omega(t)$ сходится к некоторой предельной области Ω, то эта предельная область и будет решением поставленной в начале настоящей статьи задачи.

3. Результаты вычислений и выводы

В результате проведенных вычислений была получена искомая область Ω и найдены величины $\gamma(r,z)$ и $\eta(r,z)$. Для отработки алгоритма и выяснения точности расчетов вначале решалась система уравнений (I), (2) без учета влияния кривизны в ядрах (4) и (5). Это соответствует нахождению стационарной формы электронного шнура. Ясно, что такая задача должна быть азимутально симметричной по сечению, а поэтому зависимость физических величин от азимута связана с ошибками в счете. Кроме того, как следует из работы /3/, существует зависимость энергии и импульса от координаты частицы по сечению шнура. На рис.I дано сечение шнура (круг радиусом $a=0.76$; $\bar{\bar{x}}=0.83$) и приведены значения γ в различных точках сечения. Из него видно, что максимальное различие γ в точках на внешней окружности равно 0.0005, а разность между величиной γ в центре шнура и на внешней окружности 0.0I. Отсюда, в соответствии с /3/, можно сделать вывод о точности определения радиуса сечения шнура $\sim$I%.

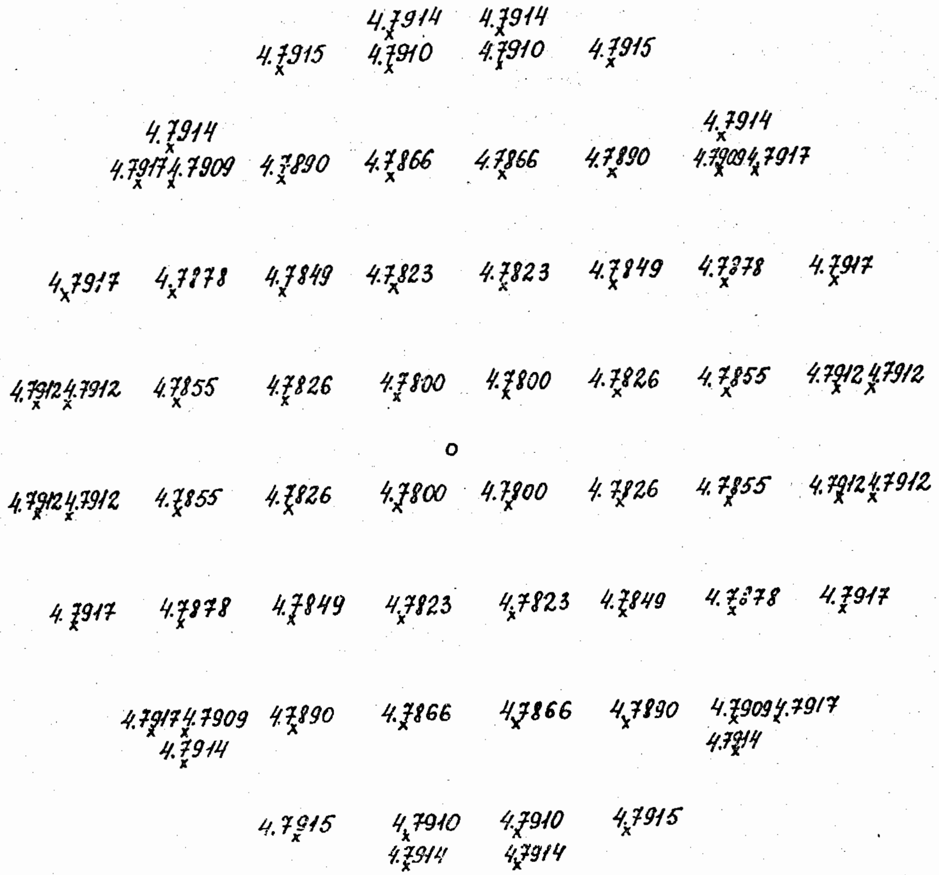
4.7914 4.7914
4.7915 4.7910 4.7910 4.7915
4.7914 4.7914
4.7917 4.7909 4.7890 4.7866 4.7866 4.7890 4.7909 4.7917
4.7917 4.7878 4.7849 4.7823 4.7823 4.7849 4.7878 4.7917
4.7912 4.7912 4.7855 4.7826 4.7800 4.7800 4.7826 4.7855 4.7912 4.7912
o
4.7912 4.7912 4.7855 4.7826 4.7800 4.7800 4.7826 4.7855 4.7912 4.7912
4.7917 4.7878 4.7849 4.7823 4.7823 4.7849 4.7878 4.7917
4.7917 4.7909 4.7890 4.7866 4.7866 4.7890 4.7909 4.7917
4.7914 4.7914
4.7915 4.7910 4.7910 4.7915
4.7914 4.7914

Рис.I

Можно проследить зависимость невязки $\Phi(r,z)$ от свободных членов γ_0 и η_0 уравнений (I) и (2). Выбор определенных значений γ_0 и η_0 связан с условиями на внешнее магнитное поле, в котором создается электронный сгусток. Так, для $a = 0.76$, $\gamma_0 = 5$ и $\eta_0 = 4.80$ получаем $\Phi = -0.1$, а для $\eta_0 = 4.82$ имеем $\Phi = 0.02$. Это значит, что при $4.80 < \eta_0 < 4.82$ радиус $a = 0.76$ является истинным решением.

Наконец, были проделаны расчеты для кольца с большим радиусом $r_0 = 30$ ($\bar{\bar{\varkappa}} = 0.83$). При этом в (4) и (5) учитывались члены, дающие поправки на кривизну. Форма сечения приведена на рис.2. Анализ результатов, получаемых в этой работе для электронного шнура и для кольца с "малой кривизной" ($\frac{a}{r_0} \ll 1$), дает основание считать, что изложенный алгоритм решения позволит находить самосогласованную форму для электронного кольца с большой плотностью частиц и с существенной кривизной ($\frac{a}{r_0} < 1$). Кроме этого, важной проблемой для современной теории ускорителей является самосогласованная форма двухкомпонентного сгустка, для нахождения которой изложенный метод, по-видимому, также пригоден.

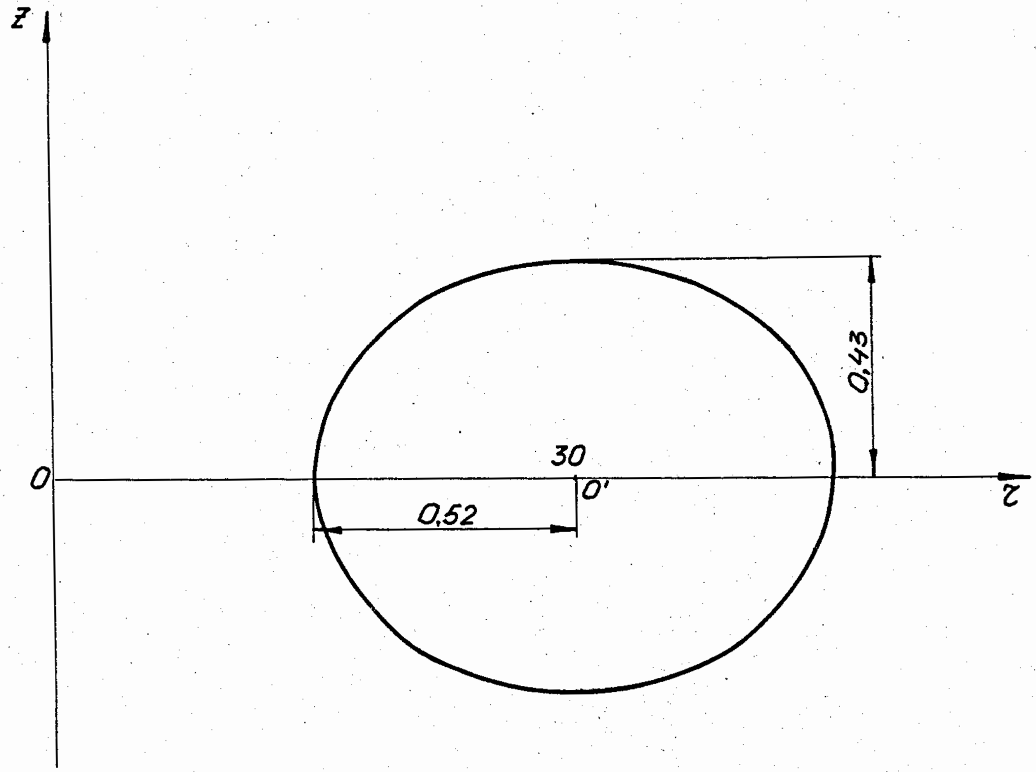

Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.И.Векслер и др. Доклад на IУ Международной конференции по ускорителям. США, Кембридж (1967). Препринт ОИЯИ Р9-3440-2, Дубна (1967); "Атомная энергия", 24, 317 (1968).

2. О.И.Ярковой. О стационарном состоянии аксиально-симметричной системы заряженных частиц. ЖТФ, XXXП, 1285 (1962).

3. О.И.Ярковой. Стационарное состояние пучка в накопителе с большим током. Препринт ОИЯИ 2182, Дубна (1965).

4. Э.А.Перельштейн, О.И.Ярковой. О стационарном состоянии поляризованного самофокусирующегося кольца (ускорение электронно-ионного сгустка). Препринт ОИЯИ Р9-4423, Дубна (1969).

5. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. Об одном методе введения параметра при решении краевых задач для нелинейных и обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. ЖВМ и МФ, т.7, № 5, 1967,стр. 1086-1095.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 октября 1970 г.