СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

5 - 4954

Чой Зай Хен

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1970

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛВТА

5 - 4954

Чой Зай Хен

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть задано нелинейное операторное уравнение

$$\Phi(x) = \theta \tag{I}$$

в пространстве Банаха X.

В данной работе предлагается один вариант для решения уравнения (I) и иллюстрируется пример, показывающий применение этого метода к решениям конкретных функциональных уравнений.

В разделе I формулируется и доказывается теорема существования решения. Для этого используется рекурентный процесс с некоторым вещественным параметром δ :

$$x_{n+1} = x_n - [\Phi'(x_n) + \delta E]^{-1} \Phi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

В разделе 2, как пример, рассматривается применение настоящего метода к решениям нелинейных систем алгебраических уравнений.

I. Теорема существования

Теорема I. Допустим, что оператор Φ определен в некотором шаре $B(x_0, r) \subset X$ и непрерывно дифференцируем по Фреше, причем производная $\Phi'(x)$ имеет обратный оператор $\Phi'^{-1}(x)$.

Если существует вещественный параметр δ, удовлетворяющий условиям:

I) для любых элементов $x_1, x_2 \in B(x_0, r)$

$$\| \Phi'(x_1) - \Phi'(x_2) \| \leq |\delta| ,$$

2) для любого элемента $x \in B(x_0, r)$

$$\| \Phi'^{-1}(x) \| \le K, \quad |\delta| K < \frac{1}{3},$$

то в шаре $B(x_0, r)$ уравнение (I) имеет единственное решение $\bar{x}$ и последовательность элементов $\{x_n\}$, определяемых формулой (2), сходится к решению $\bar{x}$.

Скорость сходимости оценивается неравенством

$$\| \bar{x} - x_n \| \le V \left(\frac{2|\delta| K}{1-|\delta| K} \right)^n .$$

Здесь

$$V = \frac{K\varepsilon}{1 - 3|\delta| K},$$

где

$$\varepsilon = \| \Phi(x_0) \| .$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, вводим одну лемму, которая является видоизменением теоремы Банаха /I/.

<u>Лемма</u>. Пусть линейный оператор Ψ отображает X в себя и имеет обратный оператор Ψ^{-1}, ограниченный константой K: $\| \Psi^{-1} \| \le K$. Тогда линейный оператор $\Psi + \delta E$ с некоторым вещественным параметром δ, удовлетворяющим неравенству $K|\delta| < 1$, имеет обратный оператор $(\Psi + \delta E)^{-1}$, причем оценкой служит

$$\| (\Psi + \delta E)^{-1} \| \le A,$$

где

$$A = \frac{K}{1 - |\delta| K} .$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы I.

В силу условий теоремы I оператор $\Phi'(x)$ удовлетворяет условию леммы, следовательно, для любого $x \in B(x_0, r)$ получается оценка

$$\| (\Phi'(x) + \delta E)^{-1} \| \le A . \qquad \text{(I.I)}$$

Используя метод математической индукции, получаем, что элементы x_n, $n = $ I,2,..., определенные формулой (2), принадлежат шару $B(x_0, r)$.

Очевидно, что в силу неравенства (I.I) при $n = 0$ из формулы (2) вытекает

$$\| x_1 - x_0 \| \leq A\varepsilon ,$$

т.е.

$$x_1 \in B(x_0, r) .$$

Предполагая, что элементы x_1, $x_2, \ldots, x_\ell$, определенные по формуле (2) при $n = 0, 1, \ldots, \ell-1$, принадлежат шару $B(x_0, r)$, оценим норму оператора $\Phi(x_{n+1})$.

Так как оператор $\Phi(x_{n+1})$ можно представить в виде

$$\Phi(x_{n+1}) = \Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n) - \Phi'(x_n)(x_{n+1} - x_n) - \delta(x_{n+1} - x_n) ,$$

то

$$\| \Phi(x_{n+1}) \| \leq 2 |\delta| \, \| x_{n+1} - x_n \| . \tag{I.2}$$

Поэтому, если элемент $x_{\ell+1}$ определен формулой (2) при $n = \ell$, то в силу неравенства (I.I), (I.2) из формулы (2) получается

$$\| x_{n+2} - x_{n+1} \| \leq \rho \| x_{n+1} - x_n \| , \quad n = 0, 1, \ldots, \ell-1 , \tag{I.3}$$

где

$$\rho = 2 |\delta| A .$$

Отсюда вытекает, что

$$\| x_{\ell+1} - x_0 \| \leq A\varepsilon S_\ell , \tag{I.4}$$

где

$$S_\ell = \frac{1 - \rho^{\ell+1}}{1 - \rho} .$$

В силу условий теоремы последовательность $\{S_n\}$ монотонно возрастает и имеет конечный предел :

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S ,$$

где

$$S = \frac{1}{1 - \rho} .$$

Следовательно, при любом $\ell \geq 0$ справедливо следующее неравенство

$$\| x_{\ell+1} - x_0 \| \leq A\varepsilon S_\ell < A\varepsilon S = r ,$$

т.е.

$$x_{\ell+1} \in B(x_0, r) .$$

Теперь докажем, что последовательность $\{x_n\}$ сходится. Для любого целого числа $j > 0$ справедливо неравенство

$$\| x_{n+j} - x_n \| \le A\varepsilon (S_{n+j-2} - S_{n-2}) . \qquad (I.5)$$

Переходя к пределу по n, из (I.5) получим

$$\lim_{n\to\infty} \| x_{n+j} - x_n \| \le A\varepsilon (S - S) = 0 .$$

Это значит, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому элементу $\bar{x} \in B(x_0,r)$. Очевидно, что этот предел $\bar{x}$ является решением уравнения (I).

Предположим, что существует еще другое решение x^*. Тогда разность $\bar{x} - x^*$ можно представить в виде

$$\bar{x} - x^* = [\Phi'(x) + \delta E]^{-1} [\Phi(\bar{x}) - \Phi(x^*) - \Phi'(x)(\bar{x} - x^*) - \delta(\bar{x} - x^*)] . \qquad (I.6)$$

Оценивая норму обеих частей равенства (I.6), получаем

$$\| \bar{x} - x^* \| \le \rho \| \bar{x} - x^* \| .$$

Но так как $\rho < 1$, то $\| \bar{x} - x^* \| = \theta$.

Следовательно, при выполнении условий теоремы уравнение (I) имеет только одно решение.

Теперь оценим скорость сходимости.

При $j \to \infty$ из неравенства

$$\| x_{n+j} - x_n \| \le \sum_{k=n}^{n+j-1} \| x_{k+1} - x_k \|$$

вытекает оценка

$$\| \bar{x} - x_n \| \le r \left(\frac{2|\delta| K}{1 - |\delta| K} \right)^n .$$

Итак, теорема полностью доказана.

2. Применение к решению систем нелинейных алгебраических уравнений

Пусть нам требуется решить систему алгебраических уравнений, заданных в некоторой m-мерной области $T_m \subset R_m$

$$
\begin{aligned}
&f_1\ (t_1,\dots,t_m)=0\\
&f_2\ (t_1,\dots,t_m)=0\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&f_m\ (t_1,\dots,t_m)=0.
\end{aligned}
\tag{2.I}
$$

Определим норму вектора $X=(t_1,\dots,t_m)\in R_m$, как обычно, соотношением $\|X\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m} t_i^2}$ и будем считать R_m b-пространством.

Полагая $y=(f_1,\dots,f_m)$, $y=\Phi(x)$, можно считать систему (2.I) операторным уравнением

$$\Phi(x)=\theta.$$

Теорема 2. Допустим, что функции f_i, $i=1,2,\dots,m$ в некоторой области $\bar{T}_m\subset T_m$ непрерывно дифференцируемы по аргументам t_j, $j=1,2,\dots,m$, и определитель матрицы Якоби отличен от нуля:

$$
|J(x)|=\begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial t_m}\\
\frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial t_m}\\
\dots & \dots & \dots\\
\frac{\partial f_m}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial t_m}
\end{vmatrix}\neq 0,
$$

а

$$\frac{1}{\sqrt{|J(x)|^2}}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^2}\le K,$$

где a_{ij} – алгебраическое дополнение элемента $\frac{\partial f_i}{\partial t_j}$, $x\in\bar{T}_m$.

Если существует константа δ, удовлетворяющая условиям $\|J(x_1)-J(x_2)\|\le|\delta|$, $K|\delta|\le\frac{1}{3}$, где $x_1, x_2\in\bar{T}_m$, то уравнение (2.I) имеет единственное решение в $\bar{T}_m$, а приближенные решения, определяемые формулой (2), сходятся к этому решению.

Здесь

$$\bar{T}_m = \left\{ x \,\middle|\, \| \mathscr{X}_0 - x \| \le \frac{K\varepsilon}{1-3K|\delta|} \right\}, \quad \varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} f_i^2(x_0)} .$$

Ясно, что если выполнены условия теоремы 2, то будут выполнены все условия теоремы I.

Отсюда следует справедливость теоремы 2.

Теперь кратко рассмотрим численный пример.

Мы имеем систему, заданную в R_2 [3]

$$f_1(t_1, t_2) = 4t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 - t_2 - 2 = 0$$
$$f_2(t_1, t_2) = 2t_1^2 + 3t_1 t_2 + t_2^2 - 3 = 0.$$

Возьмем для начального приближения $t_1^0 = 0{,}55$, $t_2^0 = 0{,}95$ и параметр $\delta = 0{,}31$.

Результаты вычислений показывают, что при таком выборе значения для параметра приближенные решения сходятся к точному решению

$$\bar{t}_1 = 0{,}5, \quad \bar{t}_2 = 1{,}0.$$

При этом получаются следующие значения:

$$K = 0{,}8, \quad \varepsilon = 0{,}2, \quad r = 0{,}6.$$

ЛИТЕРАТУРА

I. Л.В.Конторович, Г.П.Акимов.
Функциональный анализ в нормированных пространствах.
Физматгиз,1959, стр.158.

2. H.A. Antosiewicz, Newton's method and boundary value problems, JCSS, Vol. 2, N. 2, 1968.

3. Ж.С.Березин, Н.П.Жидков.
Методы вычислений.П. Физматиз, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел

2 марта 1970 года.