3963

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

ЖВМ и МФ, 1969, т. 9, №2, с. 442-46

5 - 3963

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Е.П.Жидков, И.В.Пузынин

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ НЕПРЕРЫВНОГО АНАЛОГА МЕТОДА НЬЮТОНА

1968

5 - 3963

Е.П.Жидков, И.В.Пузынин

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ НЕПРЕРЫВНОГО АНАЛОГА МЕТОДА НЬЮТОНА

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

В данной работе рассматривается нелинейная дискретная граничная задача, получающаяся в результате одной конечноразностной аппроксимации краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\phi(y) = y'' + f(x, y) = 0, \tag{0.1}$$

$$y(0) = y(1) = 0 . \tag{0.2}$$

В работе /1/ для приближенного нахождения решений задачи (0.1)-(0.2) применяется непрерывный аналог метода Ньютона. Существование этих решений предполагается. Предложенная вычислительная схема является реализацией метода Эйлера решения задачи Коши для некоторого дифференциального уравнения в B -пространстве. Она сводится к решению при фиксированном значении параметра t граничной задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения и дальнейшему продвижению по параметру с помощью простого разностного соотношения. Решение граничной задачи при фиксированном t предполагалось находить численно, например, с использованием разностной аппроксимации. Легко заметить, что при этом вычислительная схема является численной реализацией непрерывного аналога метода Ньютона решения разностного операторного уравнения, аппроксимирующего исходную граничную задачу (0.1)-(0.2).

В настоящей работе дается обоснование этого метода: приведено доказательство существования решения дискретной граничной задачи, являющейся разностным аналогом задачи (0.1)-(0.2), и доказана сходимость приближенного решения к решению исходной задачи. При доказательстве существования решения дискретной граничной задачи используется результат работы /2/.

Аналогичные вопросы были рассмотрены, например, в работах /3,4/. Так, в работе /4/ приводится доказательство существования и способ нахождения приближенного решения задачи (0.1)-(0.2) с помощью метода Ньютона. Однако, связывая вопросы существования и единственности решения исходной задачи с методом приближенного решения, автор получает весьма ограничительные условия применимости метода.

1. Аппроксимация и основные предпосылки

Пусть N-положительное целое число и $h = N^{-1}$. Образуем равномерное разбиение отрезка действительной оси $[0,1]$ с помощью конечного подмножества $\{x_i\} \subset [0,1]$, содержащего точки $x_i = ih, i = 0,1,.N$

Пусть $C^{(2)}[0,1]$ -множество дважды непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ действительных функций, удовлетворяющих условию (0.2). Сеточным образом y_h функции $y(x) \in C^{(2)}[0,1]$ назовем $N+1$ -мерный вектор

$$y_h = (0, y_1, ..., y_{N-1}, 0),$$

компоненты которого $y_k = y(x_k)$. Множество всех сеточных образов пространства $C^{(2)}[0,1]$ обозначим через Φ_1. Нетрудно показать, что Φ_1 является B - пространством, если определить норму y_h как

$$\| y_h \|_1 = \max_i |y_i| + \max_i \frac{|y_{i+1} - y_i|}{h} + \max_i \frac{|y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}|}{h^2}. \tag{1.1}$$

Рассмотрим далее множество непрерывных на $[0,1]$ действительных функций, которое обозначим $C[0,1]$. Аналогичным образом построим множество сеточных образов элементов $C[0,1]$, которое обозначим Φ_2. Введя норму элемента $y_h \in \Phi_2$ как

$$\| y_h \|_2 = \max_i |y_i|, \tag{1.2}$$

можно показать, что Φ_2 будет B -пространством. Для функции $y(x) \in \Phi_1$, $x \in \{x_i\}$ введем в рассмотрение линейные операторы

$$\Delta_h y(x) = h^{-1}[y(x+h) - y(x)], \quad \nabla_h y(x) = h^{-1}[y(x) - y(x-h)],$$
$$\Delta_h^2 = h^{-1}(\Delta_h - \nabla_h). \tag{1.3}$$

Заметим, что если $y(x) \in C^{(4)}$, то

$$\Delta_h^2 y(x) = y''(x) + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi). \tag{1.4}$$

Имея в виду последнее соотношение, аппроксимируем краевую задачу (0.1)-(0.2) с помощью нелинейной разностной задачи

$$\phi_h(y) = \Delta_h^2 y(x) + f(x, y(x)) = 0, \ x \in \{x_i\}, \ y \in \Phi_1, \tag{1.5}$$

которая представляет нелинейную систему $N-1$ алгебраических уравнений для $N-1$ неизвестных $y(x_1), ..., y(x_{N-1})$.

Предположим, что выполнены предпосылки теоремы 2 работы /1/.

1°. Пусть решение граничной задачи (0.1)-(0.2) существует и в случае неединственности может быть локализовано, то есть можно построить дважды непрерывно дифференцируемые на $[0,1]$ функции $z(x)$ и $Z(x)$, удовлетворяющие краевому условию (0.2), $z(x) < Z(x)$ для $0 < x < 1$, такие, что внутри области G

$$0 \le x \le 1, \quad z(x) \le y \le Z(x) \tag{1.6}$$

имеется только одно решение y^*. Предположим, что $f(x,y)$ имеет в G непрерывные производные до второго порядка включительно.

2^0. Граничная задача

$$v'' + f'_y(x,y)v = 0, \tag{1.7}$$

$$v(0) = v(1) = 0 \tag{1.8}$$

имеет только тривиальное решение для любой непрерывно дифференцируемой функции $y(x) \in G$.

Если выполнено условие 1^0 локализация решения, то, как легко видеть, найдется такое $K > 0$, что в сфере $D \subset C^{(2)}[0,1]$

$$\| y - y^* \|_{C^{(2)}} \leq K \tag{1.9}$$

имеется только одно решение y^* задачи (0.1)-(0.2).

Будем предполагать, что область определения оператора ϕ_h есть B-пространство Φ_1, а область значений B-пространство Φ_2.

При достаточно малых h можно построить сферу $D_1 \subset \Phi_1$

$$\| y_h - y^*_h \| \leq K_1, \quad K_1 > 0 \tag{1.10}$$

такую, что в ней содержится только один сеточный образ решения задачи (0.1) - (0.2) и все $y_h \in D_1$ являются сеточными образами $y(x) \in D$. $\phi_h(y)$ в D_1 имеет производную Фреше $\phi'_h(y)$ и линейную производную Гато $\phi''_h(y)$, ограниченную в окрестности каждой точки сферы D_1. Производная Фреше оператора $\phi_h(y)$ является линейным оператором и имеет вид:

$$\phi'_h(y) = \{\Delta^2_h + f'_y(x,y(x))\}, \quad x \in \{x_i\}. \tag{1.11}$$

Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

2. Леммы

Лемма 1. Если выполнены условия 1^0- 2^0 п.1, то при достаточно малых h оператор $\phi'_h(y)$ имеет в D_1 обратный оператор $\phi'_h(y)^{-1}$.

Доказательство. Чтобы показать, что оператор $\phi'_h(y)$ имеет в D_1 обратный оператор $\phi'_h(y)^{-1}$, достаточно доказать, что дискретная граничная задача

$$\Delta^2_h v + f'_y(x,y(x))v = 0, \quad x \in \{x_i\}, \; v \in \Phi_1, \; y \in D \tag{2.1}$$

имеет только тривиальное решение для всех достаточно малых h.

Предположим противное: сколь бы мало ни было h_0, найдутся $h < h_0$ и $y \in D$ такие, что система линейных алгебраических уравнений (2.1) имеет нетравиальное решение. Рассмотрим натуральный ряд

$$1, 2, \ldots, m, \ldots \tag{2.2}$$

Поставим в соответствие каждому элементу m из (2.2) пару (h_m, y_m), для которых (2.1) имеет нетривиальное решение. Последовательность $\{h_m\}$ сходится к нулю. Из последовательности функций $\{y_m\}$, $y_m(x) \in D$ по теореме Арцела можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, причем предельная функция $\bar{y}(x)$ будет непрерывно дифференцируемой на $[0,1]$ и принадлежать области G. Будем считать, что для каждой пары (h_m, y_m), $m = 1,2,\ldots$, где h_m и y_m -элементы соответствующих сходящихся последовательностей, система линейных алгебраических уравнений (2.1) имеет линейно независимую систему нетривиальных решений. Из каждой такой системы выберем какое-нибудь нетривиальное решение $v_m(x)$, $x \in \{x_i\}_m$ и умножим его на такую константу, чтобы

$$\| v_m \|_2 = 1. \tag{2.3}$$

Из последовательности точек $x_m \in [0,1]$, в которых выполняется равенство $|v_m(x_m)| = 1$, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $x_m \to x \in [0,1]$, $m \to \infty$

Последовательность функций v_m имеет, в силу уравнения (2.1), равномерно ограниченные вторые разделенные разности $\Delta^2_h v_m$. Нетрудно показать, что и первые разделенные разности $\Delta_h v_m$ также равномерно ограничены. Для каждого m продолжим функции v_m и $\Delta_h v_m = w_m$ на весь отрезок $[0,1]$ при помощи линейной интерполяции в соседних узловых точках. Непрерывные функции $V_m(x)$ и $W_m(x)$ являются равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными. Из них можно выбрать, по теореме Арцела, равномерно сходящиеся подпоследовательность. Используя методику, описанную, например, в /5/ (стр. 39-43), можно показать, что $\frac{dv}{dx} = w$ и $v(x)$ удовлетворяет краевой задаче (1.7)-(1.8). Отсюда получим противоречие с условием 2° п.1: решение граничной задачи (1.7)-(1.8) для $\bar{y} \in G$ в точке $\bar{x} \in [0,1]$ равно по модулю 1. Противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. Пусть $\{g(x)\}$ и $\{r(x)\}$ – семейства равномерно ограниченных функций, $\{v(x)\}$, $x \in \{x_i\}$ – множество решений разностного уравнения

$$\Delta^2_h v(x) = g(x)v(x) + r(x) \tag{2.4}$$

с фиксированным начальным условием

$$v(0) = a, \quad v(h) = bh + a . \tag{2.5}$$

Тогда множество функций $v(x)$ равномерно ограничено на отрезке в смысле нормы, определенной равенством (1.1) (оценка не зависит от h).

Лемма почти очевидна: для ее доказательства достаточно построить разностный аналог метода Пикара для вычисления решений задачи (2.4)-(2.5) с помощью последовательных приближений. Можно показать, что последовательные приближения равномерно ограничены и сходятся к решению исходной задача. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 3. В сфере D_1, определенной неравенством (1.10), оператор $\phi'_h(y)^{-1}$ ограничен по норме.

Доказательство. Чтобы доказать, что в D_1

$$\| \phi'_h(y)^{-1} \| \le B, \quad B > 0,$$

достаточно показать, что если $v(x)$ – решение дискретной краевой задачи

$$\Delta^2_h v(x) + f'_y(x, y(x))\, v(x) = r(x), \tag{2.6}$$

$$x \in \{x_i\},\ v(x) \in \Phi_1,\ y(x) \in D, \quad \| r(x) \|_2 \le 1,$$

то

$$\| v(x) \|_1 \le B. \tag{2.7}$$

Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – линейно независимые решения однородного уравнения

$$\Delta^2_h u(x) + f'_y(x, y(x))\, u(x) = 0, \tag{2.8}$$

$$x \in \{x_i\},\ y(x) \in D,$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$u_1(0) = 1, \quad u_1(h) = 1; \qquad u_2(0) = 0, \quad u_2(h) = h. \tag{2.9}$$

Пусть далее $\bar{v}(x)$ – решение неоднородного разностного уравнения

$$\Delta^2_h \bar{v}(x) + f'_y(x, y(x))\, \bar{v}(x) = r(x), \qquad x \in \{x_i\},\ y(x) \in D, \quad \| r(x) \|_2 \le 1 \tag{2.10}$$

с начальным условием

$$\bar{v}(0) = a\ ,\quad \bar{v}(h) = bh + a. \tag{2.11}$$

Тогда решение задачи (2.6) можно представить в виде

$$v(x) = -a\,u_1(x) + \frac{a\,u_1(1) - \bar{v}(1)}{u_2(1)}\,u_2(x) + \bar{v}(x). \tag{2.12}$$

Согласно лемме 2, функции $\bar{v}(x)$, $u_1(x)$ и $u_2(x)$ равномерно ограничены по норме, определенной равенством (1.1). Покажем, что

$$\inf_{y \in D} |u_2(1)| = A > 0. \tag{2.13}$$

Предположим противное: для всех достаточно малых h имеет место $\inf\limits_{y \in D} |u_2(1)| = 0$. Можно выбрать последовательность $u_{2k}(1)$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} |u_{2k}(1)| = 0$. Ей соответствует последовательность $y_k(x) \in D$. По теореме Арцела из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, которая равномерно сходится на $[0,1]$ к непрерывно дифференцируемой функции $\bar{y}(x) \in C$. Решение предельного разностного уравнения

$$\Delta_h^2 u(x) + f'_y(x, \bar{y}(x))\,u(x) = 0,$$

$$x \in \{x_i\}$$

с начальными условиями

$$u(0) = 0,\quad u(h) = h\ ,$$

не являясь тождественным нулем, будет обращаться в нуль при $x = 1$. Переходя к пределу при $h \to 0$, нетрудно получить противоречие с условием 2° п.1. Таким образом, соотношение (2.13) доказано. Учитывая последнее, из выражения (2.12) легко получить требуемое неравенство (2.7). Лемма доказана.

3. Основные результаты

Как было показано в лемме 3 п.2, оператор $\phi'_h(y_h)^{-1}$ ограничен по норме в сфере D_1, определенной соотношением (1.10), то есть выполнено неравенство

$$\|\phi'_h(y_h)^{-1}\| \le B\ ,\quad y_h \in D_1\ ,\ B > 0. \tag{3.1}$$

Рассмотрим сферу

$$\|y_h - y^*_h\| < B\,\|\phi_h(y^*_h)\|. \tag{3.2}$$

Принимая во внимание, что решение y^* задачи (0.1)-(0.2) четырежды непрерывно дифференцируемо на отрезке $[0,1]$, а также соотношения (1.4) и (1.5), нетрудно заметить, что при достаточно малых h сфера (3.2) будет находиться внутри сферы D_1. Таким образом, при достаточно малых h для оператора $\phi_h(y_h)$ выполнены условия теоремы 1 работы /2/. Из нее следует, что дифференциальное уравнение

$$y'_{ht} = -\phi'_h(y_h)^{-1}\,\phi_h(y_h)\ ,\ y_h(0) = y^*_h$$

имеет решение $y_h(t)$ для значений t в промежутке $0 \le t < \infty$, причем его значения лежат в сфере (3.2). Существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} y_h(t) = \bar{y}_h$, служащий корнем уравнения (1.5).

Поскольку $\bar{y}_h$ лежит в сфере (3.2) и при $h \to 0$ выполняется $\|\phi_h(y^*_h)\| \to 0$, то отсюда следует, что

$$\lim_{h\to 0} \|\bar{y}_h - y^*_h\| = 0. \tag{3.3}$$

Из последнего соотношения следует сходимость решения разностной задачи (1.5) к решению исходной задачи (0.1)-(0.2).

Таким образом, доказана

<u>Теорема.</u> Если выполнены условия 1°-2° п.1, то решение дискретной граничной задачи (1.5) существует при достаточно малых h и сходится при $h \to 0$ к решению задачи (0.1)-(0.2).

Доказав теорему существования решения нелинейной разностной задачи (1.5), мы оказываемся в условиях, при которых применима теорема 1 работы /1/. Поэтому для нахождения решения уравнения (1.5) применим непрерывный аналог метода Ньютона при подходящем выборе начального приближения в сфере D_1. При его численной реализиции, предложенной в работе /1/, сходимость метода обеспечивается независимым стремлением шагов по переменной x и времени t к нулю.

Замечание. В работе /4/, являющейся обобщением работы /3/, существование решения аналогичной разностной задачи и его сходимость к точному решению получены в предположении, что

$$\sup f'_y = \eta < \pi^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -\infty < y < \infty . \tag{3.4}$$

Последнее условие обеспечивает существование и единственность решения исходной краевой задачи (0.1)-(0.2).

Предположение о существовании решений задачи (0.1)-(0.2) снимает ограничения на величину f'_y.

Литература

1. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, №5, 1086-1095.
2. М.К.Гавурин. Изв. ВУЗов. Математика, 1958, 5 (6), 18-31.
3. P.Henrici. Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations. Wiley, N.Y. 1962, p.p. 347-388.
4. M.Lees. Proceedings of a Symposium held at the University of Maryland, College Park. Acad. Press. N.Y. 1966. p.p. 59-72.

5. И.Г.Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во "Наука", 1964, 39-43.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 июля 1968 года.