СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

5-5202

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

С.И. Сердюкова

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КРУГЛОМ ЦИЛИНДРЕ. ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

1970

5-5202

С.И. Сердюкова

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КРУГЛОМ ЦИЛИНДРЕ. ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

В предлагаемой работе строятся ряды по функциям Бесселя, представляющие термоупругие напряжения, возникающие в цилиндре в результате его быстрого нагрева. Рассматривается круглый бесконечный цилиндр радиуса R. За малый промежуток времени t_0 температура цилиндра возрастает от нуля до $2B$ градусов по закону

$$T(t) = \begin{cases} B(1-\cos At), & 0 \le t \le t_0 = \pi/A; \\ 2B, & t > t_0. \end{cases}$$

(см. рис. 1).

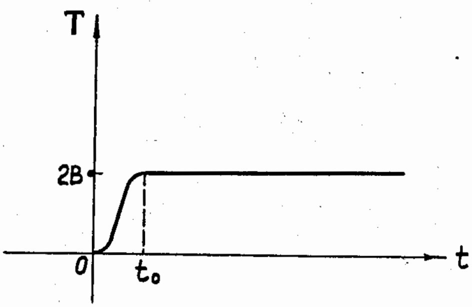

Рис. 1

В результате нагрева в цилиндре возникают упругие деформации и напряжения. Обозначим через $u(r,z,t)$ радиальное смещение в момент времени t точки, занимавшей в начальный момент $t=0$ положение (r,z), и через $w(r,z,t)$ – соответствующее смещение в направлении оси цилиндра (оси z). Возникающие термоупругие напряжения обозначим через σ_{rr} (сжимающее напряжение в радиальном направлении), σ_{zz} (сжимающее напряжение в направлении оси цилиндра), $\sigma_{\phi\phi}$ (растягивающее тангенциальное напряжение), σ_{rz} ("скалывающее" напряжение). Эти напряжения представлены на рис. 2. Термоупругие напряжения и смещения связаны /1/ соотношениями

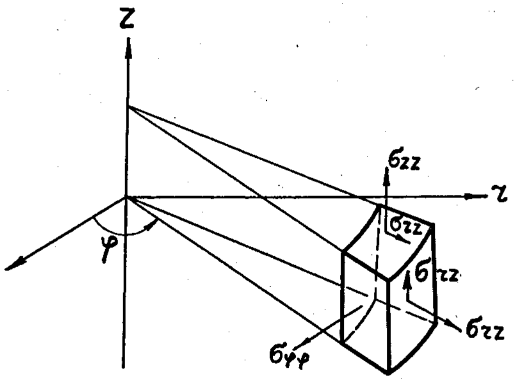

Рис. 2

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= 2G\left\{\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\sigma}{1-2\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\alpha\frac{1+\sigma}{1-2\sigma}T(t)\right\},\\
\sigma_{\phi\phi} &= 2G\left\{\frac{u}{r}+\frac{\sigma}{1-2\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\alpha\frac{1+\sigma}{1-2\sigma}T(t)\right\},\\
\sigma_{zz} &= 2G\left\{\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\sigma}{1-2\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\alpha\frac{1+\sigma}{1-2\sigma}T(t)\right\},\\
\sigma_{rz} &= G\left\{\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right\}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Основные уравнения движения таковы /1/:

$$
\begin{cases}
\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\dfrac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\dfrac{\sigma_{rr}-\sigma_{\phi\phi}}{r},\\[2ex]
\rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\dfrac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\dfrac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\dfrac{\sigma_{rz}}{r}.
\end{cases}
$$

Здесь G – модуль сдвига, σ – коэффициент Пуассона, α – температурный коэффициент линейного расширения, ρ – масса единицы объема.

Поверхность цилиндра свободна от внешних воздействий:

$$\sigma_{rr}\big|_{r=R}=\sigma_{rz}\big|_{r=R}=0.$$

При рассматриваемом распределении температуры осевое смещение w равно нулю, а радиальное смещение u не зависит от z. Соответственно скалывающее напряжение σ_{rz} равно нулю. Таким образом, рассматриваемая задача является плоской. Термоупругие напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\phi\phi}$, σ_{zz} определяются радиальным смещением, которое является решением следующей смешанной задачи:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{2G}{\rho}\,\dfrac{1-\sigma}{1-2\sigma}\,\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial\, r u}{\partial r}\right), \quad 0\le r\le R,\ t\ge 0,\\[2ex]
u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0,\\[2ex]
u(0,t)=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{\sigma}{1-\sigma}\,\dfrac{u}{r}\right|_{r=R}=\alpha\,\dfrac{1+\sigma}{1-\sigma}\,T(t).
\end{cases}
\tag{2}
$$

Решение такой задачи представляется в виде ряда по функциям Бесселя. Надо выписать этот ряд в явном виде. Используется метод разделения переменных. Сначала выписывается решение на интервале $[0,t_0]$. Полученные при этом $u(r,t_0)$ и $u_t(r,t_0)$ используются в качестве начальных данных при построении решения для $t>t_0$.

I. Радиальное смещение при $0 \le t \le t_0$

Для того чтобы применить метод разделения переменных, надо избавиться в (2) от неоднородности в граничном условии при $r = R$. Делаем замену переменных

$$u = u_0 + v,$$

где u_0 – некоторая гладкая функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям. Тогда v является решением следующей смешанной задачи с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{2G}{\rho}\,\dfrac{1-\sigma}{1-2\sigma}\,\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial r v}{\partial r}\right) + f(r,t), \\ v\,\Big|_{t=0} = -u_0(r,0), \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\dfrac{\partial u_0}{\partial t}\Big|_{t=0}, \\ v(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\sigma}{1-\sigma}\,\dfrac{v}{r}\Big|_{r=R} = 0. \end{cases}$$

Потребуем дополнительно, чтобы $f(r,t)$ удовлетворяла однородным граничным условиям:

$$f(0,t) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sigma}{1-\sigma}\,\frac{f}{r}\Big|_{r=R} = 0.$$

Вспомогательную функцию u_0 ищем в таком виде:

$$u_0 = Cr + Dr\,(1 + Er^2)\cos At.$$

Параметры C, D, E определяются однозначно:

$$C = B\alpha(1+\sigma), \quad D = -\frac{C}{1+(3-2\sigma)ER^2},$$

$$E = -A^2 / \left((3-2\sigma)A^2R^2 + 8\,\frac{2G}{\rho}\,\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\right).$$

Прямая подстановка показывает, что

$$f(r,t) = (Kr + Lr^3)\cos At,$$

$$K = A^2 D + 8DE\,\frac{2G}{\rho}\,\frac{1-\sigma}{1-2\sigma},$$

$$L = A^2 DE.$$

Итак, задача (2) свелась к следующей смешанной задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{2G}{\rho}\,\dfrac{1-\sigma}{1-2\sigma}\,\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial rv}{\partial r}\right) + (Kr + Lr^3)\cos At, \\ v(r,0) = -(C+D)r - DEr^3, \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \\ v(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\sigma}{1-\sigma}\,\dfrac{v}{r}\Big|_{r=R} = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

К этой задаче применим метод разделения переменных. Решение ищем в виде ряда по системе собственных функций оператора:

$$\begin{cases} \mathfrak{L} v = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial r v}{\partial r}\right), \quad 0 \le r \le R, \\ v(0) = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\sigma}{1-\sigma}\,\dfrac{v}{r}\Big|_{r=R} = 0. \end{cases}$$

Это самосопряженный оператор. В пространстве L_2 с весом r этому оператору отвечает /2/ полная ортогональная система собственных функций:

$$\{J_1(\lambda_k r)\}, \qquad \text{причем} \quad \mathfrak{L} J_1(\lambda_k r) = -\lambda_k^2 J(\lambda_k r).$$

Здесь $J_1(x)$ – функция Бесселя первого порядка, а λ_k являются решениями следующего уравнения:

$$x\,J_1'(x) + \frac{\sigma}{1-\sigma}\,J_1(x)\Big|_{x=\lambda R} = 0. \qquad (4)$$

Функции $f(r,t)$ и $v(r,0)$, удовлетворяющие однородным граничным условиям, разлагаются в ряды по $J_1(\lambda_k r)$:

$$f(r,t)=\sum_1^\infty f_k(t)J_1(\lambda_k r)=\cos At\sum_1^\infty f_k(0)J_1(\lambda_k r),$$

$$v(r,0)=\sum_1^\infty v_k^0 J_1(\lambda_k r).$$

Решение (3) также может быть представлено в виде ряда по $J_1(\lambda_k r)$:

$$v(r,t)=\sum_1^\infty v_k(t)J_1(\lambda_k r).$$

При этом каждый из коэффициентов этого ряда является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} \ddot v_k+\lambda_k^2\dfrac{2G}{\rho}\dfrac{1-\sigma}{1-2\sigma}v_k=f_k(0)\cos At, \\ v_k(0)=v_k^0, \quad \dot v_k(0)=0. \end{cases}$$

Отсюда находим $v_k(t)$:

$$v_k(t)=\frac{f_k(0)\left(\cos At-\cos\lambda_k\sqrt{\frac{2G}{\rho}\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}}\,t\right)}{\lambda_k^2\frac{2G}{\rho}\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}-A^2}+v_k^0\cos\lambda_k\sqrt{\frac{2G}{\rho}\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}}\,t. \qquad (5)$$

Итак, при $0\le t\le t_0=\pi/A$

$$u(r,t)=Cr+Dr(1+Er^2)\cos At+\sum_1^\infty\left(-z_k\cos At+(v_k^0+z_k)\cos\lambda_k\sqrt{\frac{2G}{\rho}\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}}\,t\right),$$

$$z_k=\frac{f_k(0)}{A^2-\lambda_k^2\frac{2G}{\rho}\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}}, \quad f_k(0)=\frac{\int_0^R r(Kr+Lr^3)J_1(\lambda_k r)dr}{\int_0^R rJ_1^2(\lambda_k r)dr}, \qquad (6)$$

$$v_k^0=-\int_0^R r(Cr+Dr(1+Er^2))J_1(\lambda_k r)dr\Big/\int_0^R rJ_1^2(\lambda_k r)dr.$$

II. Радиальное смещение при $t>t_0$

При $t>t_0$ радиальное смещение является решением следующей смешанной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{2G}{\rho}\dfrac{1-\sigma}{1-2\sigma}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac1r\dfrac{\partial ru}{\partial r}\right), \\ u(r,t_0)=Cr-Dr(1+Er^2)+\sum_1^\infty\left(z_k+(v_k^0+z_k)\cos\lambda_k\sqrt{\dfrac{2G}{\rho}\dfrac{1-\sigma}{1-2\sigma}}\dfrac{\pi}{A}\right)J_1(\lambda_k r), \\ u_t(r,t)=-\sum_1^\infty\left(\lambda_k\sqrt{\dfrac{2G}{\rho}\dfrac{1-\sigma}{1-2\sigma}}(v_k^0+z_k)\sin\lambda_k\sqrt{\dfrac{2G}{\rho}\dfrac{1-\sigma}{1-2\sigma}}\dfrac{\pi}{A}\right)J_1(\lambda_k r), \\ u(0,t)=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{\sigma}{1-\sigma}\dfrac{u}{r}\Big|_{r=R}=2B\alpha\dfrac{1+\sigma}{1-\sigma}. \end{cases}$$

Опять освобождаемся от неоднородности в граничных условиях. Для этого делаем замену : $u=\gamma r+w$.

Параметр γ подбирается так, чтобы γr удовлетворяла правому граничному условию:

$$\gamma=2B\alpha(1+\sigma).$$

Тогда w является решением смешанной задачи с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\dfrac{2G}{\rho}\dfrac{1-\sigma}{1-2\sigma}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac1r\dfrac{\partial rw}{\partial r}\right), \\ w(r,t_0)=u(r,t_0)-\gamma r=\sum_1^\infty w_k^0 J_1(\lambda_k r), \\ w(0,t)=0, \quad \dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{\sigma}{1-\sigma}\dfrac{w}{r}\Big|_{r=R}=0. \end{cases}$$

Здесь

$$w_k^0=\left(\int_0^R r((C-\gamma)r-Dr(1+Er^2))J_1(\lambda_k r)dr\Big/\int_0^R rJ_1^2(\lambda_k r)dr\right)+$$
$$+z_k+(v_k^0+z_k)\cos\lambda_k\sqrt{\frac{2G}{\rho}\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}}\frac{\pi}{A}.$$

Решение этой задачи ищем в виде ряда по $J_1(\lambda_k r)$

$$w(r,t)=\sum_{1}^{\infty} w_k(t)\, J_1(\lambda_k r).$$

Каждый из коэффициентов этого ряда является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} \ddot{w}_k+\lambda_k^2\,\dfrac{2G}{\rho}\,\dfrac{1-\sigma}{1-2\sigma}\,w_k=0, \\ w_k(t_0)=w_k^0, \\ \dot{w}(t_0)=-\lambda_k\sqrt{\dfrac{2G}{\rho}\,\dfrac{1-\sigma}{1-2\sigma}}\,(v_k^0+z_k)\sin\lambda_k\sqrt{\dfrac{2G}{\rho}\,\dfrac{1-\sigma}{1-2\sigma}}\,\dfrac{\pi}{A}. \end{cases}$$

Отсюда находим $w_k(t)$:

$$w_k(t)=w_k^0\cos\lambda_k\sqrt{\frac{2G}{\rho}\,\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}}\left(t-\frac{\pi}{A}\right)-(v_k^0+z_k)\sin\lambda_k\sqrt{\frac{2G}{\rho}\,\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}}\left(t-\frac{\pi}{A}\right). \quad (7)$$

Итак, при $t>t_0$ радиальное смещение задается таким рядом:

$$u(r,t)=\gamma r+\sum_{1}^{\infty}\left(w_k^0\cos\lambda_k\sqrt{\frac{2G}{\rho}\,\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}}\left(t-\frac{\pi}{A}\right)-(v_k^0+z_k)\sin\lambda_k\sqrt{\frac{2G}{\rho}\,\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}}\left(t-\frac{\pi}{A}\right)\right)J_1(\lambda_k r).$$

Остается подставить разложение (5) и только что полученное разложение в (1). Тогда получим разложения по $J_1(\lambda_k r)$ для термоупругих напряжений.

III. Термоупругие напряжения

При $0\le t\le t_0=\pi/A$.

$$\sigma_{rr}(r,t)=2G\Big\{\frac{1}{1-2\sigma}(C+D\cos At)+\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}DE\,r^2\cos At+$$
$$+\sum_{1}^{\infty}v_k(t)\Big(\lambda_k\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}J_0(\lambda_k r)-\frac{J_1(\lambda_k r)}{r}\Big)-B\alpha\frac{1+\sigma}{1-2\sigma}(1-\cos At)\Big\},$$

$$\sigma_{\phi\phi}(r,t)=2G\Big\{\frac{1}{1-2\sigma}(C+D\cos At)+\frac{1+2\sigma}{1-2\sigma}DE\,r^2\cos At+$$
$$+\sum_{1}^{\infty}v_k(t)\Big(\lambda_k\frac{\sigma}{1-2\sigma}J_0(\lambda_k r)+\frac{J_1(\lambda_k r)}{r}\Big)-B\alpha\frac{1+\sigma}{1-2\sigma}(1-\cos At)\Big\},$$

$$\sigma_{zz}(r,t)=2G\Big\{\frac{2\sigma}{1-2\sigma}(C+D\cos At)+\frac{4\sigma}{1-2\sigma}DE\,r^2\cos At+$$
$$+\sum_{1}^{\infty}v_k(t)\,\lambda_k\frac{\sigma}{1-2\sigma}J_0(\lambda_k r)-B\alpha\frac{1+\sigma}{1-2\sigma}(1-\cos At)\Big\}.$$

IV. Термоупругие напряжения при $t>t_0=\pi/A$

$$\sigma_{rr}(r,t)=2G\Big\{\frac{\gamma}{1-2\sigma}+\sum_{1}^{\infty}w_k(t)\Big(\lambda_k\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}J_0(\lambda_k r)-\frac{J_1(\lambda_k r)}{r}\Big)-2B\alpha\frac{1+\sigma}{1-2\sigma}\Big\},$$

$$\sigma_{\phi\phi}(r,t)=2G\Big\{\frac{\gamma}{1-2\sigma}+\sum_{1}^{\infty}w_k(t)\Big(\lambda_k\frac{\sigma}{1-2\sigma}J_0(\lambda_k r)+\frac{J_1(\lambda_k r)}{r}\Big)-2B\alpha\frac{1+\sigma}{1-2\sigma}\Big\},$$

$$\sigma_{zz}(r,t)=2G\Big\{\frac{2\gamma\sigma}{1-2\sigma}+\sum_{1}^{\infty}w_k(t)\,\lambda_k\frac{\sigma}{1-2\sigma}J_0(\lambda_k r)-2B\alpha\frac{1+\sigma}{1-2\sigma}\Big\}.$$

Здесь $v_k(t)$, $w_k(t)$ определены формулами (5), (7), постоянные α, σ, G определены в начале работы, λ_k являются решениями уравнения (4).

Литература

1. Г. Паркус. Неустановившиеся температурные напряжения, стр. 11, М., Физматгиз, 1963.
2. Э.Ч. Титчмарш. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, часть 1, стр. 29, ИЛ, М., 1960-1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 июня 1970 года.