ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

5-5239

Е.П. Жидков

НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Специальность 041 - Теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна, 1970

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:
Член-корреспондент АН СССР доктор физико-математических наук, профессор В.С.Владимиров.

Доктор физико-математических наук, профессор А.Г.Свешников.

Доктор физико-математических наук В.А.Мещеряков.

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Институт физики высоких энергий, Серпухов.

Автореферат разослан " " 1970 г.

Защита диссертации состоится " " 1970 г.
на заседании Ученого Совета Лаборатории Теоретической физики ОИЯИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета Р.А.Асанов.

5-5239

Е.П. Жидков

НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Специальность 041 - Теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Многие физические проблемы (задачи нелинейной теории поля, движения заряженных частиц в электромагнитных полях, физики плазмы, теории рассеяния, теории дисперсионных соотношений и др.) приводят к решению нелинейных уравнений (дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных и т.д.).

Наряду с исследованиями, связанными с существованием и единственностью решения этих задач, а также с качественными и аналитическими подходами для описания поведения решений, важнейшую роль играют исследования, посвященные разработке численных методов решения таких задач. Последнее направление особенно актуально в связи с тем, что нелинейные математические задачи, возникающие при описании физических явлений, столь сложны, что не поддаются качественному исследованию или написанию решения в аналитическом виде без серьезных упрощений задачи. Подчас единственной возможностью исследования является разработка хорошего алгоритма численного решения задачи и его реализация на электронной вычислительной машине. Но и в тех случаях, когда задача допускает качественное или аналитическое исследование, численное решение может оказаться более оптимальным с точки зрения затрат времени на исследование.

В последнее время созданию эффективных численных методов решения нелинейных задач уделяется большое внимание как в СССР, так и в других странах. К этой области относятся работы таких крупных математиков, как А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Г.И.Марчук, М.М.Яненко, Р.Беллман, Л.Коллатц, П.Хенричи, П.Лэкс, Р.Рихтмайер.

Диссертация посвящена исследованию некоторых нелинейных задач современной физики методами вычислительной математики. Сформулируем некоторые такие задачи.

А) Задача о нахождении частицеподобных решений в нелинейной теории поля [I].

Рассмотрим уравнение

$$y'' + \frac{2}{x} y' - y + y^n = 0 \ , \ \ldots \qquad (I)$$

$$n > 0 \ , \ x > 0$$

Здесь $y(x)$ – неизвестная функция, удовлетворяющая условиям:

$$y(0) = y_0 < \infty \ , \ y'(0) = 0 \ , \ y(+\infty) = 0 \ \ldots \qquad (2)$$

y_0 – неизвестный положительный параметр.

Задача (I) – (2) встречается в нелинейной теории поля, в статистической теории ядра.

В связи с задачей (I) – (2) возникают вопросы о количестве решений, а также об их нахождении.

Б) Обратная задача теории рассеяния [2], [3].

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$u'' + [K^2 - V(x)]\, u = 0 \ \ldots \qquad (3)$$

с начальным условием

$$u(0) = 0 \ , \ u'(0) = 1 \ , \ \ldots \qquad (4)$$

где K является параметром.

Функция $V(x)$ $(0 \le x < +\infty)$ называется потенциалом.

Обычно предполагают, что

$$\int_0^\infty x\, |V(x)|\, dx < \infty \ \ldots \qquad (5)$$

При больших x решение задачи (3) – (4) имеет асимптотику

$$u(x, K) = A(K) \sin[Kx + \delta(K)] + O(1) \ , \ \ldots$$

где $A(K)$ называется предельной амплитудой, а $\delta(K)$ $(0 < K < \infty)$ – предельной фазой.

Обратная задача теории рассеяния состоит в нахождении потенциала $V(x)$, если задана предельная фаза $\delta(K)$ $(0 < K < \infty)$. Здесь предполагается, что $\delta(0) = \delta(\infty) = 0$.

Исследование разрешимости этой задачи проведено в работах В.А.Марченко, И.М.Гельфанда, Б.М.Левитана и З.С.Аграновича [2,3].

В) Вывод пучка заряженных частиц из ускорителя.

Важной задачей при создании ускорителей заряженных частиц является задача о подборе их параметров для обеспечения требуемых свойств выведенного из ускорителя пучка. Эта проблема распадается на целый ряд сложных математических задач, каждая из которых требует разработки метода ее решения.

Одна из возможных математических задач ставится следующим образом.

Требуется решить уравнение

$$\rho'' = \frac{2\rho'^2}{R_s + \rho} + (R_s + \rho) - \frac{1}{R_1}(R_s + \rho)^2 F(\rho) = -f(\varphi, \rho, \rho') \ . \qquad (6)$$

Здесь $\rho = \rho(\varphi)$ – искомая функция, φ – аргумент.

Уравнение (6) описывает движение частицы в магнитном поле ускорителя. В качестве системы координат выбрана полярная система. $R = R_s + \rho$ – полярный радиус; φ – полярный угол;

$R = R_s, (R_s = const)$ – равновесная орбита;

$\rho(\varphi)$ – отклонение частицы от равновесной орбиты;

R_1 – константа;

$F(\rho)$ – заданная функция, описывающая магнитное поле ускорителя.

Уравнение (5) рассматривается на промежутках

$$[\varphi_0 ; \varphi_1], [\varphi_1 ; \varphi_2], \ldots, [\varphi_{n-1} ; \varphi_n],$$

где $\varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n$. В промежутке $[\varphi_0 ; \varphi_1]$ решение уравнения (6) известно. В точках $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ решение $\rho(\varphi)$ претерпевает разрыв, который определяется следующим способом.

Рассмотрим промежутки

$$[\varphi_{i-1} ; \varphi_i] \text{ и } [\varphi_i ; \varphi_{i+1}], \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Пусть решение уравнения (6) и его производная в точке $\varphi = \varphi_i - 0$ имеют значения

$$\rho = \rho_\Lambda(\varphi_i), \quad \rho' = \rho'_\Lambda(\varphi_i),$$

а решение того же уравнения и его производная в точке $\varphi = \varphi_i + 0$ имеют значения

$$\rho = \rho_n(\varphi_i), \quad \rho' = \rho'_n(\varphi_i)$$

(Λ – левое, П – правое значение в точке φ_i).

Левые и правые значения в точке φ_i связаны соотношениями

$$\rho_n(\varphi_i) = \rho_\Lambda(\varphi_i) + \ell \rho'_\Lambda(\varphi_i) \tag{7}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$\rho'_n(\varphi_i) = \alpha_i + \rho'_\Lambda(\varphi_i) \tag{8}$$

Здесь ℓ – заданная константа, α_i для некоторых i равны нулю, а для остальных значений i они являются неизвестными величинами.

Среди φ_i ($i = 2, 3, \ldots, n$) есть несколько значений φ_{i_k}, $k = 1, 2, \ldots m$, ($\varphi_{i_1} < \varphi_{i_2} < \ldots < \varphi_{i_m} = \varphi_n$),

при которых задаются краевые условия для уравнения (6) одного из двух типов:

$$\rho_\Lambda(\varphi_{i_k}) = \rho_k, \tag{9}$$

или

$$\rho'_\Lambda(\varphi_{i_k}) = \rho'_k, \tag{10}$$

где ρ_k, ρ'_k – заданные величины.

В формуле (8) при $\varphi_i = \varphi_1$ и при $\varphi_i = \varphi_{i_k}$ ($k = 1, 2, \ldots, m-1$) α_i являются неизвестными величинами, а при остальных значениях φ_i величины α_i равны нулю.

Рассмотрим промежуток $[\varphi_1 ; \varphi_{i_1}]$. Он разбивается на промежутки $[\varphi_1 ; \varphi_2], [\varphi_2 ; \varphi_3], \ldots, [\varphi_{r-1} ; \varphi_r]$, $(\varphi_r = \varphi_{i_1})$.

Т.к. решение уравнения (6) в $[\varphi_0 ; \varphi_1]$ предполагаем известным, то из (7) следует, что известно и

$$\rho_n(\varphi_1) = \rho_\Lambda(\varphi_1) + \ell \rho'_\Lambda(\varphi_1).$$

В точке φ_{i_1} задано краевое условие типа (9) или (10).

В точках φ_i ($i = 2, 3, \ldots, r-1$) выполняются условия (7), (8) с $\alpha_i = 0$.

Требуется найти функцию $\rho = \rho(\varphi)$ и α_1 такие, чтобы функция $\rho = \rho(\varphi)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению (6) в промежутках $[\varphi_1 ; \varphi_2], \ldots, [\varphi_{r-1} ; \varphi_r]$, в точках $\varphi = \varphi_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, r-1$) выполнялись соотношения (7), (8), а в точках φ_1 и φ_r были выполнены заданные краевые условия.

На промежутках $[\varphi_{i_2} ; \varphi_{i_3}] \ldots, [\varphi_{i_{m-1}} ; \varphi_{i_m}]$ задача ставится аналогично тому, как это описано для промежутка $[\varphi_1 ; \varphi_{i_2}]$.

Приведенная постановка задача о выводе пучка относится к различным ускорителям (например, Серпуховскому).

Г) Задача о нахождении спектра стационарной турбулентности плазмы [4].

Нахождение спектра стационарной турбулентности плазмы [4,5] сводится к решению нелинейного интегрального уравнения

$$
\begin{aligned}
y(x) = a(x)\int_0^\infty K(\xi)U[y(x),\, y(x\sqrt{\xi})]\,d\xi\, + \\
+ b\Big\{\int_0^1 d\eta\int_0^\eta d\xi\, L(\xi,\eta)V[\xi,\eta,y(x),y(x\sqrt{\xi}),y(x\sqrt{\eta}),y(x\sqrt{1+\xi-\eta})] + \\
+ \int_1^\infty d\eta\int_\eta^\infty d\xi\, M(\xi,\eta)V[\xi,\eta,y(x),y(x\sqrt{\xi}),y(x\sqrt{\eta}),y(x\sqrt{1+\xi-\eta})] + \\
+ 2\int_1^\infty d\eta\int_0^1 d\xi\, N(\xi,\eta)W[\xi,\eta,y(x),y(x\sqrt{\xi}),y(x\sqrt{\eta}),y(x\sqrt{\xi+\eta-1})]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{II}
$$

Здесь $y(x)$ – неизвестная функция (спектр), $a(x)$, b, $K(\xi)$, U, L, V, M,N,W – заданные функции своих аргументов.
Развитию некоторых математических методов решения нелинейных задач и их применению к задачам физики А) – Г) и посвящена диссертация.

П. Диссертация состоит из двух частей, первая из которых посвящена развитию численных методов решения различных нелинейных задач математики, а вторая – применению этих методов к задачам А)-Г).

Первая часть состоит из семи глав, а вторая – из четырех. Остановимся кратко на содержании I-й и 2-й части диссертации.

В первой главе первой части развивается непрерывный аналог метода Ньютона применительно к нелинейному абстрактному уравнению. Пусть

$$y = \varphi(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{I2}$$

нелинейный оператор, переводящий пространство Банаха X ($x \in X$) в пространство Банаха Y ($y \in Y$). Оператор Y может быть определен не на всем пространстве X, а лишь в некоторой его области G.

Требуется решить уравнение

$$\varphi(x) = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{I3}$$

т.е. найти такой элемент $x^* \in G$, который переводится в нулевой элемент пространства Y. Элемент x^* может быть не единственным. Предположим, что $x \in X$ зависит от вещественного неотрицательного параметра t таким образом, что удовлетворяется дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varphi[x(t)]}{dt} = -\varphi[x(t)] \quad . \; . \; . \; . \; . \tag{I4}$$

Предполагая существование $\varphi'(x)$ и $\varphi'(x)^{-1}$ получим

$$\frac{dx}{dt} = -\varphi'(x)^{-1}\varphi(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{I5}$$

Если для последнего дифференциального уравнения задать начальное условие

$$x(t)\big|_{t=0} = x_0\,, \tag{I6}$$

то решение задачи Коши (I5)-(I6), вообще говоря, существует и единственно. При некоторых предположениях решение $x = x(t)$ имеет предел

$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x^*$, где x^* – решение уравнения (I3).

В работе М.К.Гавурина (см. [6]) изучается вопрос о сходимости непрерывного аналога метода Ньютона для уравнения (I3) к решению этого уравнения. В этой работе не предполагается, что решение поставленной задачи существует. Условия теоремы, доказанной в [6], гарантируют и существование решения уравнения (I3) и сходимость к нему непрерывного аналога метода Ньютона.

На наш взгляд, совмещение двух трудных проблем (существование решения и сходимость к нему некоторого процесса) ведет к трудно проверяемым условиям, при которых имеют место оба утверждения. Вопрос о существовании решения нелинейного уравнения часто целесообразно изучать независимо от метода его нахождения.

В первой главе первой части диссертации развивается непрерывный аналог метода Ньютона применительно к абстрактному уравнению (I3).

Доказывается сходимость метода в предположении существования одного или нескольких изолированных решений. В конце главы обосновывается приближенный метод решения задач Коши (I5)-(I6).

Результаты, изучаемые в этой главе, опубликованы в работах /4/-/11/.

Во второй главе первой части изучается нелинейное интегральное уравнение

$$u(x) = \int_a^b f[x, \xi, u(\xi)]\, d\xi , \qquad (I7)$$

где $f[x, \xi, u(\xi)]$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов.

В соответствии с теоремой главы первой уравнение (I7) заменяется системой

$$v(x,t) - \int_a^b f'_u [x, \xi, u(\xi,t)]\, v(\xi,t)\, d\xi = \int_a^b f[x,\xi,u(\xi)]\, d\xi - u(x,t) . \qquad (I8)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{dt} = v(x,t) \qquad (I9)$$

В системе (I8)-(I9) неизвестными являются функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, $a \le x \le b$, $0 \le t < +\infty$. При $t=0$ задается начальное условие

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad (20)$$

При некоторых допущениях о гладкости функции f, существовании решений уравнения (I7) и выборе функции $u_0(x)$, доказывается, что задача (I8)-(I9)-(20) разрешима для всех $0 \le t < +\infty$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t) = u^*(x)$, где $u^*(x)$ – решение уравнения (I7), а сходимость понимается в смысле метрики пространства $C^L[a,b]$. Результаты второй главы части первой опубликованы в работах [I2], [I3].

Глава третья первой части посвящена граничным задачам для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} + f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) = 0 \qquad (2I)$$

с краевыми условиями

$$y^{(i)}(a) = y^{(j)}(b) = 0 \qquad i = 0,1,\dots,k-1;\ j = 0,1,\dots,n-k-1. \qquad (22)$$

Нелинейная задача (2I)-(22) заменяется системой

$$\begin{cases} v^{(n)} + f'_{y^{(n-1)}}(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})\, v^{(n-1)} + \dots + f'_y(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})\, v = \\ \quad = -[y^{(n)} + f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})] & (23) \\ \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t} = v(x,t) , & (24) \end{cases}$$

которая решается при условиях

$$v^{(i)}(a) = v^{(j)}(b) = 0$$
$$i = 0,1,\dots,k-1; \quad j = 0,1,\dots, n-k-1 \qquad (25)$$

$$y(x,0) = y_0(x) \qquad (26)$$

При некоторых предположениях о гладкости функции f, существовании решений задачи (2I)-(22) и выборе функции $y_0(x)$ доказывается, что задача (23)-(26) разрешима для всех $0 \le t < +\infty$ и

$\lim\limits_{t\to\infty} y(x,t)=y^*(x)$, где $y^*(x)$ – решение краевой задачи (2I) – (22).

Затем полученный результат для краевой задачи в случае нелинейного уравнения n-го порядка переносится на случай уравнения второго порядка

$$y''+f(x,y)=0 \qquad (27)$$

с краевыми условиями

$$y(0)=y(1)=0 \qquad (28)$$

Конец главы третьей посвящен обоснованию применимости непрерывного аналога метода Ньютона к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка, не разрешенному относительно старшей производной

$$F(x,y,y',y'')=0 \qquad (29)$$

с краевыми условиями

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=0\\ \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=0\end{array}\right\} \qquad (30)$$

Здесь α_1, β_1, α_2, β_2 – заданные числа, причем $\alpha_i^2+\beta_i^2>0$, $i=$ I, 2.

Результаты третьей главы первой части опубликованы в работах [I4], [7], [8], [9], [I0], [I5], [I6], [II].

В четвертой главе первой части обосновывается возможность введения дополнительного параметра в случае решения задачи Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения.

В ней рассматривается уравнение

$$\Delta z(x,y)+f(x,y,z)=0 \qquad (3I)$$

в некоторой области G , ограниченной достаточно гладкой кривой Γ.

Для уравнения (3I) рассматривается задача Дирихле

$$z(x,y)\Big|_\Gamma=0 \qquad (32)$$

Задача (3I) – (32) заменяется системой

$$\begin{cases}\Delta v+f'_z(x,y,z)\cdot v=-[\Delta z+f(x,y,z)] & (33)\\ \dfrac{\partial z}{\partial t}=v & (34)\end{cases}$$

с граничными и начальными условиями:

$$v(x,y,t)\Big|_Б=0 \qquad (35)$$

Б – боковая поверхность цилиндра $\Omega=G\times[0<t<+\infty)$

$$z(x,y,0)=z_0(x,y) \qquad (36)$$

При некоторых допущениях о гладкости функции f , существовании решений задачи (3I) – (32) и выборе функции $z_0(x,y)$ доказывается, что

$\lim\limits_{t\to+\infty} z(x,y,t)=z^*(x,y)$, где $z^*(x,y)$ – решение задачи (3I) – (32).

Сходимость $z(x,y,t)$ к $z^*(x,y)$ понимается в смысле метрики $C^{(2)}[G]$ или более сильной метрики.

Результаты главы четвертой части первой опубликованы в работах [I7], [I8].

В главе пятой первой части изучается разностная схема для решения нелинейного интегрального уравнения (I7) с помощью системы (I8) - (I9) с начальным условием (20). Разностные схемы, подобные приведенным в главе пятой, приводятся в работе [I9].

Однако в цитируемой работе не исследован вопрос о разрешимости разностных уравнений и о сходимости решения разностного уравнения к решению уравнения (I7).

В главе пятой доказана как разрешимость разностных уравнений, так и сходимость полученного решения к решению интегрального уравнения.

Результаты главы пятой первой части опубликованы в работе [20].

Шестая глава первой части посвящена исследованию разностной схемы для решения краевой задачи (27) - (28). В случае метода введения дополнительного параметра решение задачи по разностной схеме (схема приведена в диссертации) разбивается на два этапа:

а) Приближенное решение линейной краевой задачи относительно $v(x)$ при фиксированной функции $y(x)$, входящей в $f'_y(x, y(x))$ и $[y'' + f(x,y)]$

$$v'' + f'_y(x, y(x))v = -[y'' + f(x,y)] \tag{37}$$

$$v(0) = v(1) = 0 \tag{38}$$

б) Выполнение шага интегрирования по переменной t по схеме

$$y(x, t+\tau) = y(x,t) + \tau v(x,t) \tag{39}$$

Для этапа а) применяется метод прогонки.

В шестой главе обосновывается сходимость решения по приведенной разностной схеме к решению задачи (27) - (28).

Для краевых задач типа (27) - (28) разностные схемы можно найти в работах [2I] - [23]. Однако во всех этих работах на $f'_y(x,y)$ накладывается ограничение типа

$$\sup f'_y = \eta < \pi^2 \; [23] \tag{40}$$

В главе шестой дается обоснование соответствующей разностной схемы без каких-либо ограничений на $f(x,y)$, кроме требования о ее гладкости.

Обширные исследования разностных схем более общего вида, чем схемы этапа а), можно встретить в работах А.Н.Тихонова, А.А.Самарского, Г.И.Марчука, М.М.Яненко.
Результаты главы шестой опубликованы в работах [24],[25].

В главе седьмой первой части приводятся примеры нелинейных задач глав пятой и шестой, которые были решены на ЭВМ, описанными в этих главах методами. Эти задачи интересны тем, что они нелинейны и имеют несколько решений. Часть вторая посвящена нелинейным задачам физики.

Глава первая второй части посвящена нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению, описывающему частицеподобные решения нелинейной теории поля (задача А) настоящего реферата).
В §2 этой главы доказывается отсутствие положительных решений краевой задачи (I)-(2) при $0 < n \leq$ I.
В §4 доказывается существование положительного решения задачи при I $< n \leq 3$.

Доказательство проведено таким образом, что наряду с существованием решения устанавливается и качественное поведение решений задачи Коши для уравнения (I).

Последнее обстоятельство оказывается полезным при численном нахождении решений. Численное нахождение частицеподобных решений приводится в §5.

Результаты главы первой части второй опубликованы в работах [26] - [28].

Во второй главе второй части рассматривается обратная задача теории рассеяния (задача Б настоящего реферата). Здесь предлагается новый метод решения задачи.

Рассмотрим уравнение

$$y'(x) = -\frac{v(x)}{k}\sin^2(kx+y) \qquad (4I)$$

с начальным условием

$$y(0)=0. \qquad (42)$$

Будем предполагать, что

$$\int_0^\infty x\,|v(x)|\,dx < \infty. \qquad (43)$$

Пусть $y(x,k)$ - решение задачи Коши (4I) - (42).

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} y(x,k) = \delta(k), \qquad (44)$$

где $\delta(k)$ - предельная фаза, соответствующая $v(x)$.

Назовем предельную фазу, полученную из решения задачи Коши (4I) - (42), расчетной предельной фазой ($\delta_p(k)$).

Кроме того, имеется некоторая экспериментальная фаза $\delta_э(k)$, удовлетворяющая условию $\delta_э(0) = \delta_э(\infty) = 0$.

Требуется найти такой потенциал $v(x)$, чтобы соответствующая ему расчетная фаза из задачи Коши (4I) - (42) совпала с заданной экспериментальной фазой.

Для решения этой задачи в диссертации используется непрерывный аналог метода Ньютона. Он приводит к следующим уравнениям.

$$-\frac{1}{k}\int_0^\infty h(s,t)\sin^2[ks+y(s,t)]\cdot e^{-\frac{1}{k}\int_s^\infty v(\xi,t)\sin 2[k\xi+y(\xi,t)]\,d\xi}\,ds = -\left[\delta_p(k,t)-\delta_э(k)\right]. \qquad (45)$$

$$v'_t(x,t) = h(x,t) \qquad (46)$$

$$v(x,0) = v_0(x) \qquad (47)$$

Численный метод решения обратной задачи рассеяния сводится к следующему.

Задача Коши (4I) - (42) решается при заданном начальном значении потенциала $v_0(x)$.

В результате получаем $\delta_p(k,0)$.

Подставив $v_0(x)$, $\delta_p(k,0), y(x,0)$ в уравнение (45), получаем интегральное уравнение первого рода относительно функции $h(x,t)$.

Уравнение (45) решается методом А.Н.Тихонова регуляризации некорректных задач [29] .

Зная h, совершаем один шаг τ интегрирования по переменной t, используя уравнение (46). В результате находим новое значение потенциала $v(x,\tau)$. Далее процесс вычислений повторяется с $v(x,\tau)$.

Вычисления заканчиваются, если $h(x,t)$ оказывается достаточно малой по абсолютной величине функцией (удовлетворяет требуемым условиям точности).

В главе второй приводятся результаты численной обработки экспериментальных данных описанным методом. Результаты главы второй части второй опубликованы в [30].

Глава третья части второй посвящена нелинейной задаче В – расчета вывода пучка заряженных частиц из ускорителя. Предложенный здесь метод расчета применяется для подобных задач впервые.

В диссертации показана его большая эффективности по сравнению с ранее применяемыми методами. В основе лежит метод введения дополнительного параметра.

Приведенные результаты численных расчетов относятся к Серпуховскому ускорителю и представляют практический интерес. Результаты главы третьей части второй опубликованы в [31].

Четвертая глава части второй содержит описание метода численного решения задачи Γ и результаты численных расчетов. Метод введения дополнительного параметра позволил впервые вычислить спектр стационарной турбулентности плазмы во всей области волновых чисел $0 \leq K < \infty$.

Полученные результаты очень хорошо согласуются с результатами вычисления спектра в асимптотической области [4] . Результаты четвертой главы части второй опубликованы в работах [32] - [35].

Результаты диссертации докладывались на совещаниях по решению задач ядерной физики в Дубне в 1964, 1966, 1969 г.г., на втором конгрессе болгарских математиков в Варне в 1967 году, на Международном конгрессе по физике ионизованных газов в Бухаресте в 1969 году.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Б.Гласко, Ф.Лерюст, Я.П.Терлецкий, С.Ф.Шушурин. Исследование частицеподобных решений нелинейного уравнения скалярного поля. ЖЭТФ, 1958г., 35, №2(8), стр. 452-457.
2. Агранович З.С. и Марченко В.А. Обратная задача теории рассеяния, Изд-во Харьковского университета, 1960 г.
3. И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан, Изд-во АН СССР, Сер. матем., 15, 309 (1951).
4. С.Б.Пикельнер, В.Н.Цытович, ЖЭТФ, 55, 977 (1968)
5. Е.П.Жидков, В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович, Чой Зай Хён , препринт ОИЯИ, Р9-4464, Дубна, 1969 г.
6. М.К.Гавурин, Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных процессов. Изв. Вузов, математика, 1958г., 5(6), 18-31.
7. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. Об одном методе введения параметра при решении краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. ЖВМ и МФ, 1967 г., т.7, №5, стр. 1086-1095.
8. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. Препринт ОИЯИ, 5-2959, 1966 г.
9. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. Препринт ОИЯИ, 5-3368, 1967 г.
10. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. Препринт ОИЯИ, 5-3263, 1967г. , Материалы совещания по математическим методам решения задач ядерной физики. Дубна, 21-25 июня, 1966 г., стр. 16-23.

II. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. Методы решения нелинейных уравнений путем введения параметра.
Второй съезд болгарских математиков, 28.8-7.9. I967 г.
Резюме. Изд-во Болгарской Академии наук, София, I967г.
стр. 35.

I2. Е.П.Жидков, Г.А.Ососков. Препринт ОИЯИ, Р5-3433, I967 г.

I3. Е.П.Жидков, Г.А.Ососков. ДАН СССР, I968г., т.I80, №6, стр. I279-I282.

I4. Е.П.Жидков, Чой Зай Хен. Препринт ОИЯИ, II-3427, I967 г.

I5. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. ДАН СССР, I967 г., т. I74, №2, стр. 27I-273.

I6. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. ДАН СССР, I968г., т. I80, №I, стр. I8-2I.

I7. Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко. Препринт ОИЯИ, Р5-4I28, I968 г.

I8. Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко. ДАН СССР, I969 г., т. I87, №4, стр. 723-726.

I9. Д.Ф.Давиденко. ДАН СССР, I965г., I62, №3, стр. 499-502.

20. Е.П.Жидков, Г.А.Ососков. Препринт ОИЯИ, Р5-4338, I969 г.

2I. И.С.Березин, Н.П.Жидков. Методы вычислений. ГИ ФМЛ, I959 г.

22. P. Henrici, Discrete variable mathods in ordinary differential equation, New York, John Wiley and Sons, 1962.

23. M. Lees, Discrete methods for nonlinear two-point boundary value problems.
Numerical solution of partial differential equations. Proc. Symposium held Univ. Maryland, College Park, Maryland, May 3-8, 1965, New York, Acad Press, 1966.

24. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. Препринт ОИЯИ, 5-3963, I968 г.

25. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. ЖВМ и МФ, Т. 9, №2, I969, стр. 442-447.

26. Е.П.Жидков, В.П.Шириков. Препринт ОИЯИ, Р5-I3I9, I963 г.

27. Е.П.Жидков, В.П.Шириков. ЖВМ и МФ, I964 г., т.4, №5, стр. 804-8I6.

28. Е.П.Жидков, В.П.Шириков, И.В.Пузынин. Препринт ОИЯИ, 2005, I965 г., стр. I3-I7.
Материалы совещания по математическим методам решения задач ядерной физики. Дубна, I7-20 ноября I964 г.

29. А.Н.Тихонов. ДАН СССР, том I5I, №3, I963 г., 50I-504.

30. Я.Визнер, Е.П.Жидков, В.Лелек. Препринт ОИЯИ, Р5-3895,I968г.

3I. Е.П.Жидков, Т.В.Рыльцева, Б.В.Феоктистов. Препринт ОИЯИ, 5-482I, Дубна, I969 г.

32. Е.П.Жидков, В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович, Чой Зай Хён. Препринт ОИЯИ, Р9-4464, I969 г.

33. Е.П.Жидков, В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович, Чой Зай Хён. Препринт ОИЯИ, II-4655. Материалы совещания по программированию и вычислительным методам решения физических задач (Дубна 27-30 мая I969 г.), часть I, I969 г., стр. 25-29.

34. E.P. Jidkov, V.A. Liperovsky, V.G. Makhan'kov, S.B. Pikelner, V.N. Tsytovich, Che Ze Hen. Report on 9th Intern.
Conf. on Joniz. Gases, Phenom. Bucharest, 1969 г.

35. V.G. Makhankov, E.P. Zhidkov, V.N. Tsytovich and Che Ze Hen. Plasma Physics, Vol. 12, pp. 191 to 201.
Pergamon Press 1970.

36. Е.П.Жидков. Препринт ОИЯИ, II-4655. Материалы совещания по программированию и вычислительным методам решения физических задач (Дубна 27-30 мая 1969 г.) часть I, Дубна, стр. 15-23.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 июля 1970 года.