ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

5 - 3915

В.Л.Пахомов

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1968

5 - 3915

В.Л.Пахомов

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Постановка задачи

Рассмотрим общую задачу расчета разветвленной энергетической сети, оптимальной по какому-либо параметру, при наличии ограничений. Примером могут служить электрические сети, газопроводы, паропроводы и т.п.

Математически всякая такая сеть эквивалентна некоторому графу [1]. Будем рассматривать конечные, связные, плоские графы типа дерева. Возьмем дерево G с множеством вершин $U = \{u^0 u^1 \dots u^n\}$. Пусть $s < n$ из них висячие вершины (рис. I). Из множества висячих вершин, одна питающая /источник/, а остальные потребляющие /стоки/. Если вершины пронумерованы в общем порядке от источника к стокам, то ребра пронумеруем так, чтобы i-е ребро вело в i-ю вершину.

В дальнейшем мы подразумеваем, по аналогии с реальными сетями, что здесь выполняются законы, аналогичные I и П законам Кирхгофа для электрических сетей.

В каждой висячей вершине заданы величины Q^i - "токи" и U^i - "напряжения"; как следствие этого в ребрах возникают потоки - q_i и перепады $v_i > 0$.

Пусть каждое ребро характеризуется некоторым варьируемым параметром $x_i \in [x_i^{min}, x_i^{max}]$, так что $v_i = f_i(x_i)$.

Функция f_i характеризует свойства данного i - го ребра, для нее мы потребуем существования обратной функции $x_i = \varphi_i(v_i)$.

Пусть A^i - множество всех вершин, соединенных с i - той вершиной ребром.

(I) Тогда $\sum\limits_{j \in A^i} q_j = 0 \qquad (i = 0, I, \dots, n)$

Пусть B^i - множество всех ребер, входящих в путь графа, соединяющий вершины U^0 и U^i.

(2) Тогда $\sum\limits_{j \in B^i} v_j = \Delta^i \quad (i = 0, I, \dots, n)$.

Теория таких систем уравнений рассматривается в статье [2].

Параметр x_i может изменяться непрерывно или дискретно. Во втором случае очевидно, что равенство (2) заменится неравенством (5).

Ставится задача: найти минимум

$$\sum_{i=1}^{n} x_i c_i \to min \tag{3}$$

при условиях

$$\sum_{j\in A^i} q_j = 0 \ , \quad i = \overline{0, n}. \tag{4}$$

$$\sum_{j\in B^i} v_j \leq \Delta^i \ , \quad i = \overline{0, n}, \tag{5}$$

или т.к. существует $x_i = \varphi_i(v_i)$, то найти минимум $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v_i) c_i \to min$ при условиях (4) и (5).

Основной алгоритм. [3].

Рассмотрим рис. 2. Пусть задана система точек $\{u_{ij}\}$, где

i - номер вертикальной прямой,

j - номер точки на этой прямой.

Назовем ее шкалой состояний. Любой паре точек (u_{ij}, u_{i+1k}) ставится в соответствие некоторое действительное число $\mathcal{Y}_{ij}^{i+1k}$.

Требуется найти непрерывный полигональный путь L из т. А(о,о) в т. В(n,m) /пересекающий каждую вертикальную прямую только один раз в одной из заданных точек/, причем такой, чтобы $\sum_L \mathcal{Y}$ была минимальна.

Соединим точку А(о,о) последовательно со всеми точками u_{1j} $(j = \overline{0, m})$. Поставим в соответствие им числа $\mathcal{Y}_{00}^{1j} \equiv \mathcal{Y}_0^{1j}$. Далее соединяем каждую точку u_{2j} с u_{1s} ($s = \overline{0, m}$). Ставим в соответствие им числа $\mathcal{Y}_0^{2j} = min(\mathcal{Y}_0^{1s} + \mathcal{Y}_{1s}^{2j}) = min\ \mathcal{Y}_{0,1s}^{2j}$ и точки u_{1s} /запоминаем путь/. И заполнив так i-ю прямую переходим к i + I, пока не дойдем до n - I прямой. Далее соединяем т. В с т. $u_{n-1,i}$ ($i = \overline{0, m}$) и находим требуемое значение функционала $\mathcal{Y}_0^{nm} = \min_s \mathcal{Y}_{0;n-1,s}^{n,m} = \min_L \sum_L \mathcal{Y}$ и искомый путь.

Расчет линейной сети

Предположим, что параметр x_i может изменяться непрерывно в своей области определения. Рассмотрим линейную сеть, состоящую из n звеньев (рис. 3). Построим для нее шкалу состояний. Для этого по оси абсцисс откладываем номера звеньев сети, по оси ординат величину v_i с шагом $0 < \delta < (v^{нач} - v^{кон})/2n$. Определим границы области перебора. Для этого двигаемся от т. $v^{кон}$ до n - I прямой, делая шаг δ на каждом звене. Полученную на n - I прямой точку соединяем с $v^{нач}$. Затем аналогично двигаемся от $v^{нач}$ до $v^{кон}$. Границы области определены.

Каждой паре точек (v_{ij}, v_{i+1k}), дающих перепад v_{ij}^{i+1k} , соответствует величина $x_{i+1} = x_{ij}^{i+1k} = \varphi(v_{ij}^{i+1k})$. Надо заметить, что здесь берутся только те пары точек (v_{ij} . v_{i+1k}), которые дают перепад $v_{ij}^{i+1k} > 0$ и величину $x_i \in [x_i^{min}, x_i^{max}]$, иначе точка считается недостижимой и выбрасывается из дальнейшего рассмотрения /на практике этому пути присваивается бесконечное значение функционала/.

Таким образом, применяя вышеописанную схему перебора и двигаясь от $v^{кон}$ к $v^{нач}$, мы получим минимальное значение функционала и соответствующие x_i на каждом участке.

Строя шкалу состояний и определяя границы области перебора вышеописанным образом, мы автоматически выполняем заданные в задаче ограничения.

Расчет разветвленной сети

В случае разветвленной сети основная схема вычислений остается без изменений.

Шаг δ выбирается из условия $\delta = \min\limits_{L_i} \delta(L_i)$.

Определение разветвленной области перебора делаем так (рис.4): строим области перебора для всех s - I цепочек и берем их "пересечение".

Получив единую область перебора, начинаем счет от любой висячей вершины. Дойдя до первого узла, ведем счет от следующей висячей вершины, соединенной с этим узлом, до этого узла. Общее направление счета к исходной точке /источнику/. Дойдя до этого узла опять, складываем значения функционала в соответствующих точках шкалы состояний, принадлежащих этому узлу /производим "склеивание"/. Затем, двигаемся таким же образом дальше. Дойдя до исходной точки /источника/, получим минимальное значение функционала и искомые величины x_i на всех ребрах с автоматическим выполнением заданных ограничений.

Случай дискретного параметра

Предположим, что параметры x_i могут принимать только дискретные значения $x_i^1, \ldots, x_i^{K_i}$; $/x_i^{min} = x_i^1, x_i^{max} = x_i^{K_i}/$.

В этом случае, решив задачу в предположении непрерывности x_i, мы получим решение в виде набора $\{\bar{x}_i\}$ и соответствующее значение функционала. Теперь необходимо заменить каждое $\bar{x}_i$ каким-то значением из набора $x_i^1, \ldots, x_i^{K_i}$. Для любого $\bar{x}_i$ найдутся $x_i^j \leq \bar{x}_i \leq x_i^{j+1}$. Поэтому, заменив, например, $\bar{x}_i$ на x_i^j, мы получим правильное решение, "близкое" к оптимальному.

Далее можно ввести устранимые точки /точки перехода/ на каждом ребре, делая подразделения, т.е. одна часть ребра будет характеризоваться величиной x_i^j, а другая x_i^{j+1}, с полным сохранением величины v_i на данном ребре. /Например, вместо одного сопротивления в электрической сети поставить два/.

Если эти возможности нас не удовлетворяют, то для получения оптимальной замены поступаем следующим образом. У нас есть набор

$$(x_1^j, x_1^{j+1})(x_2^s, x_2^{s+1}) \ldots (x_n^p, x_n^{p+1}),$$

по два значения x_i на каждом ребре. Соответственно им имеется набор

$$(v_1^j, v_1^{j+1}) \ldots,$$

причем в силу условия на функцию $v_i = f_i(x_i)$ имеем либо $v_1^i > v_i^{i+1} > 0$, либо $0 < v_1^i < v_1^{i+1}$ для всех пар в наборе.

Нахождение оптимальной замены аналогично решению следующей задачи /имеющей самостоятельный интерес/.

Требуется найти максимум

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \to max$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \le \Delta,$$

где $\alpha_i = \{\alpha_i^1, \alpha_i^2\}$, $\quad 0 < \alpha_i^1 < \alpha_i^2$.

Заметим, что для решения этой задачи простым перебором необходимо рассмотреть 2^n вариантов.

Образуем разности $m_i = \alpha_i^2 - \alpha_i^1$ и $\Delta' = \Delta - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^1$.

Тогда задача сводится к следующей.

Найти максимум

$$L_n(\delta) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i m_i \to max, \quad \delta_i = \{0, 1\}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i m_i \le \Delta'.$$

Определим функцию $f_n(\Delta') = \max_{\{\delta_i\}} L_n(\delta)$, тогда $f_1(\Delta') = \tau \cdot m_1$,

где $\tau = max\left\{0, min\left(\left[\frac{\Delta'}{m_1}\right], 1\right)\right\}$,

и по рекурентному соотношению $f_n(\Delta') = \max_{\delta_n}\{\delta_n m_n + f_{n-1}(\Delta' - \delta_n m_n)\}$

находим искомое значение функционала и соответствующий набор $\{\delta_i\}$.

Заключение

Методом динамического программирования [4] можно решать как непрерывные, так и дискретные задачи на экстремум. Во втором случае, вообще говоря, количество переборов резко сокращается.

Этот метод не требует задания начального приближения решения и всегда дает глобальный экстремум соответствующей дискретной задачи. В непрерывном случае полученное решение можно уточнять до любой необходимой точности приемами, резко сокращающими количество переборов [3]. Некоторые теоремы, касающиеся сходимости в непрерывном случае, приведены в статье [3], дающей ссылки на работы, относящиеся к модификациям данного метода и его практическим приложениям.

Ввиду однотипности и несложности применяемых операций программирование сильно облегчается, в силу чего этот метод хорошо приспособлен для реализации на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Д. Кудрявцев. О некоторых математических вопросах теории электрических цепей. Успехи матем.наук, 1948, 3, вып. 4.

2. Б.Н. Пшеничный. Расчет энергетических сетей на электронных вычислительных машинах. ЖВМ и МФ, 1962, 2, № 5.

3. Н.Н. Моисеев. Численные методы теории оптимальных управлений, использующие вариации в пространстве состояний. Кибернетика, 1966, № 3.

4. Р. Беллман, С. Дрейфус, Прикладные задачи динамического программирования. Изд. "Наука", М., 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 июня 1968 года

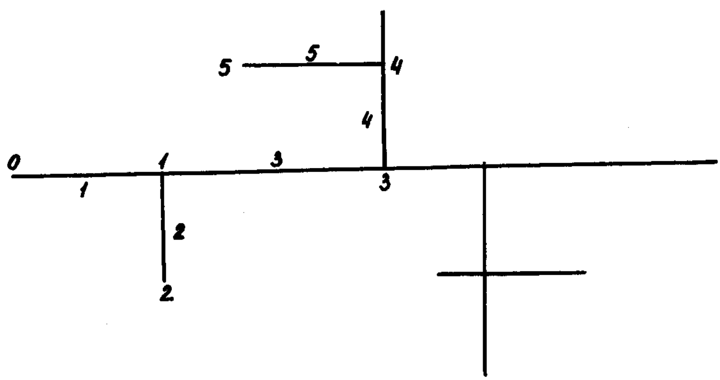


Рис. 1

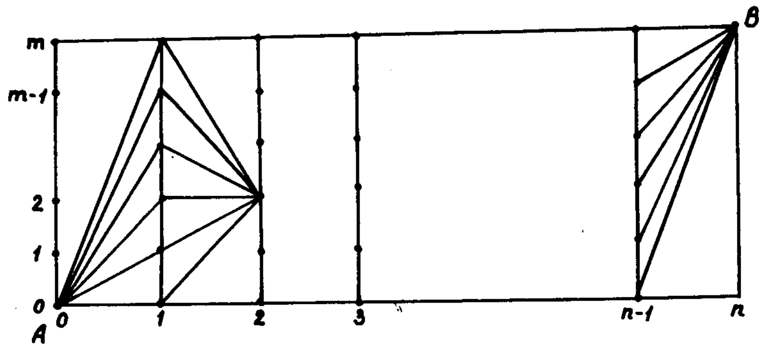


Рис. 2

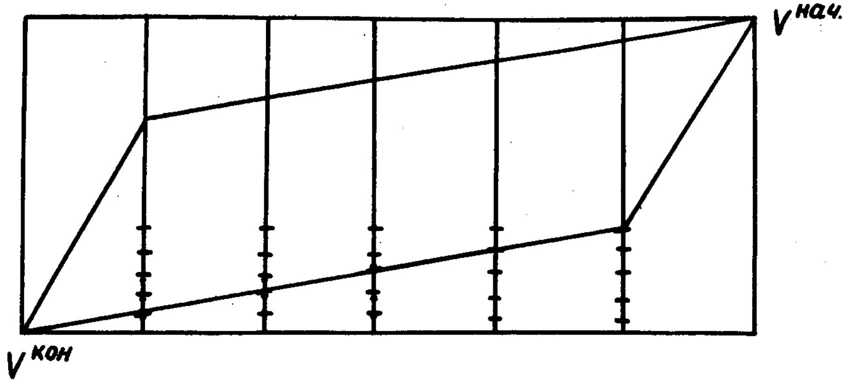
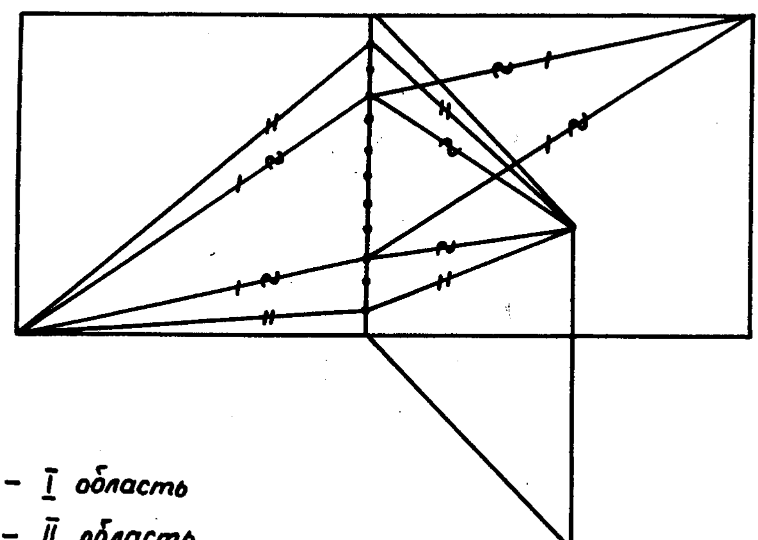


Рис. 3



' – I область

'' – II область

~ – пересечение областей.

Рис. 4