

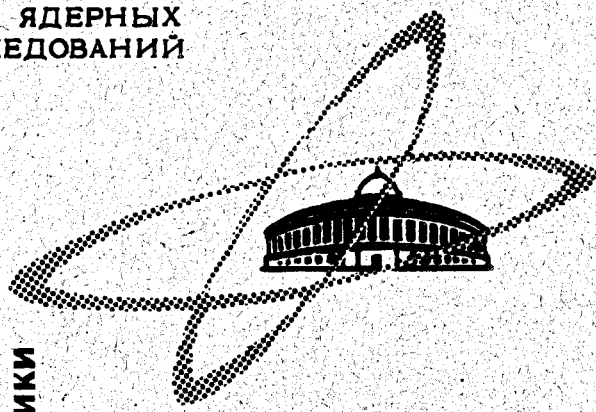
29/XII-68

МС-696

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

5 - 4821

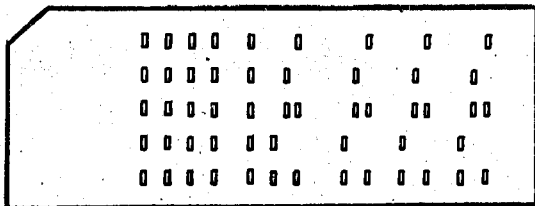


ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ  
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Е.П. Жидков, Т.В. Рыльцева, Б.В. Феокистов

МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ  
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ  
УСКОРИТЕЛЕЙ

1969



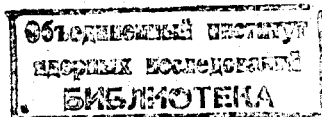
ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ЛВТА

5 - 4821

Е.П. Жидков, Т.В. Рыльцева, Б.В. Феоктистов

МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ  
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ  
УСКОРИТЕЛЕЙ

Направлено в ЖВММФ



8119 / 2 up

Важной задачей при создании ускорителей заряженных частиц является задача о подборе их параметров для обеспечения требуемых свойств выведенного из ускорителя пучка. Эта проблема распадается на целый ряд сложных математических задач, каждая из которых требует разработки методов ее решения.

Результаты решения каждой задачи определяют некоторые параметры ускорителя и, следовательно, стоимость оборудования.

Одной из таких задач - выводу пучка заряженных частиц - посвящена настоящая работа. Полученные в результате расчетов параметры определяют некоторые характеристики устройств вывода.

В § I дается математическая постановка задачи, в § 2 описывается метод ее решения, в § 3 приведены результаты численных расчетов и в § 4 сделаны выводы.

## § I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математически задача ставится следующим образом.

Требуется решить уравнение

$$\rho'' = \frac{2\rho'^2}{R_s + \rho} + (R_s + \rho) - \frac{1}{R_1} (R_s + \rho)^2 F(\rho) = -f(\varphi, \rho, \rho'). \quad (\text{I.I})$$

Здесь  $\rho = \rho(\varphi)$  - искомая функция,  $\varphi$  - аргумент.

Уравнение (I.I) является модельным для движения частицы в магнитном поле ускорителя. В качестве системы координат выбрана полярная система.  $R = R_s + \rho$  - полярный радиус;  $\varphi$  - полярный угол;  $R = R_s, (R_s = \text{const})$  - равновесная орбита;

$\rho(\varphi)$  - отклонение частицы от равновесной орбиты;

$R_1$  - константа;

$F(\rho)$  - заданная функция, описывающая магнитное поле ускорителя.

Уравнение (I.I) рассматривается на промежутках

$$[\varphi_0; \varphi_1], [\varphi_1; \varphi_2], \dots, [\varphi_{n-1}; \varphi_n],$$

где  $\varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n$ . В промежутке  $[\varphi_0; \varphi_1]$  решение уравнения (I.I) известно. В точках  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$  решение  $\rho(\varphi)$  претерпевает разрыв, который определяется следующим способом.

Рассмотрим промежутки

$$[\varphi_{i-1}; \varphi_i] \text{ и } [\varphi_i; \varphi_{i+1}], \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Пусть решение уравнения (I.I) и его производная на промежутке

$[\varphi_{i-1}; \varphi_i]$  в точке  $\varphi = \varphi_i$  имеют значения

$$\rho = \rho_\lambda(\varphi_i), \quad \rho' = \rho'_\lambda(\varphi_i),$$

а решение того же уравнения и его производная на промежутке

$[\varphi_i; \varphi_{i+1}]$  в точке  $\varphi = \varphi_i$  имеют значения

$$\rho = \rho_n(\varphi_i), \quad \rho' = \rho'_n(\varphi_i)$$

( $\Lambda$  - левое,  $\Pi$  - правое значение в точке  $\varphi_i$ ).

Левые и правые значения в точке  $\varphi_i$  связаны соотношениями

$$\rho_n(\varphi_i) = \rho_n(\varphi_i) + \ell \rho'_\Lambda(\varphi_i) \quad (I.2)$$

$$\rho'_n(\varphi_i) = \alpha_i + \rho'_\Lambda(\varphi_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (I.3)$$

Здесь  $\ell$  - заданная константа,  $\alpha_i$  для некоторых  $i$  равны нулю, а для остальных значений  $i$  они являются неизвестными величинами, о чем будет сказано ниже.

Среди  $\varphi_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) есть несколько значений  $\varphi_{i_k}$ ,

$$k = 1, 2, \dots, m, \quad (\varphi_{i_1} < \varphi_{i_2} < \dots < \varphi_{i_m} = \varphi_n),$$

при которых задаются краевые условия для уравнения (I.1) одного из двух типов:

$$\rho_\Lambda(\varphi_{i_k}) = \rho_k, \quad (I.4)$$

или

$$\rho'_\Lambda(\varphi_{i_k}) = \rho'_k, \quad (I.5)$$

где  $\rho_k, \rho'_k$  - заданные величины.

В формуле (I.3) при  $\varphi_i = \varphi_{i_1}$ , и при  $\varphi_i = \varphi_{i_k}$ , ( $k = 1, 2, \dots, m-1$ )  $\alpha_i$  являются неизвестными величинами, а при остальных значениях

$\varphi_i - \alpha_i$  равны нулю.

Рассмотрим промежуток  $[\varphi_1; \varphi_i]$ . Он разбивается на промежутки

$$[\varphi_1; \varphi_2], [\varphi_2; \varphi_3], \dots, [\varphi_{i-1}; \varphi_i], \quad (\varphi_2 = \varphi_{i_1})$$

Т.к. решение уравнения (I.1) в  $[\varphi_0; \varphi_1]$  предполагаем известным, то из (I.2) следует, что известно и

$$\rho_n(\varphi_1) = \rho_\Lambda(\varphi_1) + \ell \rho'_\Lambda(\varphi_1).$$

В точке  $\varphi_1$  задано краевое условие типа (I.4) или (I.5).

В точках  $\varphi_i$  ( $i = 2, 3, \dots, \nu - 1$ ) выполняются условия (I.2), (I.3) с  $\alpha_i = 0$ .

Требуется найти функцию  $\rho = \rho(\varphi)$  и  $\alpha_1$  такие, чтобы функция  $\rho = \rho(\varphi)$  удовлетворяла дифференциальному уравнению (I.I) в промежутках  $[\varphi_1; \varphi_2], \dots, [\varphi_{\nu-1}; \varphi_\nu]$ , в точках  $\varphi = \varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, \nu - 1$ ) выполнялись соотношения (I.2) (I.3), а в точках  $\varphi_1$  и  $\varphi_\nu$  были выполнены заданные краевые условия.

На промежутках  $[\varphi_{i_1}; \varphi_{i_2}], \dots, [\varphi_{i_{m-1}}; \varphi_{i_m}]$  задача ставится аналогично тому, как это описано для промежутка  $[\varphi_1; \varphi_{i_2}]$ .

Нами решалась задача, связанная с расчетом быстрого вывода пучка из серпуховского ускорителя, которая сводилась к описанной выше.

Приведем конкретные данные этой задачи.

Уравнение (I.I) рассматривается на промежутке  $[\varphi_0; \varphi_{13}]$

Промежуток  $[\varphi_0; \varphi_{13}]$  разбивается на равные промежутки

$$[\varphi_0; \varphi_1], [\varphi_1; \varphi_2], \dots, [\varphi_{12}; \varphi_{13}], \quad (\varphi_i - \varphi_{i-1} = \frac{\pi}{60}; \quad i = 1, 2, \dots, 13).$$

В точках  $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_8, \varphi_{10}, \varphi_{12}$  выполняются условия (I.2) (I.3)

с  $\alpha_i = 0$ . В точках  $\varphi_1, \varphi_9, \varphi_{11}$  выполняются условия (I.2) (I.3)

с неизвестными  $\alpha_1, \alpha_9, \alpha_{11}$ .

$$\rho_n(\varphi_1) = \rho_n'(\varphi_1) = 0$$

$$\rho_n(\varphi_9) = -2,5$$

$$\rho_n'(\varphi_{11}) = -9,86$$

$$\rho_n'(\varphi_{13}) = 515,98$$

(I.6)

$$R_s = R_1 = 1,94125 \cdot 10^4 \text{ аев}; \quad \ell = \frac{242}{R_s}$$

(I.7)

Функция  $F(\rho)$ , характеризующая магнитное поле ускорителя, задается в виде таблицы. Для промежутков

$$[\psi_2; \psi_3], [\psi_4; \psi_5], \dots, [\psi_{12}; \psi_{13}]$$

поле задается таблицей  $F_1(\rho)$ , а для промежутков

$$[\psi_1; \psi_2], [\psi_3; \psi_4], [\psi_5; \psi_6], \dots, [\psi_{11}; \psi_{12}]$$

таблицей  $F_2(\rho)$ . Графики функций  $F_1(\rho)$  и  $F_2(\rho)$  приведены на рис. 1.

Требуется найти решение уравнения (I.1) в промежутках

$$[\psi_1; \psi_2], [\psi_2; \psi_3], \dots, [\psi_{12}; \psi_{13}]$$

и величины  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{11}$  такие, чтобы удовлетворялись условия (I.6), а в точках  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ) - условия (I.2), (I.3).

## § 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Из первого из условий (I.6) и формулы (I.2) получаем

$$\rho_n(\psi_i) = \rho_\lambda(\psi_i) + \ell \rho'_\lambda(\psi_i) = 0.$$

Рассматриваемая задача распадается на три нелинейных краевых задачи.

Задача (А). Найти решение  $\rho = \rho(\psi)$  уравнения (I.1) в промежутке  $[\psi_1; \psi_2]$ , удовлетворяющее крайним условиям

$$\rho_n(\psi_1) = 0, \quad (2.1)$$

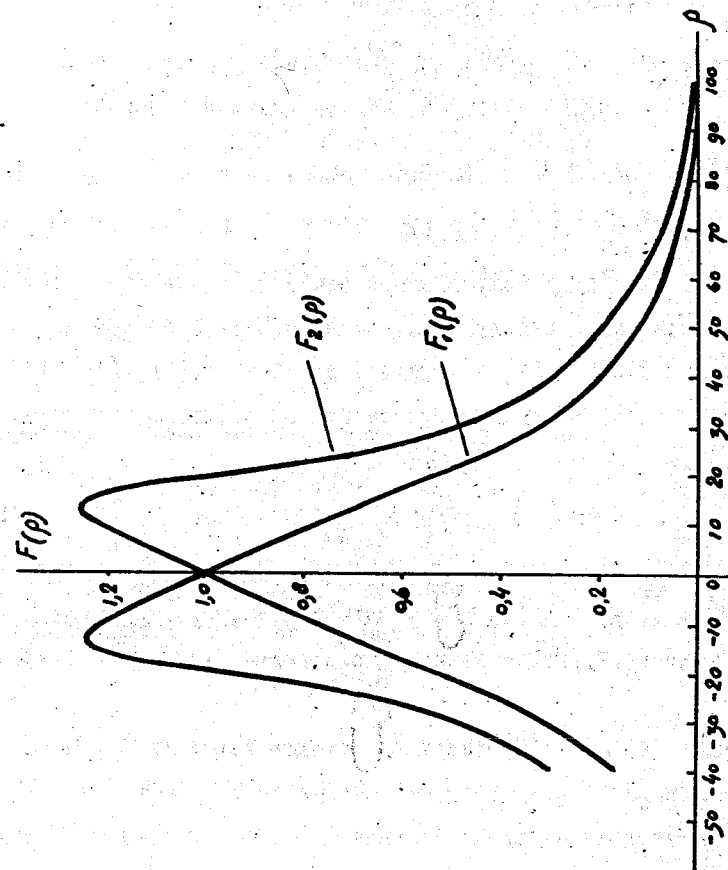
$$\rho_\lambda(\psi_2) = -2,5 \quad (2.2)$$

и такое, чтобы в точках  $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_8$  выполнялись условия (I.2)(I.3) с  $\alpha_i = 0$  ( $i = 2, 3, \dots, 8$ ).

Задача (В). Найти решение  $\rho = \rho(\psi)$  уравнения (I.1) в промежутке  $[\psi_9; \psi_{11}]$ , удовлетворяющее крайним условиям

$$\rho_n(\psi_9) = \rho_\lambda(\psi_9) + \ell \rho'_\lambda(\psi_9), \quad (2.3)$$

$$\rho_\lambda(\psi_{11}) = -9,86, \quad (2.4)$$



где  $\rho_\lambda(\varphi_9)$  и  $\rho'_\lambda(\varphi_9)$  получены при решении задачи (А), а  $\ell$  - заданная константа, и такое, чтобы в точке  $\varphi_{10}$  выполнялись условия (I.2), (I.3) с  $\alpha_{10} = 0$ .

Задача (С). Найти решение  $\rho = \rho(\varphi)$  уравнения (I.I) в промежутке  $[\varphi_{11}; \varphi_{12}]$ , удовлетворяющее крайним условиям

$$\rho_{11}(\varphi_{11}) = \rho_\lambda(\varphi_{11}) + \ell \rho'_\lambda(\varphi_{11}), \quad (2.5)$$

$$\rho'_\lambda(\varphi_{11}) = 515,98, \quad (2.6)$$

где  $\rho_\lambda(\varphi_{11})$  и  $\rho'_\lambda(\varphi_{11})$  получены при решении задачи (В) и такое, чтобы в точке  $\varphi_{12}$  выполнялись условия (I.2), (I.3) при  $\alpha_{12} = 0$ .

Функция  $\rho = \rho(\varphi)$ , являющаяся решением задач (А), (В) и (С), и равенство (I.3) позволяют определить неизвестные величины

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{11}$

$$\alpha_i = \rho'_n(\varphi_i) - \rho'_\lambda(\varphi_i), \quad (i = 1, 2, 11). \quad (2.7)$$

Очевидно, что функция  $\rho = \rho(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_{12}]$ , полученная при решении задач (А), (В), (С) и значения  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{11}$ , определяемые соотношением (2.7), будут являться решением задачи, поставленной в § I.

Задачи (А), (В) и (С) решались методом введения параметра, изложенным в [I - 3].

Применительно к задаче (А) метод решения сводится к следующему. Задача (А) заменяется задачей (А<sub>1</sub>), которая ставится так.

Задача (А<sub>1</sub>). Вместо уравнения (I.I) рассматривается система уравнений в частных производных

$$\begin{cases} V''_{\varphi^2} + P V'_\varphi + Q V = R, & (2.8) \\ P'_t = V, & (2.9) \end{cases}$$

где

$$P(\varphi; t, \rho, \rho'_\varphi) = f'_{\rho'_\varphi}(\varphi, t, \rho, \rho'_\varphi) = -\frac{\varphi \rho'_\varphi}{R_s + \rho}, \quad (2.10)$$



$$Q(\varphi, t, \rho, \rho') = \rho' = 2 \frac{(\rho')^2}{(R_s + \rho)^2} - 1 + \frac{1}{R_1} [2(R_s + \rho)F(\rho) + (R_s + \rho)^2 F'(\rho)]; \quad (2.11)$$

$$R(\varphi, t, \rho, \rho', \rho'') = - [\rho'' + \rho'(\varphi, \rho, \rho')] = \\ = -\rho'' + 2 \frac{(\rho')^2}{R_s + \rho} + R_s + \rho - \frac{1}{R_1} (R_s + \rho)^2 F(\rho). \quad (2.12)$$

В системе (2.8), (2.9) неизвестные функции  $V$  и  $\rho$  зависят от  $\varphi$  и дополнительного параметра  $t$ :  $V = V(\varphi; t)$ ,  $\rho = \rho(\varphi, t)$ .

Система (2.8), (2.9) решается в области

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad (2.13)$$

$$0 \leq t < +\infty \quad (2.14)$$

Краевые условия задаются следующим образом

$$V(\varphi_1; t) = 0, \quad (2.15)$$

$$V(\varphi_2; t) = 0. \quad (2.16)$$

В точках  $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$  функция  $V(\varphi; t)$  при любых  $t$  удовлетворяет условиям, аналогичным (I.2), (I.3)

$$V_n = V_n + \ell V_n' \quad (2.17)$$

$$V_n' = V_n' \quad (2.18)$$

При  $t = 0$  задается начальное значение  $\rho(\varphi; t)$

$$\rho(\varphi, 0) = \rho^{(0)}(\varphi).$$

Функция  $\rho^{(0)}(\varphi)$  удовлетворяет краевым условиям

$$\rho_n^{(0)}(\varphi_1) = 0, \quad (2.19)$$

$$\rho_n^{(0)}(\varphi_2) = -2,5, \quad (2.20)$$

а в точках  $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$  соотношениям

$$\rho_n^{(0)} = \rho_n^{(0)} + \ell \rho_n^{(0)'} \quad (2.21)$$

$$\rho_n^{(0)'} = \rho_n^{(0)'} \quad (2.22)$$

В качестве  $\rho^{(0)}(\varphi)$  нами бралась кусочно-линейная функция

$$\rho^{(0)}(\varphi) - \rho_n^{(0)}(\varphi_i) = k(\varphi - \varphi_i) + i\ell k \quad (i=0, 1, 2, \dots, 7), \quad (2.23)$$

где

$$k = \frac{\rho_n^{(0)}(\varphi_8) - \rho_n^{(0)}(\varphi_1)}{\varphi_8 - \varphi_1 + 7\ell}, \quad (2.24)$$

где  $\rho_n^{(0)}(\varphi_8)$  и  $\rho_n^{(0)}(\varphi_1)$  берутся из (2.19), (2.20). Уравнение (2.23) при заданном  $i$  применяется к промежутку  $[\varphi_{i-1}; \varphi_{i+2}]$ . Функция  $\rho^{(0)}(\varphi)$  изображена на рис. 2.

Магнитное поле ускорителя (функция  $F(\rho)$ ) было аппроксимировано функциями

$$F(\rho) = \begin{cases} c_1 e^{P_{n,1}(\rho)} & \text{для промежутков } [\varphi_i; \varphi_{i+1}] \quad (i=1, 3, \dots, 7) \\ c_2 e^{P_{n,2}(\rho)} & \text{для промежутков } [\varphi_i; \varphi_{i-1}] \quad (i=2, 4, \dots, 8) \end{cases} \quad (2.25)$$

Коэффициенты полиномов  $P_{n,1}(\rho)$  и  $P_{n,2}(\rho)$ , а также константы  $c_1$  и  $c_2$  находились методом наименьших квадратов, исходя из таблично заданных функций  $F_1(\rho)$  и  $F_2(\rho)$ .

Алгоритм решения задачи (A<sub>1</sub>).

Опишем первый шаг интегрирования по  $t$ . В выражения (2.10), (2.11), (2.12) вместо  $\rho$ ,  $\rho'$ ,  $\rho''$  подставляются известные функции  $\rho^{(0)}$ ,  $\rho_\varphi^{(0)'}$ ,  $\rho_{\varphi^2}^{(0)''}$  (см. (2.23)). Полученные функции  $\rho^{(0)}(\varphi; t=0)$ ,  $\rho_\varphi^{(0)'(\varphi; t=0)}$ ,  $\rho_{\varphi^2}^{(0)''(\varphi; t=0)}$  подставляются в уравнение (2.8). Уравнение (2.8) при  $t=0$  становится линейным обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции  $V(\varphi)$ . Для  $V(\varphi)$  выполняются краевые условия (2.15), (2.16) и в точках  $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_8$  условия (2.17), (2.18). Решая линейную краевую задачу (2.8), находим  $V(\varphi; t=0)$ . Подставляя найденную функцию  $V(\varphi)$  в уравнение (2.9) и заменяя  $\rho_2'(\varphi; t=0)$  приближенным выражением

$$\rho_2'(\varphi; t=0) = \frac{\rho(\varphi, \tau) - \rho(\varphi, 0)}{\tau},$$

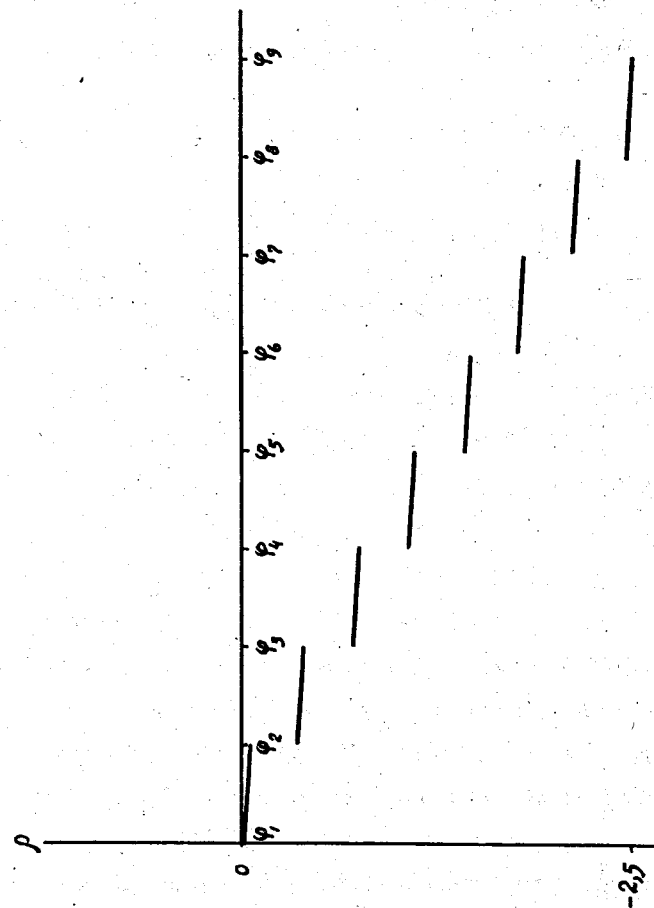


Рис. 2

находим

$$\rho(\varphi; \tau) = \rho(\varphi; 0) + \tau V(\varphi; 0), \quad (2.26)$$

$$\rho'_\varphi(\varphi; \tau) = \rho'_\varphi(\varphi; 0) + \tau V'(\varphi; 0), \quad (2.27)$$

$$\rho''_{\varphi^2}(\varphi; \tau) = \rho''_{\varphi^2}(\varphi; 0) + \tau V''(\varphi; 0). \quad (2.28)$$

Здесь  $\tau$  — шаг интегрирования по переменной  $t$ .

После этого выполняется следующий шаг интегрирования по переменной  $t$ . Вместо функций  $\rho^{(0)}$ ,  $\rho'^{(0)}$ ,  $\rho''^{(0)}$ , используемых на первом шаге интегрирования по  $t$ , теперь используются функции (2.26), (2.27), (2.28).

Шаг интегрирования по переменной  $t$  выбирается методом проб. Решение задачи заканчивается по критерию

$$|V(\varphi; t)| < \varepsilon, \quad (2.29)$$

где  $\varepsilon$  — достаточно малая величина, характеризующая точность решения.

Для проверки правильности полученного решения решается задача Коши в промежутке  $[\varphi_1; \varphi_2]$  для уравнения (I.1) с начальными условиями

$$\rho_n(\varphi_1) = 0,$$

$$\rho'_n(\varphi_1) = \alpha_1 + \rho'_n(\varphi_1),$$

где  $\alpha_1$  определено из выражения (2.7) после решения задачи (A<sub>1</sub>). Решения задачи (A<sub>1</sub>) и задачи Коши сравниваются. Если имеет место совпадение решений с требуемой точностью, то решение задачи (A<sub>1</sub>), а, следовательно, и первоначальной задачи, считается правильным.

Замечание 1. Алгоритмы для решения задач (B) и (C) строятся аналогично алгоритму, описанному для задачи (A).

Замечание 2. Нами была составлена программа для ЭВМ БЭСМ-4, реализующая описанные алгоритмы решения задач (A), (B), (C). Программа, исходные данные и рабочие ячейки занимают оперативную

память машины и один магнитный барабан. Программа позволяет легко менять число шагов по переменной  $\varphi$ , величину  $\varepsilon$  в формуле (2.29) и варьировать шаг по переменной  $t$ . Время решения всех трех задач (А), (В) и (С) составляет около двадцати минут.

### § 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Задача (А) решалась методом введения параметра, описанным в § 2. Шаг  $h$  по переменной  $\varphi$  брался равным  $h_1 = \frac{T}{60} : 10$ , а по переменной  $t - \tau = 0,5$ . Процесс сходился после девятнадцати шагов по  $t$  при  $\varepsilon = 0,001$ . Для выяснения точности вычислений был проведен счет задачи при  $h_2 = \frac{T}{60} : 20$ ,  $h_3 = \frac{T}{60} : 5$  и  $h_4 = \frac{T}{60} : 40$ . Во всех случаях  $\tau = 0,5$ . Процесс сходился при  $\varepsilon = 0,001$  в случае  $h_2$  после девятнадцати шагов по  $t$ , а в случае  $h_3$  - после семнадцати шагов по  $t$ .

Как видно из таблиц I и 2, результаты вычислений при  $h_1$  и  $h_2$  совпадают с четырьмя знаками. Результаты вычислений с  $h_1$  и  $h_3$  совпадают с тремя знаками. См. таблицы I, 2, 3, 4.

Для контроля правильности вычислений была решена задача Коши для уравнения (1.1) в промежутке  $[\varphi_1; \varphi_2]$ . В качестве начальных условий брались  $\rho_n(\varphi_1) = 0$ ;  $\rho_n'(\varphi_1) = \alpha_1$ , где  $\alpha_1 = 37,7268374$  получено при решении задачи (А) с шагом  $h_4$ . Результаты решения задачи Коши приведены в таблице 5. Сравнение таблиц I, 2, 4, 5 показывает хорошее совпадение полученных результатов. График полученного решения задачи (А) приведен на рис. 3.

Для задач (В) и (С) получены результаты, которые помещены в таблицах I, 2, 3, 4. Результаты контрольных вычислений с помощью задачи Коши с найденными при решении задач (В) и (С)  $\alpha_2$  и  $\alpha_{11}$  приведены в таблице 5. График полученного решения на промежутке

Таблица I

$\varphi$	$h_1 = \frac{\pi}{60} : 10$			
	$P_A$	$P'_A$	$P_B$	$P'_B$
$\varphi_0$	-	-	0	0
$\varphi_1$	0	0	0	37,7228
$\varphi_2$	I,4893I	II,5324	I,63308	II,5324
$\varphi_3$	3,66025	75,II33	4,59662	75,II33
$\varphi_4$	5,0I509	-60,3757	4,26244	-60,3757
$\varphi_5$	3,7I6I5	36,9623	4,I7693	36,9623
$\varphi_6$	3,09346	-74,3I35	2,I6706	-74,3I35
$\varphi_7$	-I,00903	-60,44I6	-I,7625I	-60,44I6
$\varphi_8$	-2,8I332	26,25I2	-2,48606	26,25I2
$\varphi_9$	-2,5	-26,83I4	-2,83463	-I79,592
$\varphi_{10}$	-7,7I975	I9,I849	-7,4805	I9,I849
$\varphi_{11}$	-9,86	-III,267		
$\varphi_{12}$	В задаче (C <sub>7</sub> ) при $h_1 = \frac{\pi}{60} : 10$ ,			
$\varphi_{13}$	$\tau = I, \varepsilon = 0,00I$ процесс не сходится.			
$\alpha_1 = 37,7228388 ; \alpha_9 = -I52,74854I$				

Таблица 2

$\varphi$	$h_2 = \frac{\pi}{60} : 20$			
	$P_A$	$P'_A$	$P_B$	$P'_B$
$\varphi_0$	-	-	0	0
$\varphi_1$	0	0	0	37,7265
$\varphi_2$	I,48945	II,5325	I,63322	II,5325
$\varphi_3$	3,66050	75,II73	4,59693	75,II73
$\varphi_4$	5,0I5II	-60,3797	4,2624I	-60,3797
$\varphi_5$	3,7I580	36,9506	4,I7643	36,9506
$\varphi_6$	3,09290	-74,2967	2,I6670	-74,2967
$\varphi_7$	-I,00849	-60,4I86	-I,76I68	-60,4I86
$\varphi_8$	-2,8I224	26,2300	-2,48525	26,2300
$\varphi_9$	-2,5	-26,8436	-2,83463	-I79,600
$\varphi_{10}$	-7,72002	I9,I86I	-7,48085	I9,I86I
$\varphi_{11}$	-9,86	-III,253	-II,2469	I6,I826
$\varphi_{12}$	-2,6402I	269,64I	0,72II92	269,64I
$\varphi_{13}$	I9,I255	5I5,98	-	-
$\alpha_1 = 37,7265426 ; \alpha_9 = -I52,757046, \alpha_{11} = -I27,4360I9$				

Таблица 3

$\varphi$	$h_3 = \frac{\pi}{60} : 5$			
	$P_A$	$P'_A$	$P_n$	$P'_n$
$\varphi_0$	-	-	0	0
$\varphi_1$	0	0	0	37,7402
$\varphi_2$	I,49004	II,5448	I,63396	II,5448
$\varphi_3$	3,66269	75,1751	4,59984	75,1751
$\varphi_4$	5,01915	-60,4012	4,26618	-60,4012
$\varphi_5$	3,72167	37,0715	4,18382	37,0715
$\varphi_6$	3,10017	-74,4710	2,17180	-74,4710
$\varphi_7$	-1,01085	-60,5838	-1,76610	-60,5838
$\varphi_8$	-2,81873	26,3576	-2,49015	26,3576
$\varphi_9$	-2,5	-26,7689	В задаче (B <sub>r</sub> ) при $\varepsilon \equiv 0.001$ процесс не сходится.	
$\varphi_{10}$	$h_3 = \frac{\pi}{60} : 5, \quad \tau=1,$			
$\varphi_{11}$				
$\varphi_{12}$	Вычисления не производились.			
$\varphi_{13}$				
$\alpha_1 = 37,7402700$				

Таблица 4

$\varphi$	$h_4 = \frac{\pi}{60} : 40$			
	$P_A$	$P'_A$	$P_n$	$P'_n$
$\varphi_0$	-	-	0	0
$\varphi_1$	0	0	0	37,7268
$\varphi_2$	I,48946	II,5325	I,63323	II,5325
$\varphi_3$	3,66053	75,1177	4,59696	75,1177
$\varphi_4$	5,01510	-60,3797	4,26239	-60,3797
$\varphi_5$	3,71577	36,9498	4,17639	36,9498
$\varphi_6$	3,09288	-74,2943	2,16671	-74,2943
$\varphi_7$	-1,00826	-60,4117	-1,76136	-60,4117
$\varphi_8$	-2,81190	26,2231	-2,48500	26,2231
$\varphi_9$	-2,5	-26,8476	-2,83463	-179,601
$\varphi_{10}$	-7,72006	19,1862	-7,48088	19,1862
$\varphi_{11}$	-9,86	-III,251	-II,2468	16,1963
$\varphi_{12}$	-2,63969	269,644	0,721738	269,644
$\varphi_{13}$	19,1262	515,98	-	-
$\alpha_1 = 37,7268374; \alpha_2 = -152,758078; \alpha_{11} = 127,447855$				

Таблица 5

$\varphi$	$P_{\lambda}(\varphi)$	$P'_{\lambda}(\varphi)$	$P_{\Pi}(\varphi)$	$P'_{\Pi}(\varphi)$
$\varphi_1$	-	-	0	37,7268
$\varphi_2$	1,48946	II,5326	1,63323	II,5326
$\varphi_3$	3,66053	75,II79	4,59697	75,II79
$\varphi_4$	5,01512	-60,379I	4,26242	-60,379I
$\varphi_5$	3,71587	36,952I	4,17652	36,952I
$\varphi_6$	3,09306	-74,2947	2,16689	-74,2947
$\varphi_7$	-1,00793	-60,4052	-1,76096	-60,4052
$\varphi_8$	-2,81155	26,2146	-2,48475	26,2146
$\varphi_9$	-2,50012	-26,8546	-2,83489	-179,612
$\varphi_{10}$	-7,72056	19,1888	-7,48135	19,1888
$\varphi_{11}$	-9,86038	-III,250	-II,2472	16,1975
$\varphi_{12}$	-2,63980	269,652	0,721743	269,652
$\varphi_{13}$	19,1267	515,99I	-	-

Задача Коши для уравнения (I.I) в  $[\varphi_1; \varphi_{13}]$   
 решена с шагом по  $\varphi$  равным  $\frac{\Delta}{60} : 40$ ;

$\alpha_1 = 37,7268374$ ;  $\alpha_9 = -152,758078$ ;  $\alpha_{11} = 127,447855$

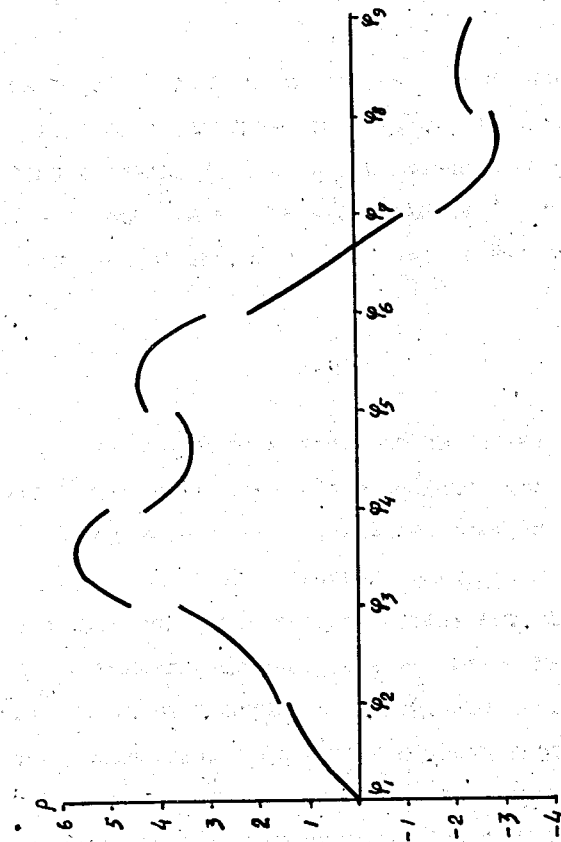


Рис.3

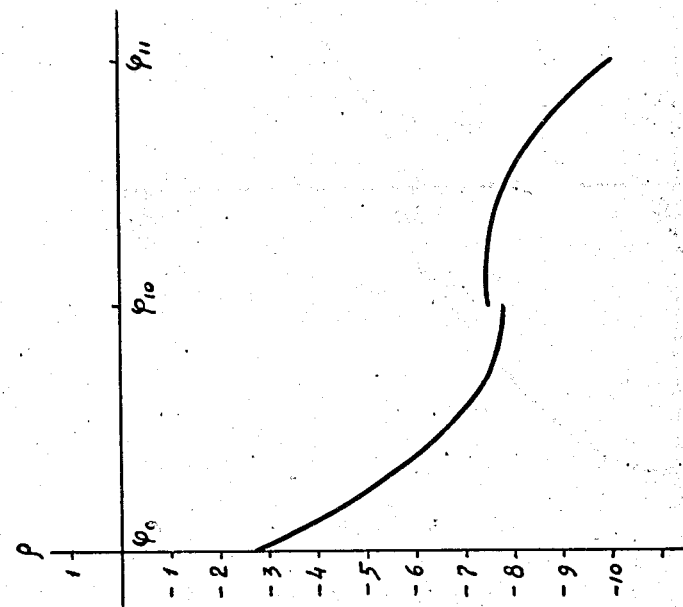
$[\varphi_9; \varphi_{11}]$  приведен на рис. 4, а на промежутке  $[\varphi_1; \varphi_2]$  - на рис.5. График траектории частицы, выводимой на промежутке  $[\varphi_1; \varphi_3]$  изображен на рис.6.

**Замечание.** Результаты расчетов с различными шагами по переменным  $\varphi$  и  $t$  показывают, что:

- 1) шаг по  $\varphi$  в задачах (А) и (В) можно брать равным  $\frac{\pi}{60} : 20$ ;
- 2) шаг по  $\varphi$  в задаче (С) можно брать равным либо  $\frac{\pi}{60} : 40$ , либо  $\frac{\pi}{60} : 20$ . При шаге  $\frac{\pi}{60} : 10$  и  $\tau = 1$  процесс не сходится;
- 3) в задаче (А) при шаге  $\tau = 1$  по переменной  $t$  процесс расходится. При  $\tau = 0.5$  процесс сходится. В задачах (В) и (С) процесс сходится при  $\tau = 1$ . Увеличение шага в задачах (В) и (С) нецелесообразно, т.к. при  $\tau = 1$  задача (В) решается за два шага, а задача (С) за три.

#### § 4. ВЫВОДЫ

Изложенный в настоящей работе метод расчета вывода пучка из ускорителя существенно отличается от ранее применяемых. Обычно применяемая методика расчета сводилась к следующему [4-10]. Задавались некоторые параметры отклоняющих магнитов ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{11}$ ) и рассчитывались траектории частиц (задача Коши) при этих параметрах. Если траектории оказывались неудовлетворительными, то задавались иные параметры отклоняющих магнитов и вновь решалась задача Коши. Этот процесс подбора параметров продолжался до тех пор, пока траектории частиц не оказывались удовлетворяющими поставленным требованиям. В этой методике существенную роль играл интуитивный подбор параметров, который требовал расчета очень большого числа траекторий и большой затраты времени на ЭВМ.





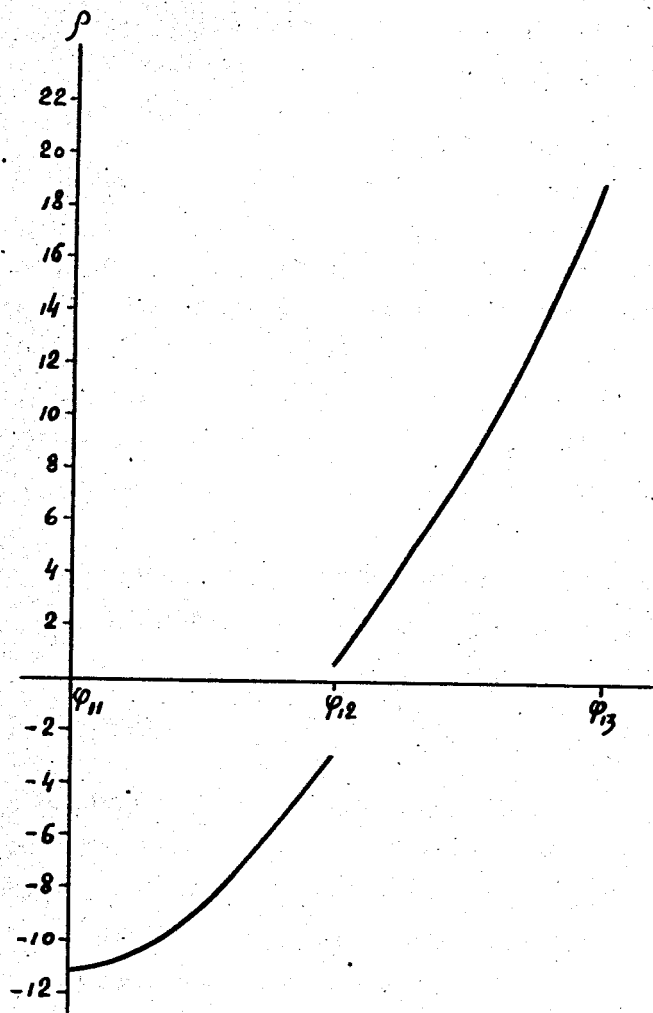


Рис. 5

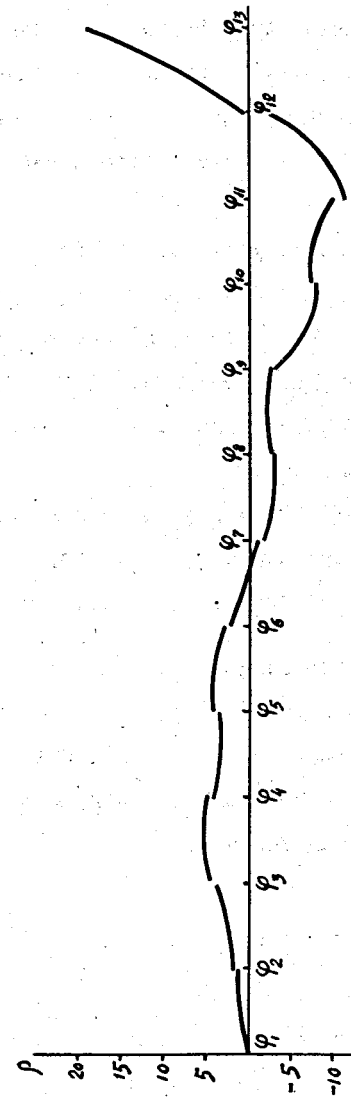


Рис. 6

При этом точность искомых параметров оказывается невысокой. Насколько нам известно, другие методы расчета вывода пучка заряженных частиц из ускорителей не применялись. По существу, задача вывода пучка из ускорителя сводится к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, а ранее применяемые методы осуществляли метод "проб", который, как известно, не эффективен. Предложенный метод совершенно исключает интуитивный элемент при решении задачи. В результате задача решается, как уже отмечалось, в течение двадцати минут и с высокой точностью.

Изучаемое в настоящей работе уравнение (I.I) является модельным, описывающим движение заряженных частиц в медианной плоскости ускорителя. Однако оно достаточно хорошо описывает физические процессы в ускорителе и получаемые с его помощью результаты представляют практический интерес. Часто в расчетах используется именно это уравнение.

Перенос изложенного в настоящей работе метода на более общие уравнения не представляет принципиальных трудностей и ведет лишь к некоторому усложнению программы для ЭВМ.

Авторы считают долгом поблагодарить А.А.Логунова за предложение заняться проблемой вывода, В.И.Гридасова за обсуждение постановки задачи, М.Г.Мещерякова за постоянный интерес к работе и П.А.Полубоярову за участие в определении коэффициентов функции, аппроксимирующей магнитное поле.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. Об одном методе введения параметра при решении краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.  
Журнал вычислительной математики и математической физики, 1967, 7, № 5, 1086-1095.
2. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. Решение одной дискретной краевой задачи с помощью непрерывного аналога метода Ньютона.  
Журнал вычислительной математики и математической физики, 1969, 9, № 2, 442-447.
3. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. Об одном методе введения параметра при решении краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.  
Препринт ОИЯИ, 5-2959, Дубна, 1966.
4. Б.В.Василишин, Е.М.Кулакова, Л.М.Панченко, Р.Н.Федорова.  
О методе расчета медленного резонансного вывода протонного пучка из синхрофазотрона ОИЯИ.  
Препринт ОИЯИ 9-4223, Дубна, 1968.
5. В.И.Данилов, В.Б.Мухина, Э.А.Полферов. Расчет системы вывода синхротрона.  
Препринт ОИЯИ Р-4102, Дубна, 1968.
6. Е.К.Тарфсов, В.В.Владимирский, Д.Г.Кожкарев. Расчетные характеристики протонного синхротрона на 60-70 Гэв.  
Препринт ИФ, 232, 1964.

7. В.В.Качалова, Ю.М.Сапунов, А.М.Фролов. Библиотека программ для расчета на ЭВМ "Минск-2" выводов пучков заряженных частиц из магнитного поля протонного синхротрона ИФВЭ (Библиотека РГ).  
Препринт ИФВЭ ОП, 67-59, Серпухов, 1967.
8. К.П.Мызников, В.М.Татаренко. О возможности быстрого вывода протонов с энергией 85 Гэв из ускорителя ИФВЭ.  
Препринт ИФВЭ СКУ 68-16, Серпухов, 1968.
9. К.Штеффен. Оптика пучков высоких энергий.  
М., "Мир", 1969.
10. А.Бенфорд. Транспортировка пучков заряженных частиц.  
М., Атомиздат, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел

26 ноября 1969 года.