

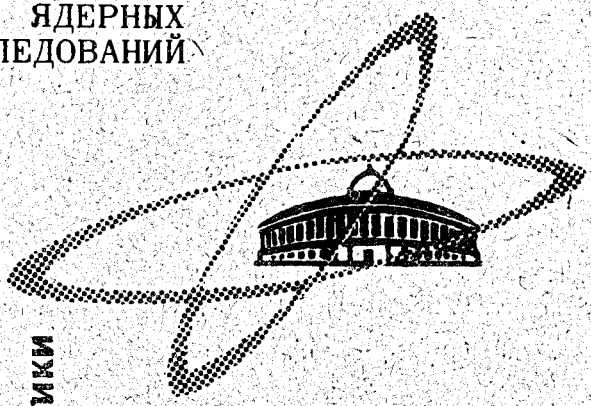
С 179  
2-75

15/IV.70

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

5 - 4954

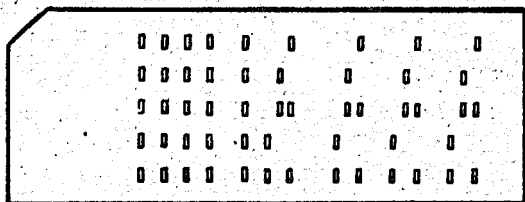


ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ  
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Чой Зай Хен

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ  
ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ  
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1970

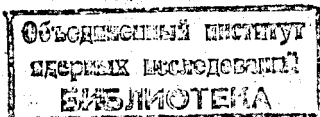


Объединенный институт  
ядерных исследований  
ЛВТА

5 - 4954

Чой Зай Хен

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ  
ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ  
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ



82.85/2 пр.

Пусть задано нелинейное операторное уравнение

$$\Phi(x) = \theta \quad (I)$$

в пространстве Банаха  $X$ .

В данной работе предлагается один вариант для решения уравнения (I) и иллюстрируется пример, показывающий применение этого метода к решениям конкретных функциональных уравнений.

В разделе I формулируется и доказывается теорема существования решения. Для этого используется рекуррентный процесс с некоторым вещественным параметром  $\delta$  :

$$x_{n+1} = x_n - [\Phi'(x_n) + \delta E]^{-1} \Phi(x_n), \quad n=0,1,2,\dots \quad (2)$$

В разделе 2, как пример, рассматривается применение настоящего метода к решениям нелинейных систем алгебраических уравнений.

### I. Теорема существования

Теорема I. Допустим, что оператор  $\Phi$  определен в некотором шаре  $B(x_0, r) \subset X$  и непрерывно дифференцируем по Фреше, причем производная  $\Phi'(x)$  имеет обратный оператор  $\Phi'(x)^{-1}$ .

Если существует вещественный параметр  $\delta$ , удовлетворяющий условиям:

I) для любых элементов  $x_1, x_2 \in B(x_0, r)$

$$\|\Phi'(x_1) - \Phi'(x_2)\| \leq |\delta|,$$

2) для любого элемента  $x \in B(x_0, r)$

$$\|\Phi'(x)\| \leq K, \quad 181K < \frac{1}{2}$$

то в шаре  $B(x_0, r)$  уравнение (I) имеет единственное решение  $\bar{x}$  и последовательность элементов  $\{x_n\}$ , определяемых формулой (2), сходится к решению  $\bar{x}$ .

Скорость сходимости оценивается неравенством

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq v \left( \frac{2181K}{1-181K} \right)^n.$$

Здесь

$$v = \frac{K\varepsilon}{1-3181K},$$

где

$$\varepsilon = \|\Phi(x_0)\|.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, вводим одну лемму, которая является видоизменением теоремы Банаха /1/.

Лемма. Пусть линейный оператор  $\Psi$  отображает  $X$  в себя и имеет обратный оператор  $\Psi^{-1}$ , ограниченный константой  $k$ :  $\|\Psi^{-1}\| \leq k$ . Тогда линейный оператор  $\Psi + \delta E$  с некоторым вещественным параметром  $\delta$ , удовлетворяющим неравенству  $k|\delta| < 1$ , имеет обратный оператор  $(\Psi + \delta E)^{-1}$ , причем оценкой служит

$$\|(\Psi + \delta E)^{-1}\| \leq A,$$

где

$$A = \frac{k}{1-181k}.$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы I.

В силу условий теоремы I оператор  $\Phi'(x)$  удовлетворяет условию леммы, следовательно, для любого  $x \in B(x_0, r)$  получается оценка

$$\|(\Phi'(x) + \delta E)^{-1}\| \leq A. \quad (I.1)$$

Используя метод математической индукции, получаем, что элементы  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , определенные формулой (2), принадлежат шару  $B(x_0, r)$ .

Очевидно, что в силу неравенства (I.1) при  $n = 0$  из формулы

(2) вытекает

$$\|x_1 - x_0\| \leq A\varepsilon,$$

т.е.  $x_1 \in B(x_0, r)$ .

Предполагая, что элементы  $x_1, x_2, \dots, x_\ell$ , определенные по формуле (2) при  $n = 0, 1, \dots, \ell-1$ , принадлежат шару  $B(x_0, r)$ , оценим норму оператора  $\Phi(x_{n+1})$ .

Так как оператор  $\Phi(x_{n+1})$  можно представить в виде

$$\Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n) = \Phi'(x_n)(x_{n+1} - x_n) - \delta(x_{n+1} - x_n),$$

то

$$\|\Phi(x_{n+1})\| \leq 2|\delta| \|x_{n+1} - x_n\|. \quad (I.2)$$

Поэтому, если элемент  $x_{\ell+1}$  определен формулой (2) при  $n = \ell$ , то в силу неравенства (I.1), (I.2) из формулы (2) получается

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq P \|x_{n+1} - x_n\|, \quad n = 0, 1, \dots, \ell-1, \quad (I.3)$$

где  $P = 2|\delta|A$ .

Отсюда вытекает, что

$$\|x_{\ell+1} - x_0\| \leq A\varepsilon S_\ell, \quad (I.4)$$

где

$$S_\ell = \frac{1 - P^{\ell+1}}{1 - P}.$$

В силу условий теоремы последовательность  $\{S_n\}$  монотонно возрастает и имеет конечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

где

$$S = \frac{1}{1 - P}.$$

Следовательно, при любом  $\ell \geq 0$  справедливо следующее неравенство:

$$\|x_{\ell+1} - x_0\| \leq A\varepsilon S_\ell < A\varepsilon S = r,$$

т.е.

$$x_{\ell+1} \in B(x_0, r).$$

Теперь докажем, что последовательность  $\{x_n\}$  сходится.

Для любого целого числа  $j > 0$  справедливо неравенство

$$\|x_{n+j} - x_n\| \leq A\varepsilon (S_{n+j-2} - S_{n-2}). \quad (I.5)$$

Переходя к пределу по  $n$ , из (I.5) получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+j} - x_n\| \leq A\varepsilon (S - S) = 0.$$

Это значит, что последовательность  $\{x_n\}$  сходится к некоторому элементу  $\bar{x} \in B(x_0, r)$ . Очевидно, что этот предел  $\bar{x}$  является решением уравнения (I).

Предположим, что существует еще другое решение  $x^*$ .

Тогда разность  $\bar{x} - x^*$  можно представить в виде

$$\bar{x} - x^* = [\Phi'(\bar{x}) + \delta E]^{-1} [\Phi(\bar{x}) - \Phi(x^*) - \Phi'(\bar{x})(\bar{x} - x^*) - \delta(\bar{x} - x^*)]. \quad (I.6)$$

Оценивая норму обеих частей равенства (I.6), получаем

$$\|\bar{x} - x^*\| \leq \rho \|\bar{x} - x^*\|.$$

Но так как  $\rho < 1$ , то  $\|\bar{x} - x^*\| = 0$ .

Следовательно, при выполнении условий теоремы уравнение (I) имеет только одно решение.

Теперь оценим скорость сходимости.

При  $j \rightarrow \infty$  из неравенства

$$\|x_{n+j} - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{n+j-1} \|x_{k+1} - x_k\|$$

вытекает оценка

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq r \left( \frac{2|\delta|K}{1-|\delta|K} \right)^n.$$

Итак, теорема полностью доказана.

## 2. Применение к решению систем нелинейных алгебраических уравнений

Пусть нам требуется решить систему алгебраических уравнений, заданных в некоторой  $m$ -мерной области  $T_m \subset R_m$

$$\begin{aligned} f_1(t_1, \dots, t_m) &= 0 \\ f_2(t_1, \dots, t_m) &= 0 \\ &\dots \\ f_m(t_1, \dots, t_m) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Определим норму вектора  $x = (t_1, \dots, t_m) \in R_m$ , как обычно, соотношением  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m t_i^2}$  и будем считать  $R_m$   $b$ -пространством.

Пологая  $y = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $y = \Phi(x)$ , можно считать систему (2.1) операторным уравнением

$$\Phi(x) = \theta.$$

**Теорема 2.** Допустим, что функции  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  в некоторой области  $\bar{T}_m \subset T_m$  непрерывно дифференцируемы по аргументам  $t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , и определитель матрицы Якоби отличен от нуля:

$$|J(x)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial t_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial t_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial t_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а

$$\frac{1}{\sqrt{|J(x)|^2}} \sqrt{\sum_{i,j=1}^m a_{ij}^2} \leq K,$$

где  $a_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $\frac{\partial f_i}{\partial t_j}$ ,  $x \in \bar{T}_m$ .

Если существует константа  $\delta$ , удовлетворяющая условиям

$$\|J(x_1) - J(x_2)\| \leq |\delta|, \quad \kappa |\delta| \leq \frac{1}{3},$$

где  $x_1, x_2 \in \bar{T}_m$ , то уравнение (2.1) имеет единственное решение в  $\bar{T}_m$ , а приближенные решения, определяемые формулой (2), сходятся к этому решению.

Здесь

$$\bar{r}_m = \left\{ x \mid \|x_0 - x\| \leq \frac{K\varepsilon}{1-3K181} \right\}, \quad \varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2(x_0)}.$$

Ясно, что если выполнены условия теоремы 2, то будут выполнены все условия теоремы 1.

Отсюда следует справедливость теоремы 2.

Теперь кратко рассмотрим численный пример.

Мы имеем систему, заданную в  $R_2$  [3].

$$f_1(t_1, t_2) = 4t_1^2 + t_2^2 + 2t_1t_2 - t_2 - 2 = 0$$

$$f_2(t_1, t_2) = 2t_1^2 + 3t_1t_2 + t_2^2 - 3 = 0.$$

Возьмем для начального приближения  $t_1^0 = 0,55$ ,  $t_2^0 = 0,95$   
и параметр  $\delta = 0,31$ .

Результаты вычислений показывают, что при таком выборе значения для параметра приближенные решения сходятся к точному решению

$$\bar{t}_1 = 0,5, \quad \bar{t}_2 = 1,0.$$

При этом получаются следующие значения:

$$K = 0,8, \quad \varepsilon = 0,2, \quad r = 0,6.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л.В.Конторович, Г.П.Акимов.

Функциональный анализ в нормированных пространствах.

Физматгиз, 1959, стр.158.

2. H. A. Antosiewicz, *Newton's method and boundary value problems*, JCSS, Vol. 2, N. 2, 1968.

3. Ж.С.Березин, Н.П.Жидков.

Методы вычислений, П. Физматиз, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел

2 марта 1970 года.