ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

5 - 3749

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

В.М. Браилов, Г.И. Макаренко, А.И.Киселев,
М.Л. Краснов

СБОРНИК ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

1968

В.М. Браилов, Г.И. Макаренко, А.И.Киселев,
М.Л. Краснов

СБОРНИК ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

П Р Е Д И С Л О В И Е

Предлагаемый сборник не претендует на сколько-нибудь полный свод задач и примеров, предлагавшихся на вступительных экзаменах во ВТУЗ'ы Москвы. В сборнике нет систематического и детального изложения целого ряда вопросов. Это, скорее, набор, в каком-то смысле "экзотических" примеров, которые, несмотря на внешнюю сложность, решаются весьма просто.

Авторы в значительной степени преследовали цель приучить поступающего внимательней приглядываться к предлагаемым задачам и анализировать их, вместо того, чтобы сразу браться за шаблонные приемы решений.

Если эта книга в какой-то мере научит вчерашнего школьника, поступающего во ВТУЗ, творчески подходить к предлагаемым задачам, то мы будем считать, что наша цель достигнута.

В процессе работы над рукописью неоценимую помощь нам оказали Э.Н.Гвоздикова и Н.Н.Зарубина.

Пользуемся случаем выразить им нашу глубокую признательность.

Авторы

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

I. Алгебра.

Квадратные уравнения.

1. Если $ax^2+bx+c=0$, то $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $(a\neq 0)$.
2. <u>Формулы Виета</u>. Если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+px+q=0$, то $x_1+x_2=-p$ и $x_1 x_2=q$.
3. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Арифметическая прогрессия.

4. Общий член арифметической прогрессии: $a_n=a_1+(n-1)d$, где a_1 – первый член, d – разность прогрессии, n – номер взятого члена.
5. Сумма первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n.$$

Геометрическая прогрессия.

6. Общий член геометрической прогрессии: $u_n=u_1 q^{n-1}$, где u_1 – первый член, q – знаменатель прогрессии, n – номер взятого члена.
7. Сумма первых n членов геометрической прогрессии:
$S_n=\dfrac{u_1-u_n q}{1-q}=\dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$, если $q\neq 1$, $S_n=a_1 n$, если $q=1$.
8. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S=\frac{u_1}{1-q},\quad |q|<1.$$

Логарифмы.

9. Логарифмом числа $x>0$ при основании a $(a>0, a\neq 1)$ называется показатель степени y, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить данное число x.

Таким образом, $y=\log_a x$ равносильно тому, что $a^y=x$.

График логарифмической функции приведен на рис. I.

I0. Из определения логарифма вытекает основное логарифмическое тождество
$$a^{\log_a x}=x.$$

Свойства логарифмов.

I1. $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$, $(M>0, N>0)$.

I2. $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$.

I3. $\log_a N^{\alpha}=\alpha\log_a N$; α - любое действительное число.

I4. $\log_a \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$.

I5. $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$, $(b>0, b\neq 1, c>0)$,

отсюда при $c=a$ имеем: $\log_a b\cdot\log_b a=1$ или $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$.

I6. $\log_{a^\alpha} N^{\beta}=\frac{\beta}{\alpha}\log_a N$, β - любое действительное число.

Частные случаи:

$$\log_{a^\alpha} N=\frac{1}{\alpha}\log_a N, \quad (\beta=1),$$

$$\log_{a^\alpha} N^{\alpha}=\log_a N, \quad (\beta=\alpha).$$

17. $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$, $(b>0,\ b\neq 1)$.

18. $\dfrac{\log_a M}{\log_a N} = \dfrac{\log_b M}{\log_b N}$, $(b>0,\ b\neq 1,\ N\neq 1)$.

Неравенства.

19. Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.

20. Если $a>b$, то $a+m>b+m$.

21. Если $a>b$, то $am>bm$ при $m>0$,
$am<bm$ при $m<0$.

22. При $a>1$ из неравенства $a^{x_1}<a^{x_2}$ следует $x_1<x_2$,
при $0<a<1$ из неравенства $a^{x_1}<a^{x_2}$ следует $x_1>x_2$.
(См. рис.2).

23. При $a>1$ из неравенства $\log_a x_1<\log_a x_2$ следует $x_1<x_2$.
При $0<a<1$ из неравенства $\log_a x_1<\log_a x_2$ следует $x_1>x_2$.

24. При $a>1$ имеем: если $\log_a x<b$, то $x<a^b$.
При $0<a<1$ имеем: если $\log_a x<b$, то $x>a^b$.

П. Геометрия.

Площади плоских фигур.

1. Ромб: a - сторона, d_1, d_2 - диагонали; α - угол между сторонами: $S=\dfrac{d_1 d_2}{2}=a^2\sin\alpha$.

2. Параллелограмм: a, b - стороны, h - высота, α - угол между сторонами: $S=ah=ab\sin\alpha$.

3. Трапеция: a, b - основания, h - высота, m - средняя линия:

4. Выпуклый четырехугольник: d_1, d_2 – диагонали, α – угол между ними: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$.

5. Любой треугольник: a, b, c – стороны, a – основание, h – высота, A, B, C – углы, лежащие против сторон a, b, c, $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр:

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A} = \frac{h^2 \sin A}{2\sin B \sin C} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} .$$

6. Многоугольник, описанный вокруг круга: r – радиус вписанного круга, P – периметр многоугольника:

$$S = \frac{1}{2} P \cdot r .$$

7. Правильный шестиугольник: a – сторона:

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 .$$

8. Правильный многоугольник: P – периметр, h_a – апофема:

$$S = \frac{P \cdot h_a}{2} .$$

9. Круг: R – радиус, d – диаметр, C – длина окружности.

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{1}{2} C \cdot R .$$

10. Сектор: R – радиус, n° – градусная мера центрального угла, ℓ – длина дуги.

$$S = \frac{1}{2} R\ell = \frac{\pi n^\circ}{360^\circ} \cdot R^2 .$$

Площади поверхностей.

Обозначения.

S – площадь основания,

$S_Б$ – боковая поверхность,

$S_П$ – полная поверхность,

a, b, c – измерения прямоугольного параллелепипеда,

h_a – апофема правильной пирамиды и правильной усеченной пирамиды.

h – высота,

R – радиус шара,

D – диаметр шара,

r – радиус,

d – диаметр основания,

P – периметр основания,

l – образующая конуса.

11. Прямая призма:

$$S_Б = P \cdot h \quad , \quad S_п = Ph + 2S .$$

12. Наклонная призма: P_1 – периметр перпендикулярного сечения, l_1 – боковое ребро. $S_Б = P \cdot h$, $S_п = P_1 l_1 + 2S$.

13. Правильная пирамида:

$$S_Б = \frac{P \cdot h_a}{2} \quad , \quad S_п = \frac{P h_a}{2} + S .$$

14. Правильная усеченная пирамида:

$$S_Б = \frac{P_1 + P_2}{2} h_a$$ (P_1 и P_2 – периметры оснований),

$$S_п = \frac{P_1 + P_2}{2} h_a + S_1 + S_2$$ (S_1 и S_2 – площади оснований).

15. Цилиндр круглый:

$$S_Б = 2\pi R h = \pi d h \quad , \quad S_п = 2\pi R (h + r) .$$

16. Конус круглый:

$$S_Б = \pi r l \quad , \quad S_п = \pi r (l + r) .$$

17. Усеченный круговой конус:

$S_Б = \pi(r_1 + r_2)$, (r_1, r_2 - радиусы верхнего и нижнего оснований),

$$S_п = \pi(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 .$$

18. Шар:

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2 .$$

19. Шаровой сегмент:

$S_Б = 2\pi R h = \pi(r^2 + h^2)$, (r - радиус основания сегмента,

$S_п = \pi(2r^2 + h^2)$ $\quad$ h - высота сегмента).

20. Шаровой пояс:

$$S = 2\pi R h .$$

Объемы тел.

21. Призма, прямая и наклонная:

$$V = S h .$$

22. Пирамида:

$$V = \frac{1}{3} S h .$$

23. Усеченная пирамида:

$$V = \frac{h}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) .$$

24. Цилиндр:

$$V = S h = \pi r^2 h = \frac{1}{4}\pi d^2 h .$$

25. Конус:

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{12}\pi d^2h.$$

26. Усеченный конус:

$$V=\frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right).$$

27. Шар:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{6}\pi D^3.$$

28. Шаровой сегмент:

$$V=\pi\left(R-\frac{h}{3}\right)h^2=\frac{\pi h}{6}\left(h^2+3r^2\right).$$

29. Шаровой слой:

$$V=\frac{\pi h^3}{6}+\frac{\pi}{2}\left(r_1^2+r_2^2\right)h,$$ (r_1, r_2 - радиусы оснований).

30. Шаровой сектор:

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2h,$$ (h - высота сегмента, содержащегося в секторе).

Ш. Тригонометрия.

Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла.

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

2. $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

3. $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha\neq\pi n, \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

4. $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}, \quad \alpha\neq\pi n, \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

5. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

6. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} n, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7. $\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

8. $\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha, \quad \alpha \neq \pi n, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Выражение одних тригонометрических функций через другие:

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
$\sin\alpha$		$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$		$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}$
$\sec\alpha$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$		$\pm\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\dfrac{1}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	

Формулы приведения:

Угол / Функция	$-\alpha$	$90^\circ \mp \alpha$	$180^\circ \mp \alpha$	$270^\circ \mp \alpha$	$360^\circ \mp \alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
tg	$-tg\,\alpha$	$\pm ctg\,\alpha$	$\mp tg\,\alpha$	$\pm ctg\,\alpha$	$\mp tg\,\alpha$
ctg	$-ctg\,\alpha$	$\pm tg\,\alpha$	$\mp ctg\,\alpha$	$\pm tg\,\alpha$	$\mp ctg\,\alpha$
sec α	$+\sec\alpha$	$\pm cosec\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$\mp cosec\,\alpha$	$+\sec\alpha$
cosec α	$-cosec\,\alpha$	$+\sec\alpha$	$\pm cosec\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$\mp cosec\,\alpha$

Замечание. Для запоминания формул приведение рекомендуется пользоваться следующим правилом:

Если угол α откладывается от горизонтального диаметра (формулы для углов $-\alpha$, $180^\circ \pm \alpha$, $360^\circ \pm \alpha$), то название приводимой функции сохраняется.

Если угол α откладывается от вертикального диаметра (формулы для углов $90^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$), то название приводимой функции меняется на сходное (синус и косинус, тангенс и котангенс, секанс и косеканс).

Знак приведенной функции совпадает со знаком приводимой функции, если считать угол α острым.

Формулы сложения.

9. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.

10. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$.

11. $$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

12. $$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta} = \frac{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}.$$

Тригонометрические функции двойных, тройных и половинных углов.

13. $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

14. $$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

15. $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

16. $$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$

17. $$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

18. $$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

19. $$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

20. $$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}.$$

21. $$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

22. $$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

23. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

24. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

25. $\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

26. $\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

27. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

28. $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Формулы преобразования алгебраических сумм тригонометрических функций в произведение и обратно.

29. $\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$.

30. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

31. $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$.

32. $\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

33. $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$.

34. $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha)$

35. $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha)$.

36. $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

37. $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

38. $\sin\alpha \sin\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$.

39. $\cos\alpha \cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$.

40. $\sin\alpha \cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(x+\beta)\right]$.

Обратные тригонометрические функции.

41. $y = \arcsin x$, если:

а) $\sin y = x$, б) $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.

42. $y = \arccos x$, если:

а) $\cos y = x$, б) $0 \le y \le \pi$.

43. $y = \operatorname{arctg} x$, если:

а) $\operatorname{tg} y = x$, б) $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.

44. $y = \operatorname{arcctg} x$, если:

а) $\operatorname{ctg} y = x$, б) $0 < y < \pi$.

45. $\sin(\arcsin x) = x \quad , |x| \le 1,$
$\cos(\arccos x) = x \quad , |x| \le 1,$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad ,$
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \quad .$

46. $\arcsin(\sin y) = y, \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2},$
$\arccos(\cos y) = y, \quad 0 \le y \le \pi,$
$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y) = y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$
$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} y) = y, \quad 0 < y < \pi.$

47. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$
$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$

Общий вид решений простейших тригонометрических уравнений.

48. $\cos x = a$ где $|a| \le 1$; $x = \pm \arccos a + 2\pi k$.

49. $\sin x = a$ где $|a| \le 1$; $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$.

50. $\operatorname{tg} x = a$ где a - произвольное вещественное число;
$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$.

51. $\operatorname{ctg} x = a$ где a - произвольное вещественное число;
$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$.

При решении тригонометрических уравнений иногда используются следующие соотношения:

52. Если $\sin\alpha = \sin\beta$, то а) $\alpha - \beta = 2\pi k$, б) $\alpha + \beta = \pi + 2\pi k$.

53. Если $\cos\alpha = \cos\beta$, то а) $\alpha - \beta = 2\pi k$, б) $\alpha + \beta = 2\pi k$.

54. Если $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, то $\alpha - \beta = \pi k$.

В формулах 48-54 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ.

Вариант № I.

I. Упростить выражение:

$$\left(\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2}\right)^{-1}-\frac{a^2-9ab+14b^2}{a^2-ab-2b^2}+\frac{6a}{a+b}.$$

Решение.

Имеем

$$\left(\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2}\right)^{-1}=\frac{2a^2-5ab+3b^2}{2a^2-ab-3b^2}=\frac{(a-b)(2a-3b)}{(a+b)(2a-3b)}=\frac{a-b}{a+b}.$$

Далее

$$\frac{a^2-9ab+14b^2}{a^2-ab-2b^2}=\frac{(a-2b)(a-7b)}{(a-2b)(a+b)}=\frac{a-7b}{a+b}.$$

Обозначив для краткости исходное выражение через W, будем иметь

$$W=\frac{a-b}{a+b}-\frac{a-7b}{a+b}+\frac{6a}{a+b}=\frac{6a+6b}{a+b}=6.$$

2. Решить уравнение:

$$\sqrt[3]{(x+8)^2}+\sqrt[3]{(x+8)(8-x)}+\sqrt[3]{(8-x)^2}=4. \qquad (I)$$

Решение.

Перепишем левую часть уравнения (I) в виде:

$$\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^2+\sqrt[3]{x+8}\,\sqrt[3]{x-8}+\left(\sqrt[3]{x-8}\right)^2=4.$$

Умножив обе части на $\sqrt[3]{x+8}-\sqrt[3]{x-8}$, получим

$$x+8-x+8=4\left(\sqrt[3]{x+8}-\sqrt[3]{x-8}\right)$$

или $$\sqrt[3]{x+8}-\sqrt[3]{x-8}=4. \qquad (2)$$

Обозначим $\sqrt[3]{x-8} = y$, (3)

тогда $x+8 = y^3+16$ и уравнение (2) примет вид $\sqrt[3]{y^3+16} = 4+y$.

Отсюда после простых преобразований получим уравнение для y :

$$y^2+4y+4=0,$$

корни которого $y_1 = y_2 = -2$.

Полагая в (3) $y=-2$, получим $\sqrt[3]{x-8} = -2$, откуда $x=0$.

3. Вычислить

$$2\,\mathrm{tg}\,1095^\circ + \mathrm{ctg}\,975^\circ - \mathrm{tg}\,195^\circ.$$

Решение.

Пользуясь периодичностью тангенса и котангенса и формулами приведения, получим

$$W = 2\,\mathrm{tg}\,1095^\circ + \mathrm{ctg}\,975^\circ - \mathrm{tg}\,195^\circ = 2\,\mathrm{tg}\,15^\circ + \mathrm{tg}\,15^\circ - \mathrm{tg}\,15^\circ = 2\,\mathrm{tg}\,15^\circ.$$

Далее по формуле $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, где $\alpha = 30^\circ$, найдем

$$2\,\mathrm{tg}\,15^\circ = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{30^\circ}{2} = \frac{\sin 30^\circ}{1+\cos 30^\circ} = 2\,(2-\sqrt{3}).$$

Ответ: $W = 2\,(2-\sqrt{3})$.

4. Решить уравнение:

$$4\cos x\cos 2x\sin 3x - \sin 2x + \cos 4x = \frac{\mathrm{ctg}^2 2x}{1+\mathrm{ctg}^2 2x} - \sin 2x. \quad (1)$$

Решение.

Первое слагаемое в левой части уравнения (I) преобразуем так

$$4\cos x\cos 2x\sin 3x = 2\cos x\,(2\sin 3x\cos 2x) =$$

$$= 2\cos x\,(\sin x + \sin 5x) = \sin 2x + 2\sin 5x\cos x,$$

а правую часть – так:

$$\frac{ctg^2 2x - \sin^2 2x}{1+ctg^2 2x} = \frac{\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} - \sin^2 2x}{1+\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x}} = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos 4x$$

Теперь имеем:

$$\sin 2x + 2\sin 5x\cos x - \sin 2x + \cos 4x = \cos 4x$$

или $$2\sin 5x\cos x = 0,$$

отсюда получаем:

а) $\sin 5x = 0$,

что дает первую серию решений

$$x = \frac{\pi k}{5}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

б) $\cos x = 0$,

что дает вторую серию решений

$$x = \frac{\pi}{2}(2k+1), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Вариант № 2.

5. Упростить выражение:

$$\left[\frac{x^3+2x^2y+4xy^2+3y^3}{x^4+x^3y+4x^2y^2+xy^3+3y^4}\right]^{-1} - \frac{2xy}{x+y}.$$

Решение.

Преобразуем первый член

$$\left[\frac{x^3+2x^2y+4xy^2+3y^3}{x^4+x^3y+4x^2y^2+xy^3+3y^4}\right]^{-1} = \frac{x^4+x^3y+4x^2y^2+xy^3+3y^4}{x^3+2x^2y+4xy^2+3y^3} =$$

$$= \frac{(x^4+2x^2y^2+y^4)+(2x^2y^2+2y^4)+(x^3y+xy^3)}{(x^3+y^3)+(2x^2y+4xy^2+2y^3)} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2)^2+2y^2(x^2+y^2)+xy(x^2+y^2)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)+2y(x^2+2xy+y^2)} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2)(x^2+xy+3y^2)}{(x+y)(x^2+xy+3y^2)} = \frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

Теперь имеем

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} - \frac{2xy}{x+y} = \frac{(x-y)^2}{x+y}.$$

Ответ: $\dfrac{(x-y)^2}{x+y}$.

6. Решить уравнение

$$\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}\right) - 2 = \frac{1}{4}\lg 16 - \sqrt{x+0{,}25}\,\lg 4. \quad (I)$$

Решение.

Так как $2 = \lg 100$, $\frac{1}{4}\lg 16 = \lg 2$, а $\sqrt{x+0{,}25}\,\lg 4 = \lg 2^{\sqrt{4x+1}}$,

то уравнение (I) можно переписать в виде:

$$\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}\right) - \lg 100 = \lg 2 - \lg 2^{\sqrt{4x+1}},$$

откуда, потенцируя, получим

$$\frac{3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}}{100} = \frac{2}{2^{\sqrt{4x+1}}} \text{ или } 6^{\sqrt{4x+1}} = 6^3,$$

так что $\sqrt{4x+1} = 3$, и следовательно, $x = 2$.

7. Доказать тождество:

$$\sin 2\alpha \sec 3\alpha \sec\alpha - \frac{1}{2}(1+\operatorname{tg}^2 2\alpha)\sin 4\alpha = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha.$$

Решение.

Преобразуем левую часть

$$\sin 2\alpha \sec 3\alpha \sec\alpha - \frac{1}{2}(1+\operatorname{tg}^2 2\alpha)\sin 4\alpha =$$

$$= \sin 2\alpha \frac{1}{\cos 3\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 2\alpha}\, 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha =$$

$$=\operatorname{tg}2\alpha\,\frac{\cos2\alpha-\cos\alpha\cos3\alpha}{\cos\alpha\cos3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha\,\frac{\cos2\alpha-\cos4\alpha}{2\cos\alpha\cos3\alpha}=$$

$$=\operatorname{tg}2\alpha\,\frac{\sin\alpha\sin3\alpha}{\cos\alpha\cos3\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha.$$

Тождество доказано.

8. Решить уравнение:

$$\sin^4x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Решение.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{(1-\cos2x)^2}{4}+\frac{\left[1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2}{4}=\frac{1}{4}$$

или

$$(1-\cos2x)^2+(1+\sin2x)^2=1.$$

Возвысив обе скобки в квадрат и сделав необходимые упрощения, получим $1-\cos2x+\sin2x=0$, или

$$2\sin^2x+2\sin x\cos x=0$$

или

$$\sin x(\sin x+\cos x)=0.$$

Уравнение (2) равносильно двум следующим

$$\text{а) } \sin x=0, \quad \text{б) } \sin x+\cos x=0.$$

Из а) получаем $x=\pi k$, из б) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$,

где $k=0,\pm1,\pm2,\dots$

Вариант № 3.

9. Упростить выражение

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{x}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}+2\right)\sqrt{0,2}\ .$$

10. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^{a} &= y^{b} \\ \lg\frac{x}{y} &= \frac{\lg x}{\lg y} \end{aligned}\right\}.$$

11. Дано

$$\sin\alpha+\cos\alpha=m\ .$$

Найти

$$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha\ .$$

12. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 2x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)=\sin 6x\,\sin 2x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)\ .$$

Вариант № 4.

13. Упростить выражение

$$\left\{\left[\frac{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})^3+2x-y}{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})^3+2y-x}\right]^2:\sqrt[6]{\left(\frac{y}{x}\right)^{-1}}\right\}\sqrt{\frac{y}{x}}\ .$$

14. Доказать, что если a, b, c – три последовательных члена арифметической прогрессии, то между ними существует соотношение

$$a^2+8bc=(2b+c)^2\ .$$

15. Упростить

$$\frac{(1+\sin 2x)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)}{2\cos\left(x-\frac{5}{4}\pi\right)\sin\left(x+\frac{7}{4}\pi\right)}\ .$$

16. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin x-\cos x-\sin^2 x=\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}\sin^2 2x\,(\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x)\ .$$

Вариант № 5.

17. Упростить выражение $(0 < y < 1)$

$$\left[\left(\frac{1}{y^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{y}\right]\left[\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}}}{(1+y)^{\frac{1}{2}}-(1-y)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1-y}{\sqrt{1-y^2}+y-1}\right].$$

18. Найти действительные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}(x^2+y^2)(x-y)&=447\\ xy(x-y)&=210\end{aligned}\right\}.$$

19. Доказать тождество

$$4\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\frac{3}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

20. Решить уравнение

$$6\sin x-5\sin 2x\cos x=2\cos^3 x.$$

Вариант № 6.

21. Упростить выражение

$$\frac{x^{\frac{4}{3}}-8x^{\frac{1}{3}}y}{x^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\frac{y}{x}}\right)-x^{\frac{2}{3}}.$$

22. Доказать, что если числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{b+a}$ составляют арифметическую прогрессию, то числа a^2, b^2, c^2 тоже составят арифметическую прогрессию.

23. Упростить

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta).$$

24. Решить уравнение

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2.$$

Вариант № 7.

25. Упростить выражение

$$\left[\frac{\sqrt{y}+y\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^{-1}}{\sqrt{x}-x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^{-1}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{\left(\frac{y}{x}\right)^{-2}}\right]:\left(1+\frac{2\sqrt{xy}+2y}{x-y}\right).$$

26. Решить уравнение

$$3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2.$$

27. Вычислить

$$2\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ.$$

28. Решить уравнение

$$3\sin(\pi+x)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Вариант № 8.

29. Определить радиус окружности, если вписанный в нее угол со сторонами a и b опирается на дугу γ°.

Решение.

Обозначим $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ (рис.3). Соединим центр окружности O с точками A и B, тогда $OA=OB=R$. Так как $\angle AOB=\gamma^\circ$ – центральный, то $\angle ACB=\frac{1}{2}\gamma^\circ$.

Из ΔBCA имеем $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\gamma}{2}$ (I).

Из ΔBOA имеем $c^2=R^2+R^2-2R^2\cos\gamma$ (2).

Сравнивая (I) и (2), получим

$$R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\frac{\gamma}{2}}}{2\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

30. Упростить выражение

$$F=\frac{x^2+xy-6y^2}{x^2+3xy+2y^2}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1}{x+\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}}\left(\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}}\right).$$

Решение.

Имеем

1) $$\frac{x^2+xy-6y^2}{x^2+3xy+2y^2}=\frac{(x-3y)(x+2y)}{(x+y)(x+2y)}=\frac{x-3y}{x+y}.$$

2) $$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1}{x+\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}.$$

3) $$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}}\left(\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}}\right)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}.$$

Окончательно

$$F=\frac{x-3y}{x+y}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}+\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{x-3y}{x+y}+\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

31. Решить уравнение:

$$x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\frac{3}{2}(x+1). \qquad (1)$$

Решение.

Перепишем уравнение (I) в виде)

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+3$$

или

$$2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}+1=0. \qquad (2)$$

Пусть $\sqrt{2x^2-3x+2}=y$, тогда $y^2-2y+1=0$,
откуда $y_1=y_2=1$.
Следовательно, $\sqrt{2x^2-3x+2}=1$ или $2x^2-3x+1=0$.
Отсюда $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}$.

32. Доказать тождество:

$$2\sin 50^\circ-1=\frac{1}{2\sin 70^\circ}.$$

Решение.

Преобразуем левую часть

$$2\sin 50^\circ - 1 = 2(\sin 50^\circ - \sin 30^\circ) = 4\cos 40^\circ \sin 10^\circ =$$

$$= \frac{2\cos 40^\circ \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 40^\circ \sin 40^\circ}{\cos 10^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{2\cos 10^\circ \cos 20^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 10^\circ}{2\cos 10^\circ \sin 70^\circ} = \frac{1}{2\sin 70^\circ},$$

что совпадает с правой частью.

33. Решить уравнение

$$2\cos 23x = \sqrt{2}\,(\cos 8x - \sin 8x).$$

Решение.

Имеем

$$\cos 23x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 8x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 8x = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 8x\right).$$

Согласно формуле (53), имеем

а) $23x + \frac{\pi}{4} + 8x = 2k\pi$, откуда $x = \frac{\pi}{124}(8k-1)$,

б) $23x - \frac{\pi}{4} - 8x = 2k\pi$, откуда $x = \frac{\pi}{60}(8k+1)$,

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

Вариант № 9.

34. Равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна b , а угол при вершине равен 120^0, вращается около боковой стороны. Определить объем V тела вращения.

Решение (см.рис.4)

Искомый объем V равен разности объемов конусов, получившихся от вращения прямоугольных треугольников AOC и DOC около оси ODA $V = \frac{\pi}{3}\cdot OC^2(OA - OD)$ куб. ед.

Но из прямоугольного ΔDOC, в котором $\angle D = 60^\circ$, имеем:

$OC = b\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}b$, а разность $OA - OD = b$.

Итак, $V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{3}{4}b^2\cdot b=\frac{\pi}{4}b^3$ куб. ед.

35. Упростить выражение

$$\left[\frac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\frac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}\right]:\frac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{2b}}{a+b}.$$

Решение.

Имеем: $$\left[\frac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\frac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}\right]:\frac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{2b}}{a+b}=$$

$$=\left[\frac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2ab}+\sqrt[3]{4b^2})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2b})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})}+\frac{\sqrt[3]{2ab}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})^2}\right]:\frac{(a+b)(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})}{a+b}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2ab}+\sqrt[3]{4b^2}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b}}+\frac{\sqrt[3]{2ab}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b}}\right]:(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})=$$

$$=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b}):(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})=1.$$

36. Решить уравнение

$$x^{-1}+a^{-1}=\left[a^{-2}+(a^{-2}x^{-2}+5x^{-4})^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}},\ (a>0).\ (1)$$

Решение. Областью допустимых значений является положительная полуось $x>0$.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{5}{x^2}}}.$$

Возведя обе части равенства в квадрат, получим

$$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{ax}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{5}{x^2}}$$

или, после приведения подобных членов и домножения на x,

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{5}{x^2}}.$$

Возведя в квадрат обе части и преобразовав, получим

$$3x^2+4ax-4a^2=0. \qquad (2)$$

Откуда имеем

$$x_1 = \frac{2}{3}a, \quad x_2 = -2a.$$

Второй корень уравнения (2) не входит в область допустимых значений аргумента.

Ответ: $x = \frac{2}{3}a$.

37. Привести к виду, удобному для логарифмирования

$$\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 50^\circ + \operatorname{ctg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ.$$

Решение. Группируя отдельно тангенсы и отдельно котангенсы и применяя формулы (32, Ш) и (33, Ш), будем иметь

$$(\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ) + (\operatorname{ctg} 50^\circ + \operatorname{ctg} 40^\circ) = \frac{\sin(30^\circ + 60^\circ)}{\cos 30^\circ \cos 60^\circ} + \frac{\sin(50^\circ + 40^\circ)}{\sin 50^\circ \sin 40^\circ} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}(\cos 30^\circ + \cos 90^\circ)} + \frac{1}{\frac{1}{2}(\cos 10^\circ - \cos 90^\circ)} = \frac{2}{\cos 30^\circ} + \frac{2}{\cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{2(\cos 10^\circ + \cos 30^\circ)}{\cos 10^\circ \cos 30^\circ} = \frac{4\cos 20^\circ \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ \cos 30^\circ} = \frac{4\cos 20^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{3}}\cos 20^\circ.$$

Ответ: $\frac{8}{\sqrt{3}}\cos 20^\circ$.

38. Решить уравнение

$$\sin x \sin 2x + \cos^2 x = \sin 4x \sin 5x + \cos^2 4x. \qquad (1)$$

Решение. Применяя формулы (22, Ш) и (38, Ш), перепишем уравнение (I) в виде:

$$\frac{\cos x - \cos 3x}{2} + \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{\cos x - \cos 9x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2},$$

откуда $\cos 2x - \cos 3x = \cos 8x - \cos 9x$.

Согласно формуле (31, Ш), получим

$$2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{17x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

или $\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{17x}{2}-\sin\frac{5x}{2}\right)=0$.

Отсюда

1). $\sin\frac{17x}{2}=\sin\frac{5x}{2}$.

Применяя формулу (52, III), найдем

а) $\frac{17x}{2}+\frac{5x}{2}=\pi+2\pi k$, откуда $x=\frac{\pi}{11}(2k+1)$.

б) $\frac{17x}{2}-\frac{5x}{2}=2\pi k$, откуда $x=\frac{\pi}{3}k$.

2). $\sin\frac{x}{2}=0$, откуда $x=2\pi k$.

Третья серия решений содержится во второй серии.

Ответ: $x=\frac{\pi}{11}(2k+1)$; $x=\frac{\pi}{3}k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$.

Вариант № 10.

39. В шар, радиуса R, вписан усеченный конус. Основания усеченного конуса отсекают в шаре два сегмента с дугами в осевом сечении, соответственно равными α и β. Найти боковую поверхность усеченного конуса.

40. Упростить

$$\frac{a^{\frac{5}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}{(a+1)(a^2+1)}-\left(a-\frac{a^3}{1+a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{a^2\sqrt{(1+a^2)^{-1}}-\sqrt{1+a^2}}{1+a^2}.$$

41. Произведение первых трех членов геометрической прогрессии равно 216, а их сумма равна 26. Найти прогрессию.

42. Без помощи таблиц вычислить

$$x=100^{0,5-\log_{10}2,5}$$

43. Решить уравнение

$$\cos^2x+3\sin^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=1.$$

Вариант № II.

44. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a и угол при основании равен α. Определить объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей ее оснований.

45. Упростить

$$\frac{1}{2}\left[(a+b^2)^{\frac{1}{2}}+b^2(a+b^2)^{-\frac{1}{2}}\right]+\frac{a}{2}\,\frac{1+\frac{b}{\sqrt{a+b^2}}}{b+(a+b^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

46. Доказать тождество

$$\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sec(30^\circ+\alpha)\operatorname{cosec}(60^\circ+\alpha)=4\operatorname{cosec}3\alpha.$$

47. Решить уравнение

$$\lg\left(3^{\sqrt{\frac{x(x-4)}{x-3}}}+1\right)=1.$$

48. Решить уравнение

$$\sin 3x=\cos x.$$

Вариант № I2.

49. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит прямоугольник, вписанный в круг радиуса R, причем меньшая сторона этого прямоугольника стягивает дугу окружности, содержащую $2\alpha^\circ$.
Найти объем этого параллелепипеда, зная его боковую поверхность $S_б$.

50. Найти значение выражения

$$\left(x^2+a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(a^2+a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

при $x=\left(b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$; $(b>a>0)$.

5I. Решить уравнение

$$a^x+b^x=2{,}5\sqrt{a^x b^x}.$$

52. Вычислить

$$\operatorname{tg} 20^\circ + 4\sin 20^\circ .$$

53. Решить уравнение

$$\cos 2x = \sin x .$$

Вариант № 13.

54. Полная поверхность конуса, образующие которого наклонены к плоскости под углом α, равна $S_п$. Определить объем конуса.

55. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{(a+x)(x+b)} + \sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)} - \sqrt{(a-x)(x-b)}} ,$$

если

$$x = \sqrt{ab} , \ (a > b > 0) .$$

56. Решить уравнение

$$x^{-\frac{7+\lg x}{2}} = 10^{2\lg x + 2}$$

57. Доказать тождество

$$\frac{\sin 5\alpha + \sin \alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha .$$

58. Решить уравнение

$$2\operatorname{tg} 3x - 3\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x .$$

Вариант № 14.

59. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его боковые стороны в отношении I:2 (считая от вершины). В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

60. Упростить выражение

$$x^3\left[\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})^2+(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2}{\sqrt{xy}+x}\right]^5\sqrt[3]{x\sqrt{x}}.$$

61. Решить уравнение

$$2(\lg 2-1)+\lg(5^{\sqrt{x}}+1)=\lg(5^{-\sqrt{x}}+5).$$

62. Привести к виду, удобному для логарифмирования

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos 2\beta}-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

63. Решить уравнение

$$\frac{4\cos^2\frac{x}{2}-1}{\cos x}=(1+2\cos x)\operatorname{tg}x.$$

Вариант № 15.

64. Поезд должен был пройти 240 км в определенное время. Пробыв в пути 3 часа, он был задержан на станции лишних 30 минут, а потому, чтобы прибыть на место без опоздания, остальной путь проходил со скоростью, увеличенной на $3\frac{1}{3}$ км/час.

Найти скорость поезда до задержки.

Решение. Пусть первоначальная скорость поезда равна x км/час. Тогда до задержки поезд прошел $3x$ км. После задержки ему осталось пройти $(240-3x)$ км. Этот путь при первоначальной скорости поезд прошел бы за $\frac{240-3x}{x}$ часов и опоздал бы на $0,5$ часа. Увеличенная скорость поезда будет $(x+3\frac{1}{3})$ км/час. На оставшийся путь при увеличенной скорости поезд затратил $\frac{240-3x}{x+3\frac{1}{3}}$ часов. Так как разница во времени на оставшийся путь при первоначальной скорости и при увеличенной скорости составляет $0,5$ часа, то получаем уравнение: $\frac{240-3x}{x}-\frac{240-3x}{x+3\frac{1}{3}}=0,5$ или после упрощений $3x^2+70x-4800=0$. Отсюда $x_1=30$; $x_2=-53\frac{1}{3}$ (не удовлетворяет условию задачи).

Ответ: Первоначальная скорость поезда 30 км/час.

65. Решить уравнение

$$\log_3(3^x+1)-\log_3(1-3^{-2x})-2x=-0{,}5\log_3 64.$$

Решение. Определяем область допустимых значений аргумента x (для краткости в дальнейшем будем ее обозначать О Д З)

а) $3^x+1>0$ при $-\infty < x < +\infty$;

б) $1-3^{-2x}>0$, откуда $3^{2x}>1$, следовательно, $x>0$.

Из а) и б) получаем, что О Д З уравнения будет $x>0$.

Далее, так как $2x=\log_3 3^{2x}$ и $-0{,}5\log_3 64=\log_3\frac{1}{8}$, то уравнение (I) можно переписать в виде

$$\log_3\frac{3^x+1}{3^{2x}(1-3^{-2x})}=\log_3\frac{1}{8}.$$

После сокращения на $3^x+1\neq 0$ и потенцирования получаем

$$3^x-1=8.$$

Отсюда $3^x=9$ или $x=2$.

В ходе решения не произошло потери корней.

Непосредственная подстановка в исходное уравнение $x=2$ обращает его в тождество.

Следовательно, $x=2$ является корнем уравнения.

66. Решить уравнение $4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=1$.

Решение. Преобразуем произведение синусов по формуле (58, III):

$$4\cdot\frac{1}{2}\left\{\cos\left[x-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right]-\cos\left[x+\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right]\right\}=1$$

После упрощения получим $\cos\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)=0$. Отсюда

$$\frac{\pi}{3}+2x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ 2x=\frac{\pi}{6}+k\pi;\ x=\frac{\pi}{12}(6k+1).$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}(6k+1),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

67. Доказать тождество

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)}-2\cos(135^\circ+\alpha)\cos(315^\circ-\alpha)=2\cos2\alpha.$$

Решение. Преобразуем левую часть тождества

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)}-2\cos(135^\circ+\alpha)\cos(315^\circ-\alpha)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}-$$

$$-2\left[-\sin(45^\circ+\alpha)\right]\sin(45^\circ-\alpha)=\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}+$$

$$+2\sin(45^\circ+\alpha)\cos(45^\circ+\alpha)=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}+\sin(90^\circ+2\alpha)=$$

$$=\cos2\alpha+\cos2\alpha=2\cos2\alpha,$$

что совпадает с правой частью данного тождества.

Вариант № 16.

68. Для ремонта вокзала наняты плотники и маляры. Те и другие получили за свою работу одну и ту же сумму денег. Маляров было двумя меньше, чем плотников. За выполненную работу каждый маляр получил на один рубль больше плотника.

Сколько было плотников и сколько маляров, если число рублей, уплаченных всем рабочим, на 26 больше утроенного числа всех рабочих?

Решение. Пусть было нанято x маляров, тогда плотников было $x+2$ человек. Число всех рабочих равно $x+(x+2)=2x+2$.

Утроенное число всех рабочих составит $6x+6$.

Всем рабочим уплачено $(6x+6)+26=6x+32$ рублей.

Бригада маляров получила $\frac{6x+32}{2}=3x+16$ рублей.

Плотники также получили $3x+16$ рублей.

Один маляр получил $\frac{3x+16}{x}$ рублей.

Один плотник получил $\frac{3x+16}{x+2}$ рублей.

Так как один маляр получил на I рубль больше, чем плотник, то имеем уравнение: $\frac{3x+16}{x}-\frac{3x+16}{x+2}=1$,

отсюда $x^2-4x-32=0$,

так что $x_1=8$, $x_2=-4$ (не удовлетворяет условию задачи).

Следовательно, маляров было 8 человек, а плотников I0 человек.

69. Решить уравнение

$$\log_2\left[1+\lg\left(x-\frac{3}{5}\right)\right]=\log_2\lg(x+1)+\log_2 3^{\log_3 2}. \quad (1)$$

Решение. Определяем О Д З. Должны выполняться неравенства

$$\left.\begin{array}{l} 1+\lg\left(x-\frac{3}{5}\right)>0 \\ x+1>0 \end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} \lg\left(x-\frac{3}{5}\right)>-1 \\ x>-1 \end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} x-\frac{3}{5}>\frac{1}{10} \\ x>-1 \end{array}\right\}$$

Следовательно, $x>\frac{7}{10}$.

Итак, О Д З $x>\frac{7}{10}$. Так как $\log_2 3^{\log_3 2}=\log_2 2$, то исходное уравнение запишется в виде

$$\log_2\left[1+\lg\left(x-\frac{3}{5}\right)\right]=\log_2\left[2\lg(x+1)\right],$$

откуда, потенцируя, получим

$$1+\lg\left(x-\frac{3}{5}\right)=2\lg(x+1)$$

или

$$\lg\left[10\left(x-\frac{3}{5}\right)\right]=\lg(x+1)^2.$$

Следовательно,

$$10\left(x-\frac{3}{5}\right)=(x+1)^2$$

или $x^2-8x+7=0$, что дает $x_1=1$; $x_2=7$.

Оба корня входят в О Д З. Так как за равносильностью уравнений при преобразованиях мы не следили, то сделаем проверку.

Левая часть исходного уравнения при $x=1$ будет равна

$$\log_2\left[1+\lg\left(1-\frac{3}{5}\right)\right]=\log_2\left[\lg 10+\lg\frac{2}{5}\right]=\log_2\lg 4.$$

Правая часть исходного уравнения при $x=1$ будет равна

$$\log_2\lg(1+1)+\log_2 2=\log_2(2\lg 2)=\log_2\lg 4.$$

Следовательно, $x=1$ есть корень уравнения (I).

Левая часть исходного уравнения при $x=7$ будет равна

$$\log_2\left[1+\lg\left(7-\frac{3}{5}\right)\right]=\log_2\left(\lg 10+\lg 6\frac{2}{5}\right)=\log_2\lg 64.$$

Правая часть исходного уравнения при $x=7$ будет равна

$$\log_2\lg(7+1)+\log_2 2=\log_2\lg 8+\log_2 2=\log_2\lg 64.$$

Следовательно, $x=7$ также корень уравнения.

Ответ: $x_1=1$; $x_2=7$.

70. Решить уравнение

$$\sin^2(\pi+x)+\sin^2 2x=\sin^2 3x.$$

Решение. По формулам приведения имеем

$$\sin^2(\pi + x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x;$$

тогда уравнение (1) примет вид

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x.$$

Применяя формулу (37, Ш), получим

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1-\cos 6x}{2}$$

или

$$\cos 4x + \cos 2x = 1 + \cos 6x,$$

$$2\cos 3x \cos x = 2\cos^2 3x.$$

Отсюда:

а) $\cos 3x = 0$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

б) $\cos 3x = \cos x$.

По формуле (55, Ш) находим

$$x = \pi k, \quad x = \frac{\pi}{2}k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Корни $x = \pi k$ содержатся среди корней третьей серии.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$,

$x = \frac{\pi}{2}k$,

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

71. Доказать тождество

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)-1=2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}.$$

Решение. Упростим левую часть тождества

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)-1=\left(2\cos^2\alpha-1\right)+$$
$$+\cos\alpha=\cos 2\alpha+\cos\alpha=2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3}{2}\alpha,$$

что совпадает с правой частью исходного тождества.

Вариант № 17.

72. Два поезда выехали из городов A и B и идут навстречу друг другу. Чтобы они встретились в середине пути, надо чтобы поезд из B вышел на 1 час 45 минут раньше, чем поезд из A. Если бы оба поезда вышли одновременно, то через 7 часов расстояние между ними составило 1/10 первоначального. Сколько часов затрачивает каждый поезд на прохождение пути AB?

73. Решить уравнение

$$2-\log_2 5-\log_2\left(2^{x+1}-2^{x-1}\right)=-\log_2\left(-0{,}125\cdot 2^x\right).$$

74. Решить уравнение

$$\cos x\,\mathrm{ctg}\,x-\sin x=\sqrt{2}\cos 2x.$$

75. Упростить выражение

$$\frac{1+\sin(90^\circ-2\alpha)-2\cos^2(270^\circ+\alpha)}{4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha}.$$

Вариант № 18.

76. Заказ в 60 деталей отдан двум рабочим. Если первый рабочий начнет работу через $2\frac{1}{2}$ часа после второго, то каждый из них выполнит по половине всего заказа; если же они начнут одновременно,

то через 5 часов они сделают 27 деталей.

За какое время может выполнить заказ каждый рабочий, работая отдельно?

77. Решить уравнение

$$\log_3(2^x-1)-\log_3(2^x-2^{-x})=-2+x\log_3 2.$$

78. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x\cos^2 x+\sin 2x=\operatorname{cosec}^2 x-1.$$

79. Доказать тождество

$$\frac{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}\beta.$$

Вариант № 19.

80. Для откачки воды из подвала были поставлены два насоса, которые через 16 минут выкачали всю воду. Если бы оба насоса действовали 4 минуты, а затем первый насос был бы отключен, то для откачки воды один второй насос должен был бы действовать 36 минут.
Во сколько минут каждый насос, действуя отдельно, может выкачать всю воду из подвала?

81. Решить уравнение

$$2-\operatorname{tg}(270^\circ+2x)+2\cos 4x=0.$$

82. Решить уравнение

$$\frac{\lg(\sqrt{3x+1}+4)-\lg x}{2-\lg 4+\lg 0{,}015}=1.$$

83. Доказать тождество

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta).$$

Вариант № 20.

84. Двум рабочим было поручено выполнить некоторую работу. Сначала первый выполнил 3/5 работы, а после него второй один выполнил остальную часть, причем вся работа была сделана за 24 часа. За сколько часов каждый рабочий отдельно может выполнить эту работу, если, работая вместе, они могут выполнить ее за I2 часов?

85. Решить уравнение

$$\lg\left[1+2^{\log_2(x+6)}\right]+\lg\left(x-\log_x x^2\right)=\log_x x.$$

86. Решить уравнение

$$\cos(15^\circ+x)+\cos(105^\circ-x)=1+\sin 2x.$$

87. Упростить выражение

$$\frac{1+\sin(90^\circ+2\alpha)+\cos\alpha+\cos 3\alpha}{2\cos^2(-\alpha)-\cos(180^\circ-\alpha)-1}.$$

Вариант № 2I.

88. Пароход прошел 72 км. Первую часть пути в 24 км он прошел с одной скоростью, а на остальном пути увеличил скорость на 6 км/час. Если бы весь путь он прошел со скоростью, в I,5 раза большей первоначальной, то пришел бы в конечный пункт на 40 минут раньше. Найти первоначальную скорость парохода.

89. Решить уравнение

$$2-\log_3 10-\log_3(2-0{,}3\cdot 3^x)=-\log_3(2\cdot 3^{-x}-1).$$

90. Решить уравнение

$$\cos(15^\circ-x)-\cos(75^\circ-x)=1-\sin 2x.$$

9I. Упростить выражение

$$\frac{\sin^2(90^\circ-\alpha)+\sin^2\alpha-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}.$$

Вариант № 22.

92. После двух последовательных одинаковых процентных повышений заработной платы служащий вместо 100 рублей стал зарабатывать 125 рублей 44 коп.

На сколько процентов повышалась каждый раз заработная плата?

Решение. Обозначим через x число процентов, на которое каждый раз повышалась заработная плата. Тогда после первого повышения служащий стал получать $(100 + x)$ рублей.

Прибавка к заработной плате при повторном повышении равна $\frac{(100+x)x}{100}$ рублей, и, следовательно, служащий стал получать $(100+x)+\frac{(100+x)x}{100}$ рублей, что составляет 125 рублей 44 коп.

Получаем уравнение

$$100+x+\frac{(100+x)x}{100}=125{,}44$$

или после упрощений $x^2+200x-2544=0.$

Отсюда $x_1=12$; $x_2=-211$ (к условию задачи не подходит).

Ответ: заработная плата повышалась каждый раз на 12%.

93. Доказать тождество

$$\cos(\pi+\alpha)-\sin^2(\pi-\alpha)+1=-2\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Решение. Упростим левую часть тождества

$$1+\cos(\pi+\alpha)-\sin^2(\pi-\alpha)=-\cos\alpha-\sin^2\alpha+1=$$
$$=\cos^2\alpha-\cos\alpha=-\cos\alpha(1-\cos\alpha)=-2\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

что совпадает с правой частью доказываемого тождества.

94. Решить систему:

$$\left.\begin{aligned} x^{y+1}&=27\\ x^{2y-5}&=\frac{1}{3}\end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Решение. Перепишем систему (I) в виде

$$\left.\begin{aligned} x^y\,x &= 27 \\ \frac{(x^y)^2}{x^5} &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} . \qquad (2)$$

Из первого уравнения системы (2) находим, что $x^y = \frac{27}{x}$.

Подставляя во второе уравнение, получим

$$\frac{\left(\frac{27}{x}\right)^2}{x^5} = \frac{1}{3} .$$

Отсюда $\frac{27^2}{x^7} = \frac{1}{3}$ или $x^7 = 3^7$.

Из последнего равенства получаем $x = 3$. Подставляя значение $x = 3$ в первое уравнение исходной системы, получим $3^{y+1} = 3^3$. Отсюда $y+1 = 3$ или $y = 2$.

Так как системы уравнений (I) и (2) равносильны, то проверка не обязательна.

Ответ: $x = 3$, $y = 2$.

95. Решить уравнение

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + (1 - 4\cos^2 x)\sin^2 x = 0 . \qquad (1)$$

Решение. Так как $\frac{1+\cos 2x}{2} = \cos^2 x$, то уравнение (I) перепишем так

$$\cos^2 x + \sin^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x = 0$$

или $1 - (2\sin x\cos x)^2 = 0$ или $\sin^2 2x = 1$.

Отсюда $\sin 2x = \pm 1$, а значит, $2x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$,

или $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Решение. Перепишем систему (I) в виде

$$\left.\begin{aligned} x^y\, x &= 27 \\ \frac{(x^y)^2}{x^5} &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Из первого уравнения системы (2) находим, что $x^y = \frac{27}{x}$.

Подставляя во второе уравнение, получим

$$\frac{\left(\frac{27}{x}\right)^2}{x^5} = \frac{1}{3}.$$

Отсюда $\frac{27^2}{x^7} = \frac{1}{3}$ или $x^7 = 3^7$.

Из последнего равенства получаем $x = 3$. Подставляя значение $x = 3$ в первое уравнение исходной системы, получим $3^{y+1} = 3^3$. Отсюда $y+1 = 3$ или $y = 2$.

Так как системы уравнений (I) и (2) равносильны, то проверка не обязательна.

Ответ: $x = 3$, $y = 2$.

95. Решить уравнение

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + (1 - 4\cos^2 x)\sin^2 x = 0. \qquad (1)$$

Решение. Так как $\frac{1+\cos 2x}{2} = \cos^2 x$, то уравнение (I) перепишем так

$$\cos^2 x + \sin^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x = 0$$

или $1 - (2\sin x\cos x)^2 = 0$ или $\sin^2 2x = 1$.

Отсюда $\sin 2x = \pm 1$, а значит, $2x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$,

или $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Вариант № 23.

96. Произведение цифр двузначного числа в три раза меньше самого числа. Если к искомому числу прибавить 18, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

Решение. Обозначим через x число десятков искомого двузначного числа, а через y – число единиц. Тогда оно представится как $(10x+y)$. Число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, будет $(10y+x)$. Произведение цифр двузначного числа будет xy, и оно в три раза меньше самого числа $(10x+y)$, т.е.

$$xy=\frac{10x+y}{3}. \qquad (1)$$

Если к искомому числу $(10x+y)$ прибавить 18, то получится число

$$10y+x\ , \text{ т.е. } 10x+y+18=10y+x. \qquad (2)$$

Решаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} xy&=\frac{10x+y}{3}\\ 10x+y+18&=10y+x \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} 3xy-10x-y&=0\\ x-y+2&=0 \end{aligned}\right\}.$$

Из второго уравнения выражаем x через y: $x=y-2$ и подставляем в первое. Получим $3y^2-17y+20=0$.

Отсюда $y_1=4$, $y_2=\frac{5}{3}$ – не подходит к условию задачи.

Следовательно, $x=2$

Ответ: искомое число 24.

97. Дано $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

Найти $1+\sin 2\alpha - 3\operatorname{cosec} 2\alpha$.

Решение. Выразим $\sin 2\alpha$ и $\operatorname{cosec} 2\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$, а затем подставим вместо $\operatorname{tg}\alpha$ его значение (–3). Получим

$$1+\sin 2\alpha - 3\operatorname{cosec} 2\alpha = 1+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - 3\,\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= 1+\frac{2\cdot(-3)}{1+(-3)^2} - 3\,\frac{1+(-3)^2}{2\cdot(-3)} = 5\frac{2}{5}.$$

98. Выполнить указанные действия

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1+a^{-\frac{1}{2}}}{1-a^{-\frac{1}{2}}} : \frac{a+2\sqrt{a}+1}{a^{1/2}} - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{a}}{1+a}.$$

Решение.

$$\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\sqrt{a}}{2\left(1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)(\sqrt{a}+1)^2} - \frac{\sqrt{a}}{2(a+1)} = \frac{\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} - \frac{\sqrt{a}}{2(a+1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2(a-1)} - \frac{\sqrt{a}}{2(a+1)} = \frac{\sqrt{a}}{a^2-1}.$$

99. Решить уравнение

$$\sin\left(2\pi - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\pi + \frac{3x}{2}\right) = \frac{1+\cos\frac{3x}{2}}{2} - \sin^2\left(\frac{3x}{4} - \pi\right).$$

Решение. Упростим данное уравнение, применяя формулы приведения и формулы половинных углов. Получим

$$-\sin\frac{x}{2}\cdot\left(-\cos\frac{3x}{2}\right) = \cos^2\frac{3x}{4} - \sin^2\frac{3x}{4}.$$

Откуда $\cos\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0$.

Из уравнения $\cos\frac{3x}{2} = 0$ получаем $x = \frac{\pi}{3}(2k+1)$, а из уравнения $\sin\frac{x}{2} - 1 = 0$ получаем $x = \pi(4k+1)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Вариант № 24.

100. Из двух пунктов A и B отправляются навстречу друг другу с постоянными скоростями два поезда. Они могут встретиться на поло-

вине пути, если поезд из пункта A отправится на I,5 часа раньше. Если бы оба поезда вышли одновременно, то через 6 часов расстояние между ними составляло бы десятую часть пути от A до B. Сколько часов каждый поезд употребляет на прохождение пути между пунктами A и B ?

IOI. Упростить выражение

$$\frac{1}{\cos^2 2\alpha}-tg^2(\pi+2\alpha)-2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$

IO2. Решить уравнение

$$\frac{4\lg x^2+2\lg 5-4}{\lg(x-1)}=\log_2\frac{1}{4}.$$

IO3. Решить уравнение

$$\sin 7x+\sin 3x+2\sin^2 x+tg^2 2x=\sec^2 2x.$$

Вариант № 25.

IO4. Две бригады, работая вместе, могут отремонтировать железнодорожный путь в I8 дней. Если бы сначала первая бригада, работая одна, выполнила 2/3 всей работы, а затем вторая бригада - оставшуюся часть, то на ремонт всего пути потребовалось бы 40 дней. Определить, во сколько дней каждая бригада, работая отдельно, могла бы отремонтировать весь путь.

IO5. Упростить выражение

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1+\sec\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\sec\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\alpha}{2}\right).$$

IO6. Решить систему

$$\left.\begin{array}{l}\log_{xy}(x-y)=1\\ \log_{xy}(x+y)=0\end{array}\right\}.$$

107. Решить уравнение

$$2\,tg(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin^3 x-\frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}=0.$$

Вариант № 26.

108. По плану бригада должна была засеять 324 га яровыми культурами к определенному сроку. В течение первых 5 дней сева колхозники перевыполнили дневную норму на 3 га, а в следующие дни – на 7 га и уже за I день до срока закончили сев. Сколько дней продолжался сев?

109. Упростить выражение

$$\frac{2\sin\alpha+\sin(-3\alpha)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+5\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-2\cos(-2\alpha)+\cos 3\alpha}.$$

110. Решить уравнение

$$2\,x^{\lg x}+3\,x^{-\lg x}=\log_3\left(\frac{1}{9}\right)+7.$$

111. Решить уравнение

$$2\cos(270^\circ+7x)+\sqrt{3}\cos 5x+\sin 5x=0.$$

Вариант № 27.

112. При рытье колодца за первый метр глубины платили I рубль, а за каждый следующий – на 0,5 рубля больше, чем за предыдущий. Сверх того, за весь колодец дополнительно было уплачено 10 рублей. Средняя стоимость рытья одного метра колодца оказалась равной 6 рублям 25 коп. Определить глубину колодца.

113. Доказать тождество

$$\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=2\cos\alpha.$$

114. Решить уравнение

$$\log_5^4(x-1)^2=22+\log_5 125-\log_5^2(x-1)^3.$$

115. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{\cos^2 x}-3\operatorname{ctg}(270^\circ-x)-4=0.$$

Вариант № 28.

116. Бригада слесарей может выполнить некоторое задание по обработке деталей на 15 часов быстрее бригады учеников. Если бригада учеников будет работать 18 часов, выполняя это задание, а после нее бригада слесарей еще 6 часов, то обе бригады вместе выполнят 3/5 всего задания. Во сколько времени одна бригада слесарей могла бы выполнить все задание?

117. Дано $\operatorname{tg}\alpha=-4.$

Найти $30\sec 2\alpha-17\sin 2\alpha.$

118. Выполнить указанные действия

$$\left[\frac{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2-(2b^{\frac{1}{2}})^2}{a-b}-(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^{-1}\right]:\frac{(4b)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}.$$

119. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^3 x-1+\frac{1}{\cos^2 x}-3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-3=0.$$

Вариант № 29.

120. Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала первый кран был открыт одну треть того времени, какое нужно было бы, чтобы наполнить бассейн, открыв только второй кран. Затем, наоборот, второй кран был открыт одну треть того времени, которое требуется для наполнения бассейна одним первым краном. После этого оказалось, что наполнено 13/18 бассейна. Сколько времени требуется для наполнения бассейна каждым краном в отдельности, если оба крана, открытые вместе, наполняют бассейн за 3 часа 36 минут?

Решение. Обозначим через x количество часов, необходимое для наполнения бассейна одним первым краном, а через y – количество часов, необходимое для наполнения бассейна одним вторым краном. Объем бассейна примем за I, тогда первый кран за один час наполняет $\frac{1}{x}$ часть бассейна, а второй кран – $\frac{1}{y}$ часть бассейна. Значит, оба крана вместе за I час наполняют $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ часть бассейна.

По условию задачи бассейн наполняется в течение $\frac{y}{3}$ часов только первым краном, а затем в течение $\frac{x}{3}$ часов только вторым краном. Так как оба крана за это время наполнили I3/I8 бассейна, то получаем первое уравнение

$$\frac{y}{3x}+\frac{x}{3y}=\frac{13}{18}. \qquad (1)$$

Второе уравнение будет $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 3\frac{3}{5}=1$ (2)

Решим теперь систему уравнений (I), (2):

$$\left.\begin{array}{l}\frac{y}{3x}+\frac{x}{3y}=\frac{13}{18}\\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 3\frac{3}{5}=1\end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{l}6x^2+6y^2=13xy\\ 18x+18y=5xy\end{array}\right\}.$$

Выражая y из второго уравнения через x и подставляя в первое уравнение системы, получим $y=\frac{18x}{5x-18}$, (3)

$$6x^2+6\left(\frac{18x}{5x-18}\right)^2=13x\,\frac{18x}{5x-18}$$

или после упрощения $x^2-15x+54=0$.

Отсюда $x_1=9$, $x_2=6$, а тогда из (3) $y_1=6$, $y_2=9$.

Ответ: Первый кран наполняет бассейн за 9 часов, а второй – за 6 часов, или первый – за 6 часов, а второй – за 9 часов.

I2I. Дано
$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta=a\\ \sin\alpha+\sin\beta=b\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Найти $\sin(\alpha+\beta)$.

Решение. Перемножим почленно левые и правые части равенств (I) и преобразуем:

$$(\cos\alpha+\cos\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=ab,$$
$$\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)=ab,$$
$$\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\beta+\sin(\alpha+\beta)=ab,$$
$$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)=ab.$$

Отсюда $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{ab}{1+\cos(\alpha-\beta)}$ (2)

Для нахождения $\cos(\alpha-\beta)$ возведем в квадрат почленно равенства (I) и сложим. Получим $2+2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=a^2+b^2$

или $2+2\cos(\alpha-\beta)=a^2+b^2$;

отсюда $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{a^2+b^2-2}{2}$.

Подставляя найденное значение $\cos(\alpha-\beta)$ в равенство (2), найдем
$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

I22. Решить систему
$$\left.\begin{aligned}\log_2\frac{x^2\sqrt{y+1}}{2}=2\\ \log_2 x\cdot\log_2(y+1)^2=\frac{4}{3}\end{aligned}\right\}.$$

Решение. Области допустимых значений: $x>0$ и $y>-1$.

В области допустимых значений преобразуем систему (I) к виду
$$\left.\begin{aligned}4\log_2 x+\log_2(y+1)=6\\ \log_2 x\cdot\log_2(y+1)=2\end{aligned}\right\}.$$

Из второго уравнения находим $\log_2(y+1)=\dfrac{2}{\log_2 x}, (x\neq 1)$.

Подставляя в первое уравнение, получим

$$4\log_2 x+\frac{2}{\log_2 x}=6.$$

Обозначая $\log_2 x = z$, запишем последнее уравнение в виде $2z^2-3z+1=0$. Отсюда $z_1=1$, $z_2=\frac{1}{2}$.

Следовательно, I) $\log_2 x=1$, т.е. $x_1=2$.

2) $\log_2 x=\frac{1}{2}$, т.е. $x_2=\sqrt{2}$.

Подставляя значения $x_1=2$ и $x_2=\sqrt{2}$ в уравнение $\log_2(y+1)=\dfrac{2}{\log_2 x}$, получим $y_1=3$, $y_2=15$.

Обе пары решений входят в область допустимых значений и удовлетворяют нашей системе.

Ответ: $x_1=2$, $y_1=3$; $x_2=\sqrt{2}$, $y_2=15$.

I23. Решить уравнение

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2.$$

Решение. Преобразуем уравнение, используя формулу (22, II)

$$\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2}=2$$

или $(\cos 2x+\cos 4x)+(\cos 6x+\cos 8x)=0$.

Преобразуя каждую скобку в произведение, получим

$$2\cos 3x\cos x+2\cos 7x\cos x=0$$

или $\cos x\cdot(\cos 3x+\cos 7x)=0$.

Таким образом,

I) $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$;

2) $\cos 3x+\cos 7x=0$ или $2\cos 5x\cos 2x=0$.

Отсюда а) $\cos 5x=0$, $x=\frac{\pi}{10}(2k+1)$;

в) $\cos 2x=0$, $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

Ответ:
$$x = \frac{\pi}{2}(2k+1),$$
$$x = \frac{\pi}{10}(2k+1), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$
$$x = \frac{\pi}{4}(2k+1).$$

Вариант № 30.

124. Двое рабочих работали одинаковое число дней. Если бы первый работал на один день меньше, а второй - на 7 дней меньше, то первый заработал бы 360 рублей, а второй - 324 рубля. Если бы первый работал на семь дней меньше, а второй - на один день меньше, то второй заработал бы на 162 рубля больше первого. Сколько заработал каждый рабочий в действительности?

Решение. Обозначим общую сумму заработка первого рабочего через x, а второго - y рублей. Тогда заработок первого рабочего за один день будет $(x-360)$, а заработок второго - $\frac{y-324}{7}$ рублей. Первый рабочий работал всего $\frac{x}{x-360}$ дней, а второй - $\frac{y}{\frac{y-324}{7}} = \frac{7y}{y-324}$ дней. Так как оба рабочих работали одинаковое число дней, то первое уравнение будет $\frac{x}{x-360} = \frac{7y}{y-324}$ или после упрощения $xy + 54x = 420y$.

Первый рабочий заработал бы $x-(x-360)7 = 2520-6x$ рублей, если бы он работал на 7 дней меньше. Второй рабочий заработал бы

$y - \frac{y-324}{7} = \frac{6y+324}{7}$ рублей, если бы он работал на один день меньше. Так как второй рабочий заработал бы на 162 рубля больше первого, то второе уравнение будет

$$\frac{6y-324}{7} = 2520 - 6x + 162,$$

или, после упрощения, $7x + y = 3075$.

Таким образом, имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} xy+54x &= 420y \\ 7x+y &= 3075 \end{aligned}\right\}.$$

Решая ее, получим: I) $x_1=375,\ y_1=450;$

2) $x_2=492,\ y_2=-360$ – не подходит.

Ответ: первый рабочий заработал 375 рублей.

второй рабочий заработал 450 рублей.

I25. Дано $\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=-\frac{1}{9}$, $\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{2}{3}$,

где $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

Найти $\cos(\alpha+\beta)$.

Решение.

Имеем $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\right]=$

$$=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right).$$

Определим $\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$ и $\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)$:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=+\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}=\frac{\sqrt{5}}{3};$$

$$\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=+\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

Знаки перед корнями берем плюс, ибо из условия задачи $-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$, где косинус положителен, а $0<\alpha-\frac{\beta}{2}<\pi$, где синус положителен. Следовательно:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{9}=\frac{7\sqrt{5}}{27}.$$

Пользуясь формулой $\cos(\alpha+\beta)=2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1$, получим

$$\cos(\alpha+\beta)=2\left(\frac{7\sqrt{5}}{27}\right)^2-1=-\frac{239}{729}.$$

I26. Решить неравенство

$$2^{2x}-3\cdot2^{x+2}+32<0.$$

Решение. Представим неравенство так

$$2^{2x}-12\cdot 2^{x}+32<0.$$

Положим $2^{x}=y$. Тогда получим $y^2-12y+32<0$. (I)

Находя корни уравнения $y^2-12y+32=0$, будем иметь

$$y_1=8\ ,\ y_2=4\ .$$

Следовательно, неравенство (I) удовлетворяется при $4<y<8$

т.е. $2^2<2^x<2^3$, отсюда $2<x<3$.

Ответ: $2<x<3$.

I27. Решить уравнение

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x.$$

Решение. Преобразуем уравнение так

$$(\sin x+\sin 3x)+\sin 2x=(1+\cos 2x)+\cos x,$$

$$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x$$

или $\sin 2x\,(2\cos x+1)-\cos x\,(2\cos x+1)=0$

или $(2\cos x+1)(\sin 2x-\cos x)=0.$

Отсюда I) $2\cos x+1=0$ или $\cos x=-\frac{1}{2}$;

$x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$.

2) $\sin 2x-\cos x=0$ или $2\sin x\cos x-\cos x=0$

или $\cos x\,(2\sin x-1)=0$;

а) $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$;

б) $2\sin x-1=0$, $\sin x=\frac{1}{2}$; $x=\frac{\pi}{6}\left[6k+(-1)^k\right]$.

Ответ: $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$, $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$,

$x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$.

128. Два поезда отправляются одновременно из A и B навстречу друг другу. Скорость первого поезда на 10 км/час больше скорости второго. Оба поезда встречаются на расстоянии 28 километров от середины AB. Если бы первый поезд отправился из A на 45 минут позже второго, то оба поезда встретились бы на середине AB. Найти скорости обоих поездов.

129. Доказать тождество

$$4(\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ) = 3\sqrt{3}\cos 10^\circ .$$

130. Решить уравнение

$$4\log_{25}^2 x = \log_5 x\cdot\left[2\log_5\left(\sqrt{x+5}-1\right)\right].$$

131. Решить уравнение

$$2\sin^6 x + 2\cos^6 x = \sin^4 x + \cos^4 x .$$

Вариант № 32.

132. Две машины выехали одновременно из одного пункта и едут в одном направлении. Одна машина едет со скоростью 50 км/час, а другая со скоростью 40 км/час. Спустя полчаса из того же пункта и в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую на полтора часа позже, чем вторую. Определить скорость третьей машины.

133. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ и $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

134. Решить неравенство:

$$0{,}1^{(x^2+10x+21)(x-5)} < -\frac{1}{3}\lg 0{,}001 .$$

135. Решить уравнение $\cos x\cdot(1+\sin x) = 1 + \sin x - \sin^2 x$.

Вариант № 33.

136. По двум железным дорогам ежедневно по плану должно отправляться 90 вагонов груза. Но первая железная дорога грузила ежедневно сверх плана 4 вагона, а вторая—два вагона. Определить процент выполнения плана каждой дорогой, если известно, что процент перевы-

128. Два поезда отправляются одновременно из A и B навстречу друг другу. Скорость первого поезда на 10 км/час больше скорости второго. Оба поезда встречаются на расстоянии 28 километров от середины AB. Если бы первый поезд отправился из A на 45 минут позже второго, то оба поезда встретились бы на середине AB. Найти скорости обоих поездов.

129. Доказать тождество

$$4(\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ) = 3\sqrt{3}\cos 10^\circ.$$

130. Решить уравнение

$$4\log_{25}^2 x = \log_5 x \cdot \left[2\log_5\left(\sqrt{x+5}-1\right)\right].$$

131. Решить уравнение

$$2\sin^6 x + 2\cos^6 x = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

Вариант № 32.

132. Две машины выехали одновременно из одного пункта и едут в одном направлении. Одна машина едет со скоростью 50 км/час, а другая со скоростью 40 км/час. Спустя полчаса из того же пункта и в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую на полтора часа позже, чем вторую. Определить скорость третьей машины.

133. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ и $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

134. Решить неравенство:

$$0{,}1^{(x^2+10x+21)(x-5)} < -\frac{1}{3}\lg 0{,}001.$$

135. Решить уравнение $\cos x \cdot (1+\sin x) = 1 + \sin x - \sin^2 x$.

Вариант № 33.

136. По двум железным дорогам ежедневно по плану должно отправляться 90 вагонов груза. Но первая железная дорога грузила ежедневно сверх плана 4 вагона, а вторая–два вагона. Определить процент выполнения плана каждой дорогой, если известно, что процент перевы-

полнения плана у второй дороги был на три меньше, чем у первой.

137. Доказать, что если $tg\,\alpha = \frac{1}{7}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, то $\alpha + 2\beta = 45^\circ$ (α и β – углы первой четверти).

138. Решить неравенство

$$\lg\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2-1}\right) > 0.$$

139. Решить уравнение

$$\sin 2x \sin x + \cos^2 x = \sin 5x \sin 4x + \cos^2 4x.$$

Вариант № 34.

140. На переезд из города A в город C по железной дороге и далее из города C в город B на пароходе тратится вместе 18 часов. Вследствие увеличения скорости движения как поезда, так и парохода, время проезда по железной дороге сократилось на 1 час 12 минут, а на пароходе – на 1 час. Определить, на сколько процентов сократилось время проезда на поезде и на пароходе, если известно, что процент сокращения времени проезда на поезде был на 5 больше, чем на пароходе.

141. Доказать тождество

$$tg\,2\alpha\, tg(30^\circ-\alpha) + tg\,2\alpha\, tg(60^\circ-\alpha) + tg(60^\circ-\alpha)\, tg(30^\circ-\alpha) = 1.$$

142. Упростить выражение

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{b-x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{3b^3}{(b-x)^2}}{1+\frac{x}{b-x}} - 2\left(bx-x^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{(3b+2x)(b-2x)}{2\sqrt{bx-x^2}}.$$

143. Решить уравнение

$$\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = \sqrt{2}\sin x.$$

Вариант № 35.

144. По окружности длиной 60 метров равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна описывает полный круг на 5 секунд быстрее другой, и при этом они совпадают каждую минуту. Определить скорости точек.

145. Вычислить без таблиц

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ .$$

146. Решить неравенство

$$\log^2_{0,1}(x-2) > 9 .$$

147. Решить уравнение

$$\cos x - \cos 17x = 1 + 2\sin 8x \sin x - \cos 16x .$$

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ, ВЫЗЫВАЮЩИЕ ЗАТРУДНЕНИЯ У ПОСТУПАЮЩИХ.

Задачи на построение.

148. Дан угол ABC и точка M внутри угла. Провести через точку M прямую, пересекающую стороны угла так, чтобы полученный ΔBPQ имел заданный периметр $2p$.

Решение (см. рис.5).

1. Отложим отрезки $BK=BL=p$ и проведем перпендикуляры в точках K и L к сторонам BC и BA соответственно. Через точку пересечения этих перпендикуляров (точку O) проведем окружность, касающуюся сторон угла в точках K и L.
2. Проводим через точку M касательную к окружности. Пусть M_1 – точка касания, а точки P и Q – точки пересечения касательной со сторонами угла. ΔBPQ – искомый. В самом деле, по построению имеем $BK+BL=2p$.

Далее, так как $MQ=QK$ и $M_1P=PL$, то $BQ+QM_1+M_1P+PB=2p$. Значит, периметр построенного ΔBPQ равен $2p$, что и требовалось.

149. По данной сумме двух отрезков и среднему пропорциональному этих отрезков построить сами отрезки.

Решение (см. рис.6).

Пусть $AB=a+b$, $CD=\sqrt{ab}$.

1. На AB как на диаметре строим полуокружность.
2. Проводим прямую $MN \parallel AB$ на удалении $\sqrt{ab}$ от AB.
3. Из точки D пересечения прямой MN с полуокружностью опускаем на AB перпендикуляр DC. Тогда $AC=a$, $CB=b$ в силу свойства высоты DC прямоугольного треугольника ABC, опущенной на гипотенузу.

Замечание. Задача возможна при условии $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$.

150. Дана окружность радиуса R с центром в точке O и точка M вне окружности (над диаметром AB). С помощью одной только линейки провести через точку M перпендикуляр к диаметру.

Решение (см. рис.7).

1. Соединяем точку M с точками A и B. Пусть P и Q – точки пересечения прямых AM и BM с окружностью.

2. Проводим прямые AQ и BP. Пусть H – точка их пересечения

3. Прямая MH – искомая. В самом деле, так как углы APB и AQB опираются на диаметр и имеют вершины на окружности, то они прямые. Значит, AQ и BP являются высотами в треугольнике AMB. В силу теоремы о пересечении всех высот треугольника в одной и той же точке, получаем, что прямая MH, проходящая через точку пересечения двух высот (AQ и BP), тоже высота, так что $MH \perp AB$, что и требовалось доказать.

151. Дан угол ABC и точка M внутри угла. Провести через точку M прямую ℓ, пересекающую стороны угла в точках P и Q так, чтобы отрезок PQ делился в точке M пополам.

Решение (см. рис.8).

1. Проведем $MS \parallel AB$.

2. Отложим $SP = BS$ и проведем через точку P и M прямую ℓ.. Она – искомая.

В самом деле, пусть Q – точка пересечения прямой ℓ со стороной AB данного угла. Рассматривая угол BPQ, стороны которого пересекаются двумя параллельными прямыми MS и BQ, получаем $PM = MQ$ в силу того, что $PS = SB$ (по построению) и в силу свойства параллельных прямых, пересекающих стороны угла.

152. Дан треугольник ABC и точка D на стороне AB (ближе к B, чем к A). Провести через точку D прямую так, чтобы она делила ΔABC на две равновеликие части.

Решение (см. рис.9).

I. Находим середину стороны AC (точка 0) и соединяем ее с точкой D.

2. Проводим $BF \parallel DO$ и соединяем точку D с точкой F.

Прямая DF - искомая. В самом деле, так как BO - медиана треугольника ABC, то $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta BOC}$. (I)

Далее, так как $BDOF$ - трапеция (по построению), то

$$S_{\Delta BND} = S_{\Delta ONF} . \qquad (2)$$

Из (I) и (2) очевидно, имеем

$$S_{\Delta ADF} = S_{DFCB} ,$$

что и требовалось доказать.

I53. Дан ΔABC. Провести прямую $MN \parallel AC$ так, чтобы $MB = NC$.

Указание (см. рис.I0).

I. Проведем биссектрису BD угла B.

2. Далее проводим $DM \parallel BC$ и $MN \parallel AC$. MN - искомая прямая.

I54. На окружности с центром в точке 0 даны две точки A и B. Из этих точек провести две хорды, сумма длин которых задана и равна a.

Указание (см. рис.II).

I. Соединяем точки A и B отрезком AB и находим его середину-точку C.

2. На отрезке CO как на диаметре строим окружность.

3. Раствором циркуля $CN = \frac{a}{4}$ делаем засечку на этой малой окружности.

Проведем $BB' \parallel CN$ и $AA' \parallel CN$. Хорды BB', AA' - искомые.

Замечание. Задача имеет два решения, если $CO > \frac{a}{4}$; в противном случае задача невозможна.

155. В $\triangle ABC$ вписать ромб с данным острым углом α так, чтобы одна из его сторон лежала на основании AB треугольника ABC, а две его вершины – на боковых сторонах.

Указание (см. рис.12).

1. Выбираем на AC произвольную точку M и строим заданный острый угол α так, чтобы одна сторона MQ была параллельна AB, а другая пересекала AB (в точке P);

2. Откладываем $PN=MP$ и через точку N проводим $NQ \parallel PM$.

3. Через точки A и Q проводим прямую до пересечения со стороной CB (в точке S).

4. Проводим $SK \parallel AB$, $ST \parallel MP$, $KL \parallel ST$.

Четырехугольник $KSTL$ – искомый ромб. Докажите это.

156. Дана прямая AB и две точки M и N, лежащие над прямой. Найти на прямой AB точку P такую, чтобы $\angle APM = 2\angle BPN$.

Решение (см. рис.13).

1. Через точку N проводим прямую $NQ \perp AB$ и от точки Q откладываем отрезок $QO = NQ$.

2. Проводим окружность радиуса $R = OQ$ с центром в точке O. Она касается прямой AB в точке Q.

3. Через точку M проводим касательную MS к окружности.

Точка P пересечения касательной с прямой AB – искомая точка. Действительно $\angle APM = \angle SPQ = 2\angle OPQ = 2\angle BPN$, что и требовалось.

157. Пользуясь только линейкой, разделить трапецию $ABCD$ на две равновеликие части.

Указание (см. рис.14).

1. Проведем диагонали трапеции AC и BD. Пусть точка O – точка их пересечения.

2. Продолжим стороны AB и CD до их пересечения в точке P. Тогда прямая POQ – искомая. Доказать это. (Воспользоваться тем фактом, что середины оснований трапеции и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой).

Уравнения и системы уравнений.

158. Решить уравнение

$$2\sin^2 x + \sin^2 2x = 3.$$

Решение. Уравнение приводится к виду

$$1-\cos 2x + 1 - \cos^2 2x = 3 \text{ или } \cos^2 2x + \cos 2x + 1 = 0.$$

Левая часть всегда положительная. Следовательно, данное уравнение действительных корней не имеет.

159. Решить уравнение

$$\sin \pi x - \cos \pi x = \sqrt{2}.$$

Решение. Имеем $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin \pi x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos \pi x = 1$ или $\sin\left(x - \frac{1}{4}\right)\pi = 1.$

Отсюда $x = \frac{3}{4} + 2n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

160. Решить уравнение

$$\log_{x^4+3a^4} 25 = \log_{x^2+a^2} 5.$$

Решение. Имеем

$$2\log_{x^4+3a^4} 5 = \log_{x^2+a^2} 5.$$

Применяя к обеим частям уравнения тождество

$$\log_B A = \frac{1}{\log_A B} \quad (A>0, B>0, A\neq 1, B\neq 1),$$

получим
$$\frac{2}{\log_5(x^4+3a^4)}=\frac{1}{\log_5(x^2+a^2)}$$
или $\log_5(x^2+a^2)^2=\log_5(x^4+3a^4)$;

откуда $(x^2+a^2)^2=x^4+3a^4$ или $x^2=a^2$, $x=\pm a$.

Уравнение имеет два действительных корня $x_1=-a$, $x_2=a$.

161. Решить систему уравнений $\left.\begin{array}{l}(x^2-1)(y^2-1)=0\\(3-x)y=0\end{array}\right\}.$

Решение. Эта система распадается на две системы
$$\left.\begin{array}{r}x^2-1=0\\(3-x)y=0\end{array}\right\},\quad(1)\qquad\left.\begin{array}{r}y^2-1=0\\(3-x)y=0\end{array}\right\},\quad(2)$$
каждая из которых, в свою очередь, сводится к системам
$$\left.\begin{array}{r}x^2-1=0\\y=0\end{array}\right\},\quad(3)\qquad\left.\begin{array}{r}y^2-1=0\\3-x=0\end{array}\right\}.\quad(4)$$
Решения системы (3):
$$\left.\begin{array}{l}x_1=-1,\\y_1=0\end{array}\right\}\quad(5)\quad\text{и}\quad\left.\begin{array}{l}x_2=1,\\y_2=0\end{array}\right\}.\quad(6)$$
Решения системы (4):
$$\left.\begin{array}{l}x_3=3,\\y_3=-1\end{array}\right\}\quad(7)\quad\text{и}\quad\left.\begin{array}{l}x_4=3\\y_4=1\end{array}\right\}.\quad(8)$$
Исходная система уравнений имеет четыре решения (5), (6), (7), (8).

162. Решить уравнение
$$(\sin x)^{\sin x}=1.$$

Решение. Левая часть уравнения имеет смысл для значений x, удовлетворяющих условию $\sin x > 0$, т.е. для $2\pi n < x < (2n+1)\pi$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Логарифмируя обе части уравнения, получим

$$\sin x \cdot \lg \sin x = 0.$$

Но так как $\sin x \neq 0$, то должно быть $\lg \sin x = 0$. Отсюда $\sin x = 1$, а значит, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

163. Решить уравнение

$$(3 - 2\sin x)^{\lg x} = x. \qquad (1)$$

Решение. Здесь, очевидно, $x > 0$. Логарифмируя обе части уравнения (I), получим $\lg x \lg(3 - 2\sin x) = \lg x$ или $\lg x [\lg(3 - 2\sin x) - 1] = 0$. Откуда $\lg x = 0$, $x = 1$.

Далее, $\lg(3 - 2\sin x) - 1 \neq 0$, так как $3 - 2\sin x \neq 10$.

Данное уравнение имеет единственный действительный корень $x = 1$.

164. Найти все действительные решения уравнения

$$y^2 - 2y\cos \pi x + 1 = 0.$$

Решение. Имеем

$$y = \cos \pi x \pm \sqrt{\cos^2 \pi x - 1} = \cos \pi x \pm \sqrt{-\sin^2 \pi x}.$$

Уравнение будет иметь действительные решения только при условии, что $\sin^2 \pi x = 0$. Отсюда находим, что $x = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

При $x = n$ будем иметь: $y = \cos \pi n = (-1)^n$.

Все действительные решения данного уравнения имеют вид

$$x = n, \; y = (-1)^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

165. Найти все действительные решения уравнения

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + 1 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение (I) в виде

$$(x-y)^2+(y+1)^2=0,$$

откуда получаем $x-y=0$ и $y+1=0$, так что $x=-1, y=-1$.

166. Найти все действительные решения системы

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ xy-z^2=1 \end{array}\right\}.$$

Решение. Из первого уравнения системы находим $x=2-y$ и подставляем во второе уравнение. Получим

$$y^2-2y+z^2+1=0$$

или $(y-1)^2+z^2=0$, откуда $y=1$, $z=0$, и, следовательно, $x=1$.

Ответ: $x=1$, $y=1$, $z=0$.

167. Решить уравнение

$$(2+\sin\pi x)^4+\sin^4\pi x=16. \qquad (I)$$

Решение. Положим $1+\sin\pi x=y$ (2). Тогда уравнение (I) примет вид

$$(y+1)^4+(y-1)^4=16 \quad \text{или} \quad y^4+6y^2-7=0. \qquad (3)$$

Корни уравнения (3):

$$y_1=1,\ y_2=-1,\ y_3=i\sqrt{7},\ y_4=-i\sqrt{7}.$$

Так как в силу подстановки (2), $\sin\pi x=y-1$, то ясно, что исходное уравнение удовлетворяется только при $y=1$. Это приводит к уравнению $\sin\pi x=0$, откуда $x=n$, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$

168. Решить уравнение $\sin 3x \cos 2x = 1$.

Решение. Это равенство возможно в двух случаях

$$1)\ \left.\begin{array}{l}\sin 3x = 1\\ \cos 2x = 1\end{array}\right\}, \qquad 2)\ \left.\begin{array}{l}\sin 3x = -1\\ \cos 2x = -1\end{array}\right\}.$$

Для первого случая имеем

$$3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$2x = 2\pi k, \quad x = \pi k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Найдем такие целые числа n и k, при которых получаются одинаковые x. Имеем

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n = \pi k \qquad \text{или} \qquad 1 + 4n = 6k.$$

Это равенство при целых n и k не имеет места, так как при любом целом n слева получаем нечетные числа, а справа - при любом целом k - четные числа.

Следовательно, система (I) несовместна.

Рассмотрим второй случай.

$$\left.\begin{array}{l}\sin 3x = -1\\ \cos 2x = -1\end{array}\right\}.$$

Получаем

$$3x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$2x = (2k+1)\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Поступая как и в первом случае, найдем

$$\frac{2}{3} n = k.$$

Так как число k целое, то число n должно быть кратно трем: $n = 3m$, а тогда $k = 2m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Итак, все действительные корни данного уравнения выражаются формулой

$$x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

169. Решить уравнение

$$\cos 2x = \sin 5x \sin 7x . \qquad (I)$$

Решение. Так как $\cos 2x = \cos(7x-5x) = \cos 7x \cos 5x + \sin 7x \sin 5x$,

то уравнение принимает вид $\cos 7x \cos 5x = 0$,что дает

$$x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}k \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\dots); \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\dots).$$

170. Найти хотя бы одно решение уравнения $12^x - 13^x + 5^x = 0$.

Решение. Делим обе части уравнения на $13^x \neq 0$. Получаем

$$\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x = 1 . \qquad (I)$$

Так как $0 < \frac{12}{13} < 1$, то, полагая $\frac{12}{13} = \cos\alpha$, найдем, что

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{144}{169}} = \pm\frac{5}{13} .$$

Берем $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Уравнение (I) примет вид

$$(\cos\alpha)^x + (\sin\alpha)^x = 1 .$$

Оно имеет очевидное решение $x = 2$.

171. Решить уравнение $\cos(\pi \arcsin x^2) = -1$.

Решение. Имеем $\pi \arcsin x^2 = (2n+1)\pi$ или $\arcsin x^2 = 2n+1$,

где n - целое число или ноль. Так как $0 \leq x^2 \leq 1$,

то $0 \leq \arcsin x^2 \leq \frac{\pi}{2}$. Значит, n должно удовлетворять условию $0 \leq 2n+1 \leq \frac{\pi}{2}$ или $-\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{\pi-2}{4}$. (I)

Так как n - целое число или ноль, а $\frac{\pi-2}{4} < 1$, то из условия (I) получаем $n = 0$.

Итак, $\arcsin x^2 = 1$, откуда $x^2 = \sin 1$, и, значит, $x = \pm\sqrt{\sin 1}$.

172. Найти все действительные корни уравнения:

$$x^4 + ax^3 - (a+2)x - a^2 - 2a = 0 .$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$a^2+(2+x-x^3)a+2x-x^4=0.$$

и решим его относительно a:

$$a=\frac{x^3-x-2}{2}\pm\sqrt{\frac{(x^3-x-2)^2}{4}+x^4-2x}=\frac{x^3-x-2\pm(x^3+x-2)}{2},$$

отсюда $a=x^3-1$ и $a=-x$.

Следовательно, $x=-a$, $x^3-(a+1)=0$.

Итак, действительные корни уравнения:

$$x_1=-a,\quad x_2=\sqrt[3]{a+1}.$$

173. Решить уравнение

$$x^4-5x^3+2x^2+22x-20=0, \qquad (I)$$

если известен корень $x_1=3-i$.

Решение. Так как коэффициенты уравнения действительны, то второй корень $x_2=3+i$. Поэтому левая часть уравнения (I) делится на $[x-(3-i)][x-(3+i)]=x^2-6x+10$.

Следовательно, уравнение (I) можно записать в виде

$$(x^2+x-2)(x^2-6x+10)=0.$$

Уравнение $x^2+x-2=0$ имеет корни $x_3=1$, $x_4=-2$.

Итак, корни исходного уравнения:

$$x_1=3-i,\ x_2=3+i,\ x_3=1,\ x_4=-2.$$

174. Решить уравнение $|\lg|x||=\lg x^2$.

Решение. Имеем $\lg|x|=\pm\lg x^2$.

1) $\lg|x|=\lg x^2$; $|x|=x^2$; $|x|(|x|-1)=0$.

а) $x=0$ – не подходит

б) $|x|=1$, $x_1=-1$, $x_2=1$.

2) $\lg|x| = -\lg x^2$; $\lg|x| + \lg x^2 = 0$;

$\lg|x|^3 = 0$; $|x|^3 - 1 = 0$.

Так как всегда $|x|^2 + |x| + 1 > 0$, то $|x| - 1 = 0$,

$|x| = 1$, $x_{3,4} = \pm 1$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

175. Найти положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}(\pi 2^{-x+1}) = 1.$$

Решение. Имеем

$$\pi 2^{-x+1} = \frac{\pi}{4} + \pi n \text{ или } 2^{-x} = \frac{1+4n}{8}.$$

Отсюда $2^x = \dfrac{8}{1+4n}$, где n - ноль или целое число.

Следовательно $x = \log_2 \dfrac{8}{1+4n}$.

Так как основание логарифма равно $2 > 1$, то положительные корни x получим при условии, что $\dfrac{8}{1+4n} > 1$, откуда $n < \dfrac{7}{4}$.

Значит, $n = 0$ и $n = 1$.

Данное уравнение имеет только два положительных корня

$x_1 = 3$ (при $n = 0$); $x_2 = 3 - \log_2 5$ (при $n = 1$).

176. Решить уравнение

$$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 6.$$

Решение. Имеем

$$3^{\log_3 x \log_3 x} + x^{\log_3 x} = 6 \text{ или } \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 6.$$

Пользуясь основным логарифмическим тождеством, получим

$$x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 6 \text{ или } x^{\log_3 x} = 3. \quad (I)$$

Логарифмируя обе части уравнения (I) при основании 3, найдем $\log_3^2 x = 1$. Отсюда $\log_3 x = \pm 1$, и, значит,

$$x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

177. Решить уравнение

$$\sin 2x + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0.$$

Решение. Имеем

$$\sin 2x + \frac{3}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x) - 1 = 0. \quad (I)$$

Положим $y = \cos x - \sin x$. Тогда $1 - \sin 2x = y^2$ и, значит, $\sin 2x = 1 - y^2$. Подставляя в (I), получим квадратное уравнение $y^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} y = 0$, корни которого $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Поэтому

1) $\cos x - \sin x = 0$ или $\operatorname{tg} x = 1$. Отсюда $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$,

2) $\cos x - \sin x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ или $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}$,

что невозможно.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

178. Решить уравнение

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1 = 0. \quad (I)$$

Решение. Перепишем уравнение (I) в виде

$$[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] + 1 = 0$$

или $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6) + 1 = 0.$ (2)

Полагая $x^2+5x+4 = y$ (3), приходим к уравнению

$$y(y+2) + 1 = 0 \text{ или } (y+1)^2 = 0. \quad (4)$$

Отсюда $y_1 = y_2 = -1$. Следовательно, в силу подстановки (3) $x^2+5x+5=0$, откуда $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

В силу (4) каждый из корней x_1 и x_2 является двукратным.

Итак, исходное уравнение имеет четыре корня:

$$x_1=-\frac{\sqrt{5}+5}{2},\quad x_2=\frac{\sqrt{5}-5}{2},\quad x_3=-\frac{\sqrt{5}+5}{2},\quad x_4=\frac{\sqrt{5}-5}{2}.$$

179. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\left.\begin{aligned} ax+4y&=0\\ x+ay&=0\end{aligned}\right\}$$

имеет ненулевые решения? Найти эти решения.

Решение. Система будет иметь ненулевые решения при условии, что ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a & 4\\ 1 & a\end{vmatrix}=0,\quad a^2-4=0,$$

т.е. при $a=\pm 2$.

1) Положим $a=-2$. Тогда система примет вид

$$\left.\begin{aligned} -2x+4y&=0\\ x-2y&=0\end{aligned}\right\}\quad \text{или}\quad \left.\begin{aligned} x-2y&=0\\ x-2y&=0\end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Берем любое уравнение, например, второе: $x-2y=0$.

Из него находим, что $x=2y$. Положим $y=t$, где $-\infty<t<+\infty$.

Тогда $x=2t$.

Все решения системы (1) даются формулами $x=2t,\ y=t,\ -\infty<t<+\infty$

2) Пусть теперь $a=2$. Получим

$$\left.\begin{aligned} 2x+4y&=0\\ x+2y&=0\end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Полагая $y=t$, где t – любое действительное число, найдем $x=-2t$. Все решения системы (2) даются формулами

$$x=-2t,\quad y=t,\quad -\infty<t<+\infty.$$

Ответ: $x_1=2t,\ y_1=t;\ x_2=-2t,\ y_2=t,$

где $-\infty<t<+\infty$.

180. Доказать, что при выполнении условия

$$p+q+1<0 \qquad (I)$$

уравнение $$x^2+px+q=0 \qquad (2)$$

имеет действительные и различные корни.

Решение. Дискриминант уравнения (2) $D=\frac{p^2}{4}-q$ при выполнении условия (I) положителен. В самом деле, в силу (I) имеем

$$D=\frac{p^2}{4}-q>\frac{p^2}{4}+(p+1)=\frac{(p+2)^2}{4}\geqslant 0.$$

Значит, уравнение (2) имеет действительные и различные корни.

181. Решить уравнение

$$|x-1|+|x-2|=1. \qquad (I)$$

Решение.

I) При $x<1$ уравнение (I) принимает вид $1-x+2-x=1$, откуда $x_1=1$.

2) При $1\leq x<2$ получаем $x-1+2-x\equiv 1$ – тождество. Итак $1\leq x<2$.

3) При $x\geqslant 2$ имеем $x-1+x-2=1$, откуда $x_2=2$.

Ответ: $1\leq x\leq 2$, т.е. любое x из $[1,2]$ является решением уравнения (I).

182. Найти действительные корни уравнения

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2+x^2}=2.$$

Решение. Для любого действительного x

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2+x^2}\geqslant 1+\sqrt{2}>2,$$

так что данное уравнение действительных корней не имеет.

183. Решить уравнение

$$(\cos x)^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1. \qquad (I)$$

Решение. Очевидно, что (I) будет выполнено, если либо $\cos x = 1$, т.е. при $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

либо
$$\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) находим:

а) $\sin x = 1$, что дает $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ – не подходит, так как при этих значениях x имеем $\cos x = 0$; б) $\sin x = \frac{1}{2}$, что дает $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ответ: $x = 2k\pi$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

184. Решить уравнение
$$\sqrt{x+11+6\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}} = 6. \qquad (I)$$

Решение. Уравнение (I) перепишем в виде
$$\sqrt{(\sqrt{x+2}+3)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+2}-3)^2} = 6$$

или
$$\sqrt{x+2} + 3 + \left|\sqrt{x+2} - 3\right| = 6. \qquad (2)$$

При условии $\sqrt{x+2} - 3 \geqslant 0$ из (2) получим $\sqrt{x+2} = 3$, откуда $x = 7$. При условии $\sqrt{x+2} - 3 < 0$, т.е. при $x < 7$ соотношение (2) обращается в тождество.

Ответ: $x \leq 7$.

185. Решить уравнение
$$2\cdot(9^x + 9^{-x}) + 3\cdot(3^x + 3^{-x}) = 10. \qquad (I)$$

Решение. Положим $3^x + 3^{-x} = y$. Очевидно, $y > 0$.

Тогда уравнение (I) примет вид
$$2y^2 + 3y - 14 = 0. \qquad (2)$$

Корни уравнения (2):

$$y=-\frac{7}{2} \text{ - не подходит, и } y=2.$$

Значит, $3^x+3^{-x}=2$, откуда $x=0$.

Ответ: $x=0$.

Неравенства.

186. Решить неравенство

$$\frac{(x^3+1)\log_{0,71}x}{3+\sqrt{x}} < 0. \qquad (I)$$

Решение. Так как логарифмическая функция определена для $x>0$, то ОДЗ есть $0 < x < +\infty$.

Значит, $\frac{x^3+1}{3+\sqrt{x}} > 0$ и, следовательно, неравенство (I) эквивалентно более простому $\log_{0,71} x < 0$.

Так как основание $a=0,71<1$, то $x>1$.

187. Решить неравенство

$$\frac{(\pi-\operatorname{arctg}x)\,x}{x-1} > 0. \qquad (I)$$

Указание. Так как $|\operatorname{arctg}x| < \frac{\pi}{2}$ для всех действительных x, то $\pi-\operatorname{arctg}x>0$. Поэтому неравенство (I) равносильно неравенству $\frac{x}{x-1}>0$, которое решается легко.

188. Решить неравенство

$$\log_{\sin x}(x-3)>0.$$

Решение. Это неравенство будет иметь место при одновременном выполнении следующих условий

$$0<\sin x<1, \quad x>3.$$

Из графика функции $y=\sin x$ находим с учетом того, что $x>3$: (см. рис. 15):

$$3<x<\pi, \quad 2\pi<x<\frac{5}{2}\pi,$$
$$\frac{5}{2}\pi<x<3\pi \quad \text{и т.д.}$$

189. Решить неравенство

$$|\sin x|<|\cos x|. \qquad (I)$$

Решение. Строим графики функций $y=|\sin x|$ и $y=|\cos x|$. (см.рис.16). Для нахождения абсцисс точек пересечения графиков решаем тригонометрическое уравнение $|\sin x|=|\cos x|$.

Имеем $|\operatorname{tg} x|=1$, т.е. $\operatorname{tg} x=\pm 1$.

Отсюда $x=\pm\frac{\pi}{4}+n\pi$, $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

Из рис. 16 усматриваем, что неравенство (I) выполняется при значениях x, взятых из интервалов $n\pi-\frac{\pi}{4}<x<n\pi+\frac{\pi}{4}$,

$$n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

190. Что больше: $\sqrt[3]{4}$ или $\sqrt[4]{3}$?

Решение. Известно, что если $a^n>b^n$, где $a>1, b>1$ и n - положительное число, то $a>b$. Имеем

$$(\sqrt[3]{4})^{12}=4^4=256,$$
$$(\sqrt[4]{3})^{12}=3^3=27,$$

так что $(\sqrt[3]{4})^{12}>(\sqrt[4]{3})^{12}$.

Следовательно, $\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{3}$.

191. Что больше: $\log_2 3$ или $\log_3 2$?

Ответ. Так как $\log_2 3>\log_2 2=1=\log_3 3>\log_3 2$,

то $\log_2 3>\log_3 2$.

192. Что больше: $\frac{1}{2}\lg\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{3}\lg\frac{1}{2}$?

Решение. Имеем

$$\frac{1}{2}\lg\frac{1}{3}=-\lg\sqrt{3}<-\lg\sqrt[3]{2}=\frac{1}{3}\lg\frac{1}{2}.$$

Значит, $\frac{1}{2}\lg\frac{1}{3} < \frac{1}{3}\lg\frac{1}{2}$.

193. Что больше: x или x^3 ?

Решение. Рассмотрим разность $x^3 - x = x(x^2-1)$.

Нетрудно видеть, что эта разность может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от величины x. Поэтому рассмотрим случаи:

$$x(x^2-1) > 0 \qquad (1)$$

и

$$x(x^2-1) < 0. \qquad (2)$$

В случае (I) либо $\left.\begin{matrix} x>0 \\ x^2-1>0 \end{matrix}\right\}$, либо $\left.\begin{matrix} x<0 \\ x^2-1<0 \end{matrix}\right\}$.

Отсюда: или $x>1$, или $-1<x<0$.

Таким образом, $x^3 > x$ в областях $-1<x<0$, $x>1$.

Значит, $x^3 < x$ в областях $x<-1$, $0<x<1$,

где имеет место случай (2).

Замечание. Решение становится очевидным, если построить графики функций $y=x$ и $y=x^3$ (см.рис.I7).

194. Доказать неравенство

$$|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geq 1.$$

Решение. Возьмем окружность единичного радиуса $R=1$ (Рис.I8) и выберем в ней произвольный центральный угол α. Построим для этого угла линию синуса AM и линию косинуса OA. Длины этих линий будут равны $AM = |\sin\alpha|$, $OA = |\cos\alpha|$.

В треугольнике сумма длин двух сторон всегда не меньше длины третьей стороны: $AM + OA \geq OM = 1$, т.е. $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geq 1$.

Наибольшие и наименьшие значения функций.

195. Найти наибольшее значение функции $y=\frac{1}{1+x+x^2}$;
при каком значении x оно достигается?

Решение. Данная функция будет иметь наибольшее значение тогда, когда ее знаменатель будет иметь наименьшее значение. Выделим в знаменателе полный квадрат

$$1+x+x^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Знаменатель будет иметь наименьшее значение, равное $\frac{3}{4}$, при $x=-\frac{1}{2}$. Следовательно, данная функция будет при $x=-\frac{1}{2}$ иметь наибольшее значение, равное $\frac{4}{3}$.

196. Найти наибольшее значение функции

$$y=\cos^2 x+2(1+\sin x).$$

При каком значении x, $0\le x\le \pi$, оно достигается?

Решение. Имеем

$$y=\cos^2 x+2(1+\sin x)=1-\sin^2 x+2\sin x+2=$$
$$=4-(\sin^2 x-2\sin x+1)=4-(\sin x-1)^2.$$

Наибольшее значение равно 4. Оно достигается при $x=\frac{\pi}{2}$.

197. Найти наибольшее значение функции $y=(5^x+4\cdot 5^{-x})^{-1}$.

Решение. Запишем функцию в виде $y=\frac{1}{5^x+4\cdot 5^{-x}}$. Наибольшее значение y будет иметь при наименьшем значении знаменателя. Выделим в знаменателе полный квадрат. Имеем

$$5^x+4\cdot 5^{-x}=(5^x+4\cdot 5^{-x}-4)+4=$$
$$=\left(5^{\frac{x}{2}}-2\cdot 5^{-\frac{x}{2}}\right)^2+4.$$

Потребуем, чтобы $5^{\frac{x}{2}}-2\cdot 5^{-\frac{x}{2}}=0$. Это будет при $x=\log_5 2$.
Отсюда $\max y=\frac{1}{4}$ при $x=\log_5 2$.

198. Найти наименьшее значение функции $y = x + \frac{1}{x}$ при $x > 0$.

Решение. Имеем $x + \frac{1}{x} + 2 - 2 = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)^2 + 2$, откуда следует, что $\min y = 2$ и достигается этот минимум при $x = 1$.

199. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{x}{x^2+1}$.

Решение. Так как функция $y(x)$ нечетная, то будем искать только наибольшее значение (оно, очевидно, положительное). Имеем

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}.$$

Так как, согласно результату задачи 198, знаменатель $x + \frac{1}{x}$ принимает наименьшее значение, равное 2 (при $x = 1$), то наибольшее значение функции y равно $\frac{1}{2}$. Значит, наименьшее значение этой функции равно $-\frac{1}{2}$ и достигается оно при $x = -1$.

200. Имеется проволока длины ℓ. Требуется согнуть ее так, чтобы получился прямоугольник, ограничивающий по возможности наибольшую площадь.

Решение. Обозначим одну из сторон прямоугольника через x. Тогда другая его сторона будет равна $\frac{\ell}{2} - x$, а площадь

$$S = \left(\frac{\ell}{2} - x\right)x. \qquad (I)$$

Преобразуем правую часть (I) так:

$$\left(\frac{\ell}{2} - x\right)x = \frac{\ell^2}{16} - \left(\frac{\ell^2}{16} - 2\cdot\frac{\ell}{4}\cdot x + x^2\right) = \frac{\ell^2}{16} - \left(\frac{\ell}{4} - x\right)^2. \qquad (2)$$

Из (2) видно, что функция S принимает свое наибольшее значение $\frac{\ell^2}{16}$ при $x = \frac{\ell}{4}$.

Замечание. Если одна из сторон имеет длину $x_1 = \frac{\ell}{4}$, тогда длина другой стороны прямоугольника $x_2 = \frac{\ell}{2} - x_1 = \frac{\ell}{4}$.

Значит, $x_1 = x_2 = \frac{\ell}{4}$, т.е. прямоугольник есть квадрат. Итак, из всех прямоугольников, имеющих один и тот же периметр, наибольшую площадь имеет квадрат.

Построить графики следующих функций.

201. $y = 9^{\log_3 \sqrt{\sin(x-\pi)}}$.

Решение. Находим ОДЗ. Должно быть,

$$\sin(x-\pi) > 0 \text{ или } \sin(\pi - x) < 0,$$

т.е. $\sin x < 0$. Это выполняется при

$$(2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi, \ (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (\text{I})$$

Для x, удовлетворяющих условиям (I), будем иметь

$$y = 9^{\log_3 \sqrt{\sin(x-\pi)}} = 3^{2\log_3 \sqrt{\sin(x-\pi)}} =$$
$$= 3^{\log_3 \sin(x-\pi)} = \sin(x-\pi) = -\sin x .$$

Строим график функции $y = -\sin x$ на интервалах (I) (рис.19).

202. $y = \cos^2 \sqrt{x-x^2} + \sin^2 \sqrt{x-x^2}$.

Решение. ОДЗ $x - x^2 \geqslant 0$, откуда $0 \leq x \leq 1$.
В этой области $y = 1$ (рис.20).

203. $y = \dfrac{x-|x|}{x-|x|}$.

Решение. Область существования $x - |x| \neq 0$.
Это возможно при $x < 0$, так как при этом $|x| = -x$, и, значит,
$x - |x| = 2x \neq 0$. При $x < 0$ имеем $y = 1$, (рис.21).

204. $y = 1 + x + x^2 + \cdots$

Решение. Область существования $|x| < 1$. В этой области
$y = \dfrac{1}{1-x}$ (см. рис.22).

205. $$y=|x-1|-|1-x|.$$

Решение. Так как $|1-x|=|x-1|$, то $y=|x-1|-|x-1|\equiv 0$. График функции – ось Ox.

206. Найти геометрическое место точек, координаты которых (x,y) удовлетворяют уравнению:
$$5^{x+\log_5 3}=3\cdot 5^{y}. \qquad (\text{I})$$

Решение. Имеем
$$5^{x+\log_5 3}=5^x\cdot 5^{\log_5 3}=3\cdot 5^x. \qquad (2)$$

Из (I) и (2) получаем $5^x=5^y$ и, значит, $y=x$ – прямая.

Разные задачи.

207. Какой знак имеет выражение $\cos(\sin x)$?

Ответ. Так как $-\frac{\pi}{2}<-1\le \sin x\le 1<\frac{\pi}{2}$, то $\cos(\sin x)>0$ для всех x.

208. Найти область существования функции
$$y=1-x\sin\frac{\pi}{6}+x^2\sin^2\frac{\pi}{6}-x^3\sin^3\frac{\pi}{6}+\dots \qquad (\text{I})$$
и построить ее график.

Решение. В правой части (I) слагаемые образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=-x\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{x}{2}$.

Чтобы существовала сумма этой прогрессии, должно быть $|q|<1$, т.е. $\left|-\frac{x}{2}\right|<1$ или $|x|<2$.

Итак, область существования $-2<x<2$.

В этой области
$$y=\frac{1}{1+x\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{2}{x+2}.$$

(рис.23)

209. Вычислить $\arcsin\left(\sin\frac{11}{4}\pi\right)$.

Решение. Из определения функции $y=\arcsin x$ следует, что

$$\arcsin(\sin y)=y \text{ для } -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}.$$

В нашем случае $y=\frac{11}{3}\pi>\frac{\pi}{2}$ и пользоваться этим тождеством нельзя. Преобразуем данное выражение так:

$$\arcsin\left(\sin\frac{11}{4}\pi\right)=\arcsin\left[\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=$$
$$=\arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

210. Вычислить без таблиц $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}8\frac{1}{7}\pi\right)$.

Решение. Для $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ имеем $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}y)=y$.

Имеем $$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}8\frac{1}{7}\pi\right)=\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(8\pi+\frac{\pi}{7}\right)\right]=$$
$$=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\pi}{7}.$$

211. Вычислить без таблиц $\arcsin(\sin 3)$.

Решение. Так как $0<\pi-3<\frac{\pi}{2}$, то

$$\arcsin(\sin 3)=\arcsin\{\sin[\pi-(\pi-3)]\}=\arcsin[\sin(\pi-3)]=\pi-3.$$

212. Определить число действительных корней уравнения:

$$|x|-\cos x=0. \qquad (I)$$

Решение. Перепишем (I) в виде $|x|=\cos x$ и построим графики функций $y=|x|$ и $y=\cos x$ (рис.24).

Уравнение имеет два действительных корня x_1 и x_2, причем $-\frac{\pi}{2}<x_1<0$, $0<x<\frac{\pi}{2}$ и $x_1=-x_2$.

213. Определить число действительных корней уравнения

$$x\operatorname{arctg}x=1. \qquad (I)$$

Решение. Так как $x = 0$ не является корнем уравнения (I), то (I) можно записать в виде $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{x}$.

Строим графики функций

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \frac{1}{x} \qquad \text{(Рис.25).}$$

Графики пересекаются в двух точках, следовательно, уравнение имеет два действительных корня $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$.

214. Доказать тождество

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}, \quad a>0,\ b>0,\ c>0,\ a \neq 1,\ c \neq 1.$$

Доказательство. Имеем $a^{\log_c b} = a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}} =$

$$= a^{\frac{1}{\log_a c} \cdot \log_a b} = a^{\log_a b^{\frac{1}{\log_a c}}} = b^{\frac{1}{\log_a c}} = b^{\log_c a},$$

что и требовалось доказать.

215. Чему равен $\arcsin \frac{\pi}{2}$?

Ответ. Область определения функции $y = \arcsin x$ есть отрезок $[-1, 1]$, т.е. $-1 \leq x \leq 1$. Так как $\frac{\pi}{2} > 1$, то выражение $\arcsin \frac{\pi}{2}$ не имеет смысла.

216. Найти геометрическое место вершин остроугольных треугольников с данным основанием a.

Ответ. Полоса ширины a, за исключением круга, вписанного в эту полосу. (см. рис.26). Доказать это.

217. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на части, равные x и y (рис. 27). Определить площадь S треугольника.

Решение. $S = \dfrac{(x+a)(y+a)}{2} = xy + (x+y)a + a^2$.

По теореме Пифагора $(x+y)^2 = (x+a)^2 + (y+a)^2$.

Отсюда получаем, что $(x+y)a + a^2 = xy$.

Следовательно, $S = xy$.

9. $x = 1$.

10. $x = 10^{\frac{b^2}{a(b-a)}}, \quad y = 10^{\frac{b}{b-a}}$.

11. Решение. Возвысим в квадрат обе части заданного равенства

$$\sin\alpha + \cos\alpha = m. \qquad (1)$$

Получим

$$1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = m^2.$$

Откуда $$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{m^2-1}{2}. \qquad (2)$$

Используя (1) и (2), будем иметь

$$\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) =$$
$$= m\left(1 - \frac{m^2-1}{2}\right) = \frac{m(3-m^2)}{2}.$$

Ответ: $\frac{m(3-m^2)}{2}$.

12. $x = \frac{k\pi}{3}, \quad x = \frac{k\pi}{5} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

13. 1.

14. Указание. Воспользоваться тем, что $b = \frac{a+c}{2}$.

15. $-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

16. После несложных выкладок получим

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$, откуда $\cos(x + 60^\circ) = -\frac{1}{2}$.

Это уравнение удовлетворяется при $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ и $x = (2k-1)\pi$.

Но последняя серия не подходит, так как при этих значениях x не существует $\operatorname{ctg} x$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

17. -1.

18. $x = 10, \ y = 7; \quad x = -7, \ y = -10$.

19. Так как $\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin 30^\circ+\sin(90^\circ-\alpha)}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos\alpha$,

то левая часть доказываемого соотношения принимает вид

$$1+2\cos\alpha .$$

Далее $1+2\cos\alpha=\frac{(1+2\cos\alpha)\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=$

$$=\frac{2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} .$$

Тождество доказано.

20. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

21. 0.

22. Указание. Воспользоваться следующим свойством трех последовательных членов арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3:

$$a_2-a_1=a_3-a_2 .$$

23. $\sin^2(\alpha+\beta)$.

24. $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}, \quad x=\frac{\pi}{10}(2k+1), \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

25. $\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}$.

26. $x_1=0, \quad x_2=-5$.

27. Решение. Умножив и разделив исходное выражение на $\sin 20^\circ$, получим $\frac{2\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=$

$$=\frac{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}=\frac{\cos 10^\circ\sin 10^\circ}{2\sin 20^\circ}=\frac{1}{4} .$$

28. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi, \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

39. $S_Б=2\pi R^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

40. $\frac{\sqrt{a}}{a+1}$.

41. $\div\div\ 18, 6, 2, \ldots$ и $\div\div\ 2, 6, 18, \ldots$

42. Решение: $x=100^{0,5-\lg 2,5}=\frac{100^{0,5}}{100^{\lg 2,5}}=\frac{10}{(2,5)^2}=1,6$.

43. $x=k\pi, \quad x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

44. $V = \frac{a^3}{8}(\sec\alpha - 1)$.

45. $\sqrt{a+b^2}$.

47. $x_1 = 2$, $x_2 = 6$.

48. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

49. $\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha)} R S_Б$.

50. b.

51. $x_1 = \log_{\frac{a}{b}} 4$, $x_2 = -\log_{\frac{a}{b}} 4$.

52. $\sqrt{3}$.

53. $x = (4k+1)\frac{\pi}{6}$ $x = (4k-1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

54. $\frac{(S_n \cos\alpha)^{3/2}}{6\sqrt{2\pi}\cos^3\frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

55. $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

56. $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}0001$.

58. $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

59. $\frac{1}{8}$.

60. $32x$.

61. $x = 9$.

62. $\frac{\cos(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\beta}{\cos 2\beta}$.

63. $x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

72. 14 часов и 17 часов 30 минут

73. $x = -1$.

74. $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

75. $\operatorname{cosec} 2\alpha$.

76. 20 часов и 25 часов.

77. $x=3$.

78. $x=(2k+1)\frac{\pi}{3}$; $x=(4k+1)\frac{\pi}{4}$. $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

80. 24 минуты и 48 минут.

81. $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$; $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

82. $x=40$.

84. 24 часа и 24 часа; или 20 часов и 30 часов .

85. $x=3$.

86. $x=(4n+3)45^\circ$; $x=105^\circ+360^\circ n$; $x=-15^\circ+360^\circ n$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

87. $2\cos\alpha$.

88. I2 км/час или I8 км/час .

89. $x=\log_3 2-1$.

90. $x=(4k+1)45^\circ$; $x=45^\circ+(-1)^{k+1}30^\circ+180^\circ k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

9I. $\frac{3}{2}$.

I00. I2 часов и I5 часов.

I0I. $2\sin(\alpha-30^\circ)$.

I02. $x=5$.

I03. $x=(-1)^k\frac{\pi}{30}+\frac{\pi}{5}k$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

I04. 45 дней и 30 дней или 24 дня и 72 дня .

I05. $\sin\alpha$.

106. Решение: $\left.\begin{array}{l}\log_{xy}(x-y)=1\\ \log_{xy}(x+y)=0\end{array}\right\}$. (I)

Соотношения между x и y, определяющие область допустимых значений, будут: $x-y>0,\ x+y>0;\ xy>0,\ xy\neq 1$.

Пользуясь определением логарифма, систему (I) в области допустимых значений x и y можно записать так:

$\left.\begin{array}{l}xy=x-y\\ x+y=1\end{array}\right\}$. Откуда $\begin{array}{l}x_1=\sqrt{5}-1,\\ y_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}$ и $\begin{array}{l}x_2=-\frac{\sqrt{5}+1}{2},\\ y_2=\frac{\sqrt{5}+3}{2}.\end{array}$

Вторая пара значений x и y не входит в область допустимых значений $(x_2-y_2<0)$.

Ответ: $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ y=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

107. $x=k\pi;\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$.

108. 8 дней.

109. $-2\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha$.

110. $x_1=1,\ x_{2,3}=10^{\pm\sqrt{\lg\frac{3}{2}}}$.

111. $x=(6k-1)5^\circ;\ x=(3k+2)60^\circ\quad(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$.

112. 20 м или 2 м.

114. $x_1=6,\ x_2=\frac{6}{5}$.

115. $x=(4k-1)\frac{\pi}{4};\ x=(3k\pm1)\frac{\pi}{3}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$.

116. 30 часов.

117. -26.

118. $\frac{1}{26}$.

119. $x=(4k-1)\frac{\pi}{4}$; $x=(3k\pm1)\frac{\pi}{3}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$.

128. 80 км/час и 70 км/час .

130. $x_1=1$ и $x_2=4$.

131. $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$.

132. 60 км/час .

133. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{7}-2}{3}$.

134. $-7<x<-3$, $x>5$.

135. $x=2k\pi$ и $x=(4k+1)\frac{\pi}{4}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$.

136. 8% и 5%.

138. На основании свойства неравенств для логарифмов имеем

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{x^2-1}>1.$$

Отсюда
$$0<\frac{x}{x^2-1}<\frac{1}{2}.$$

Решая систему неравенств

$$\frac{x}{x^2-1}>0, \quad \frac{x}{x^2-1}<\frac{1}{2},$$

получим $x>1+\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{2}<x<0$.

Ответ: $1-\sqrt{2}<x<0$; $x>1+\sqrt{2}$.

139. $x=(2k+1)\frac{\pi}{11}$; $x=\frac{k\pi}{3}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$.

140. 10% и 15%.

142. $\frac{4x^2}{\sqrt{6x-x^2}}$.

143. $x=(8k+1)\frac{\pi}{2}$; $x=(8k+3)\frac{\pi}{6}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$.

144. 4 м/сек и 3 м/сек .

145. 4.

146. ОДЗ: $x > 2$.

В области допустимых значений решаем неравенство. Получим

$$|\log_{0,1}(x-2)| > 3.$$

Отсюда: I) $\log_{0,1}(x-2) > 3$, откуда $x-2 < 0,001$

или $x < 2,001$;

2) $\log_{0,1}(x-2) < -3$.

Отсюда: $x-2 > 1000$ или $x > 1002$.

Учитывая область допустимых значений x будем иметь

I) $2 < x < 2,001$,

2) $x > 1002$.

147. $x = \frac{k\pi}{8}$ и $x = \frac{2k\pi}{9}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

ЛИТЕРАТУРА

I. М.И.Абрамович и М.Т.Стародубцев. Сборник задач по математике с образцами решений. Л.,1965.

2. Н.Н.Антонов, М.Я.Выгодский, В.В.Никитин, Л.И.Санкин. Сборник задач по элементарной математике. М., Физматгиз, 1960 г.

3. К.С.Барыбин и А.К.Исаков. Сборник задач по математике для 8-10 классов. М., Учпедгиз, 1955 г.

4. М.Я.Выгодский. Справочник по элементарной математике. М., Физматгиз, 1962 год.

5. А.Н.Колмогоров. О профессии математика. М., "Советская наука", 1954 г.

6. В.В.Кречмар. Задачник по алгебре. М., Физматгиз, 1961 г.

7. Н.Н.Круликовский. Сборник задач по математике для подготовки к приемным экзаменам. Изд. Томского государственного университета. 1963 г.

8. В.С.Кущенко. Сборник конкурсных задач по математике с решениями. Л., "Судостроение" 1964 г.

9. В.Б.Лидский, Л.В.Овсянников, А.Н.Тулайков, М.И.Шабунин. Задачи по элементарной математике. М., "Наука", 1965.

10. П.С.Моденов. Сборник задач по математике с анализом решений. М., "Советская наука", 1959.

11. П.С.Моденов и С.И.Новоселов. Пособие по математике для поступающих в вузы. Издательство Московского Университета, 1966 г.

12. В.Н.Матвеев и Н.М.Матвеев. Сборник задач по математике. Издательство Казанского университета, 1965.

13. М.К.Потапов, Н.Х.Розов, Г.В.Дорофеев. Краткое пособие по математике для поступающих в Московский Университет. Издательство Московского Университета, 1964.

14. К.У.Шахно. Сборник задач по математике. Пособие для учителей. Л., Учпедгиз, 1956.

15. К.У.Шахно. Как готовиться к приемным экзаменам в ВУЗ по математике. Минск, "Высшая школа", 1965 г.

Рукопись поступила в издательский отдел

I марта 1968 года.

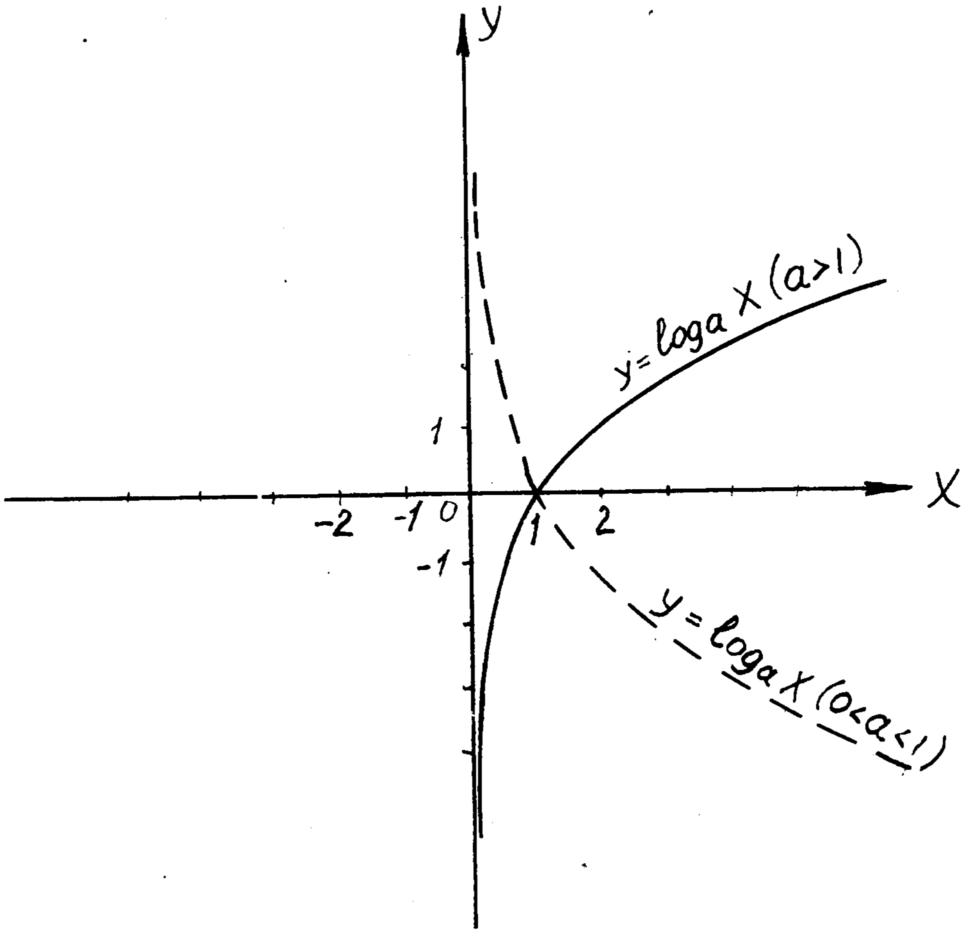

Рис. 1

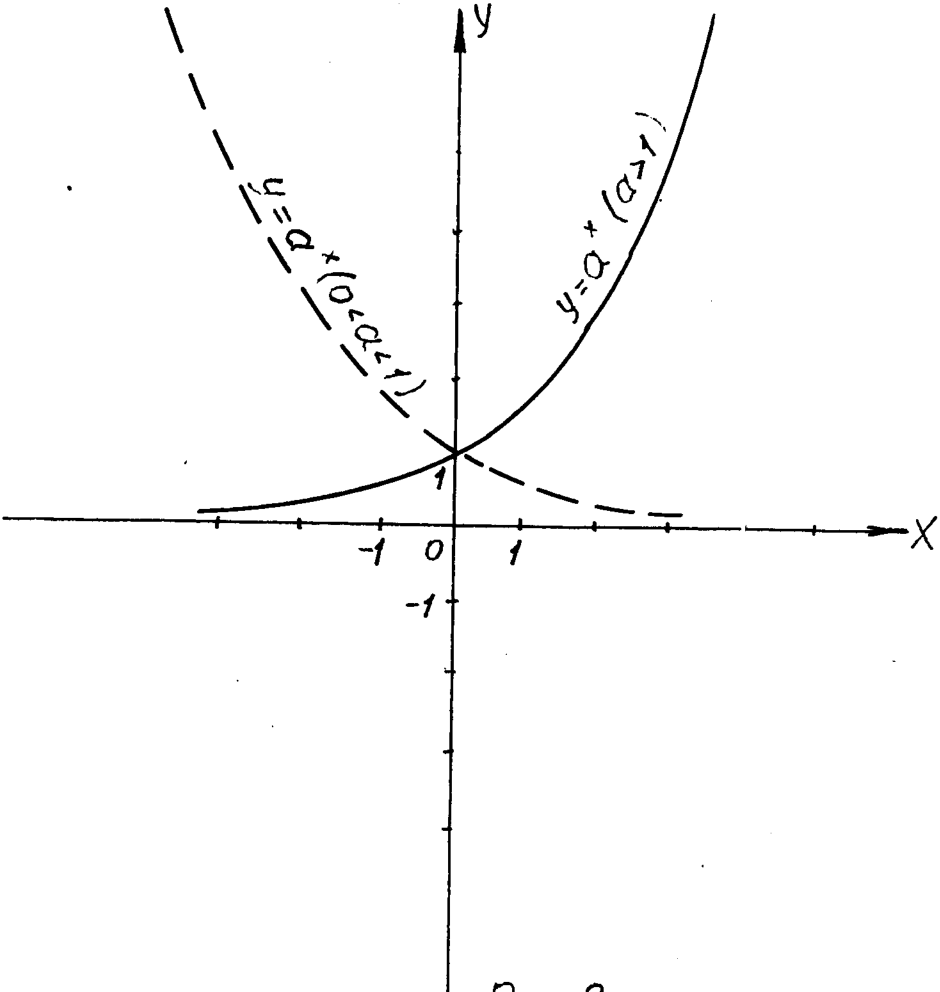

Рис. 2

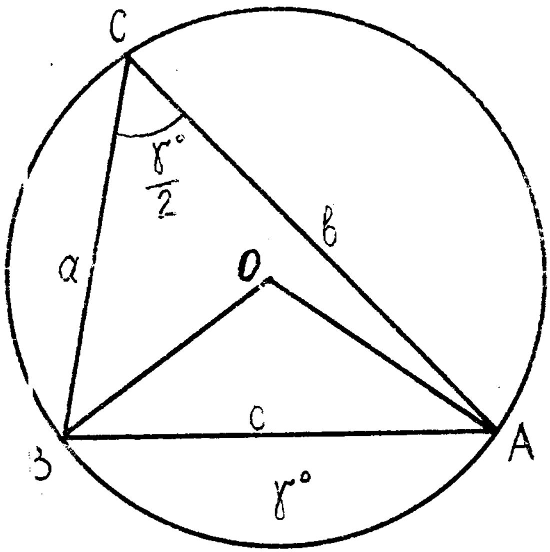

Рис. 3

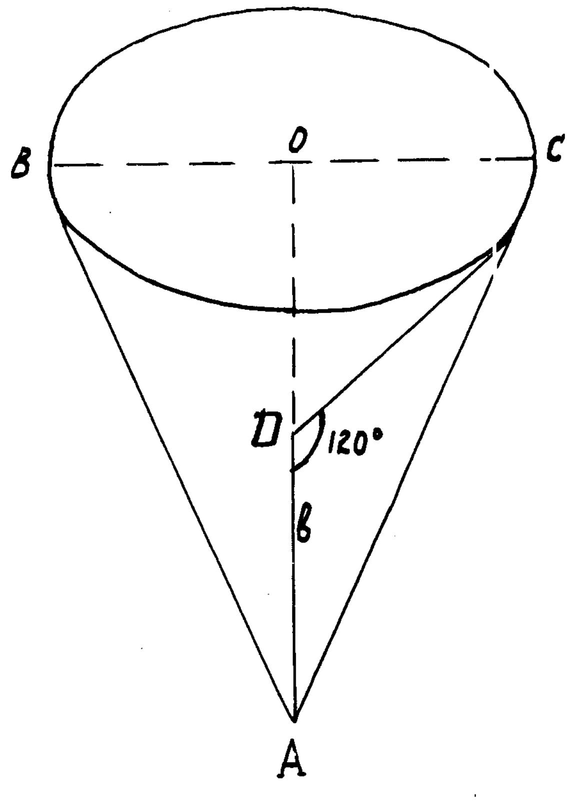

Рис. 4

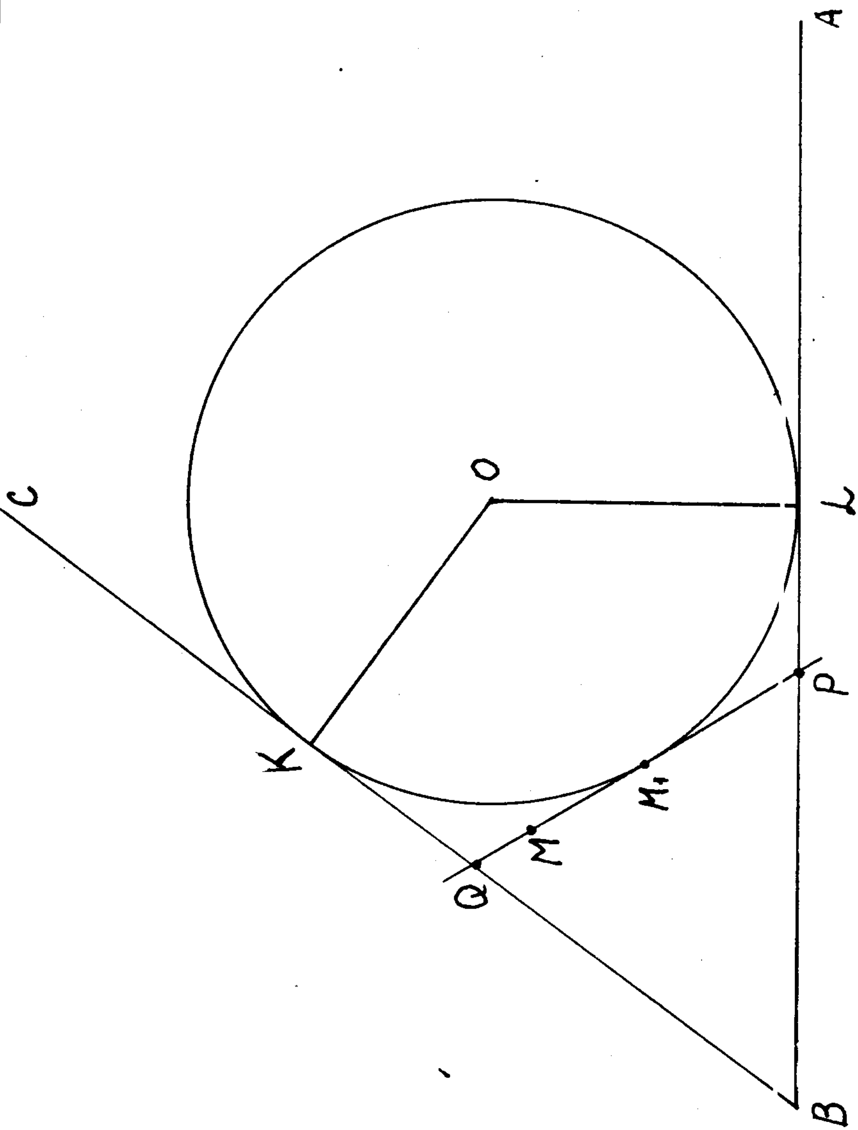

Рис. 5

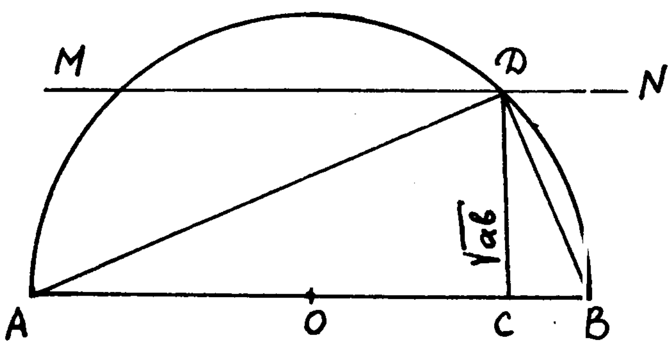

Рис. 6

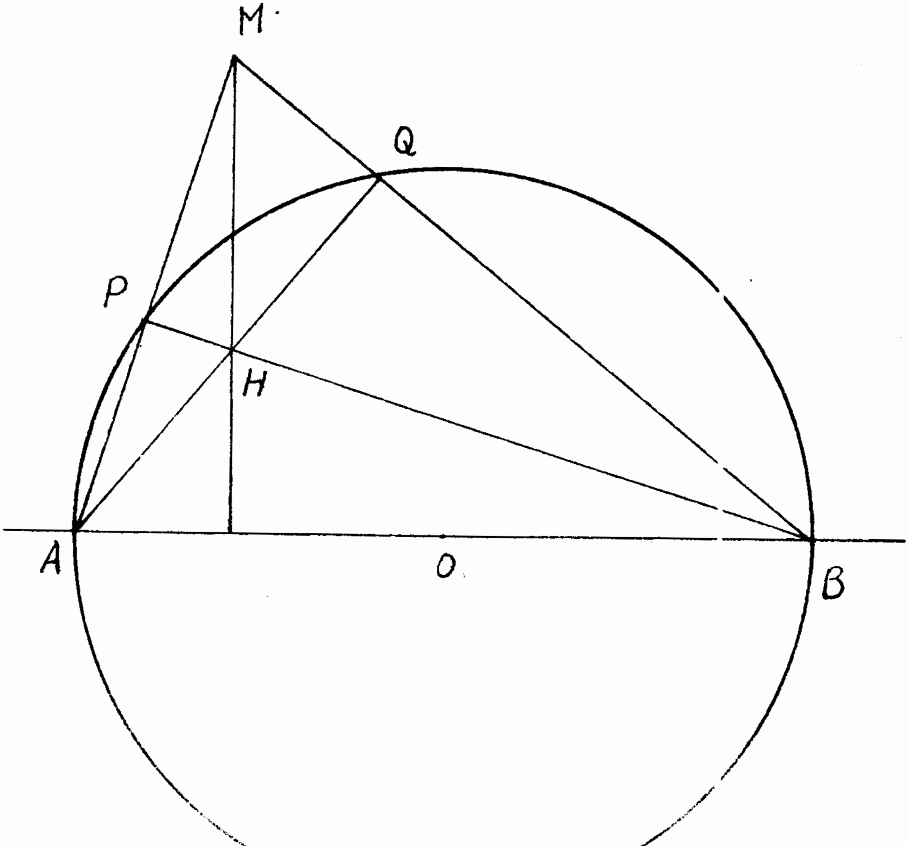

Рис. 7

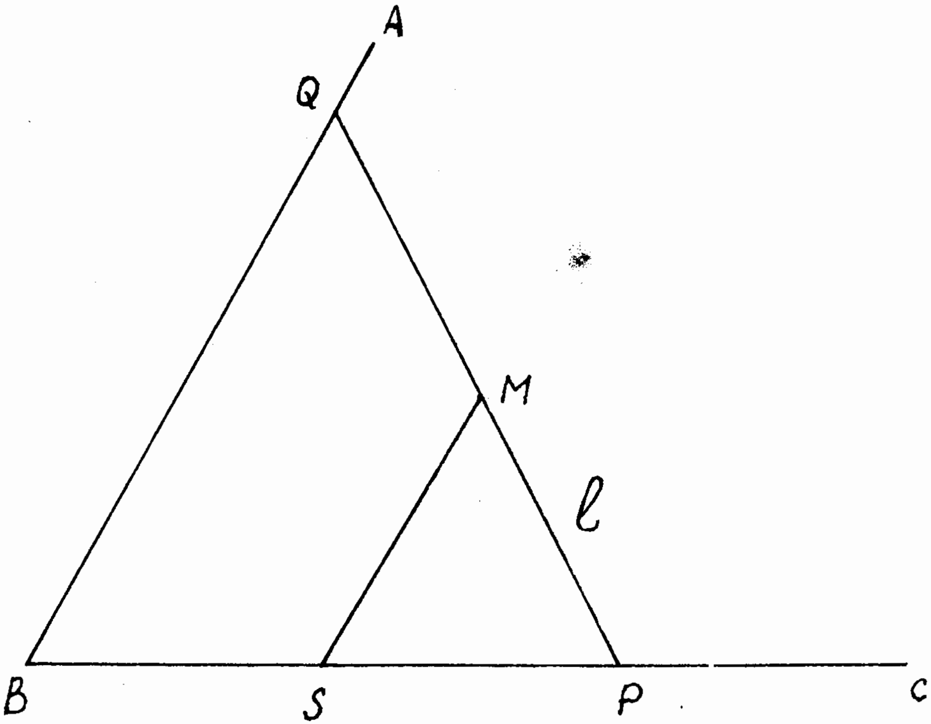

Рис. 8

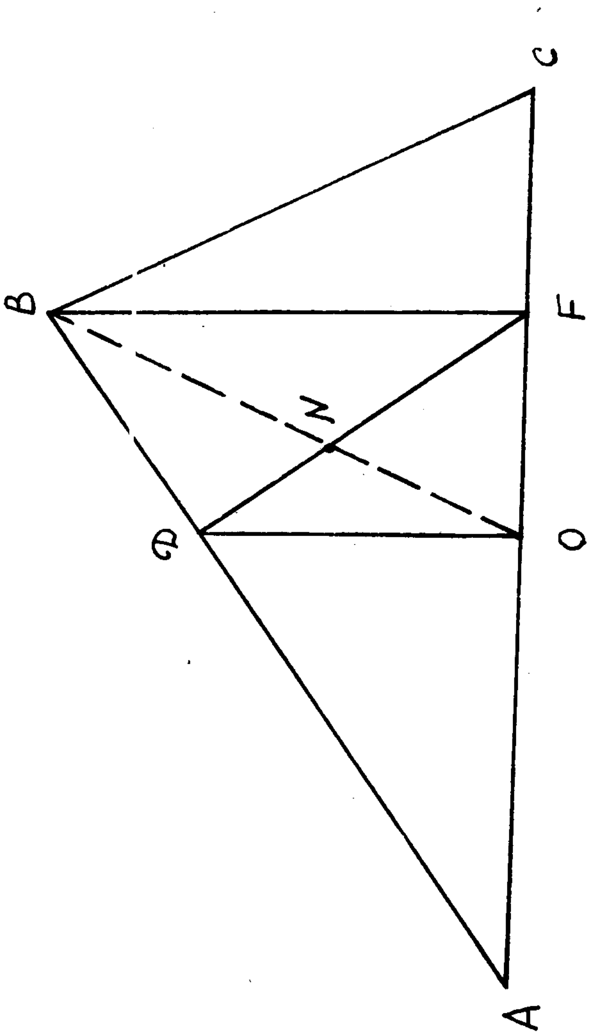

Рис. 9

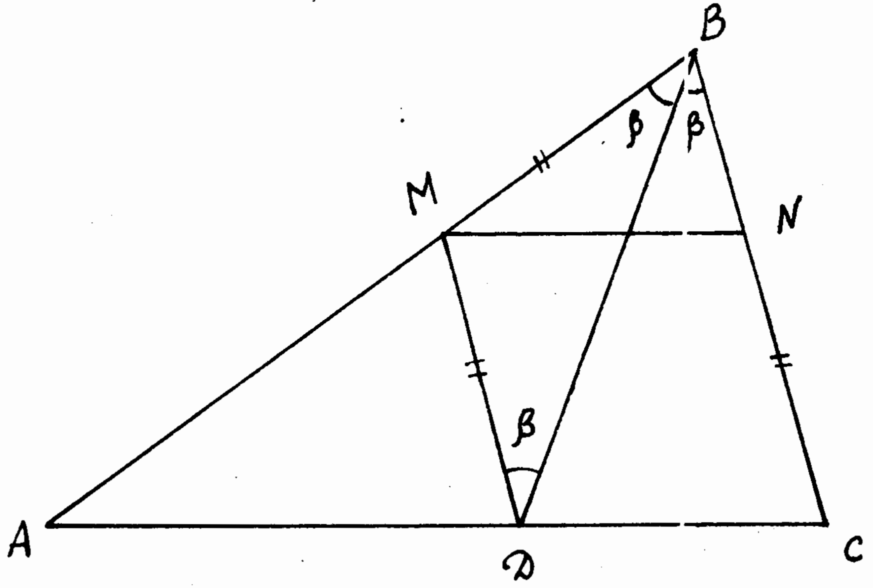

Рис. 10

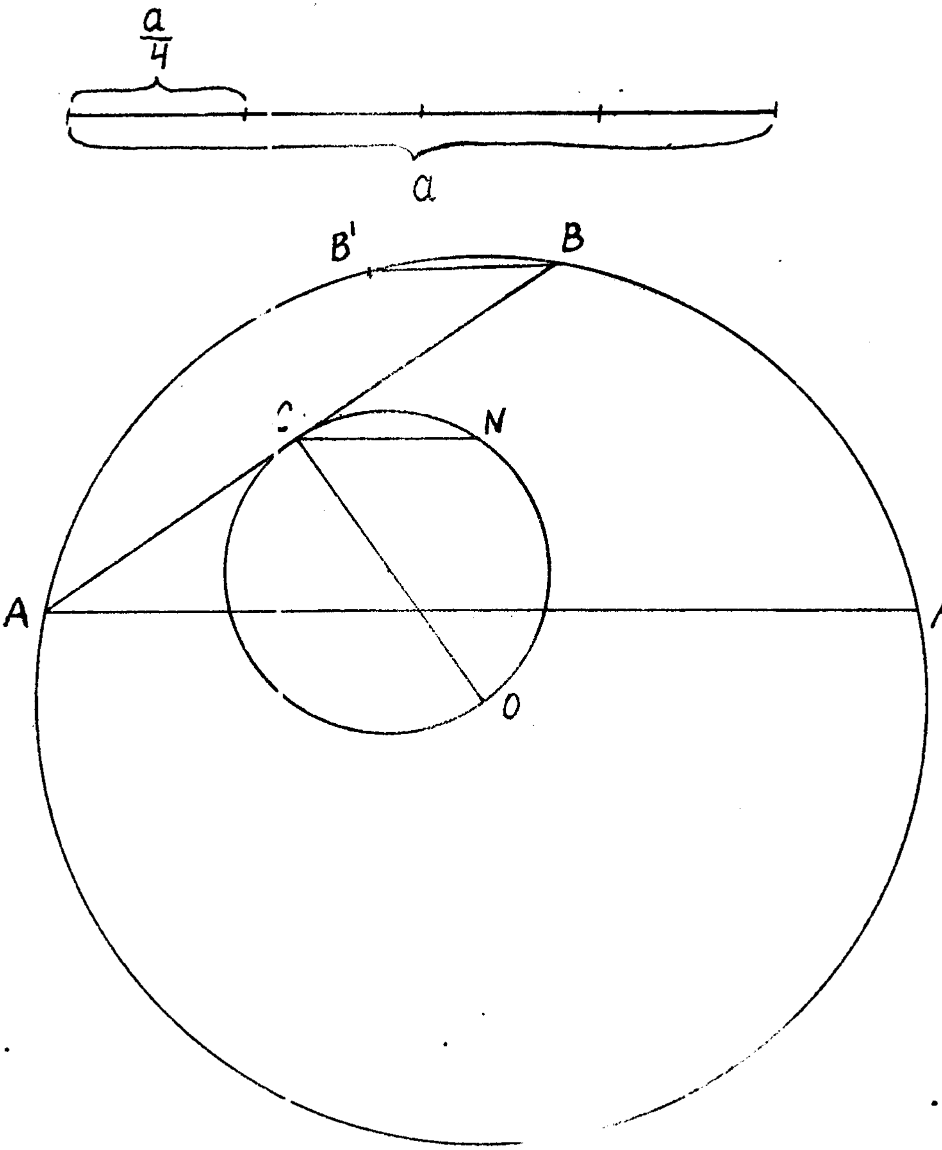

Рис.

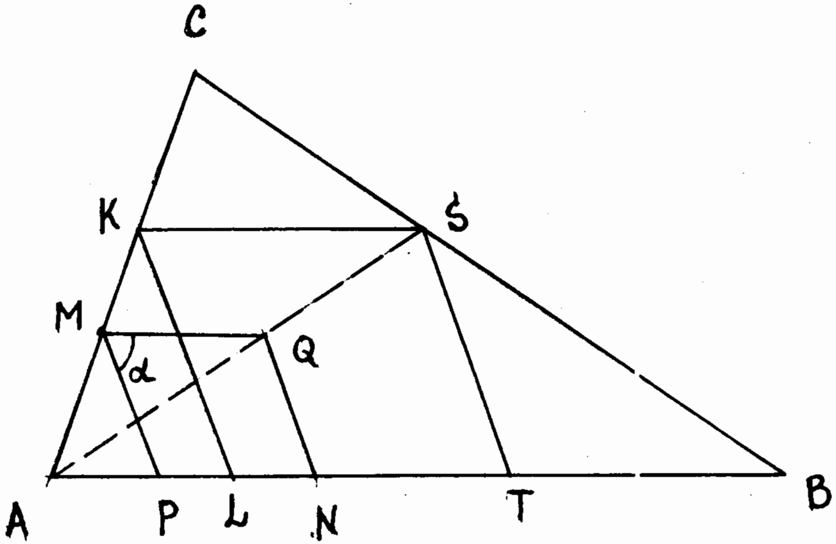

Рис. 12

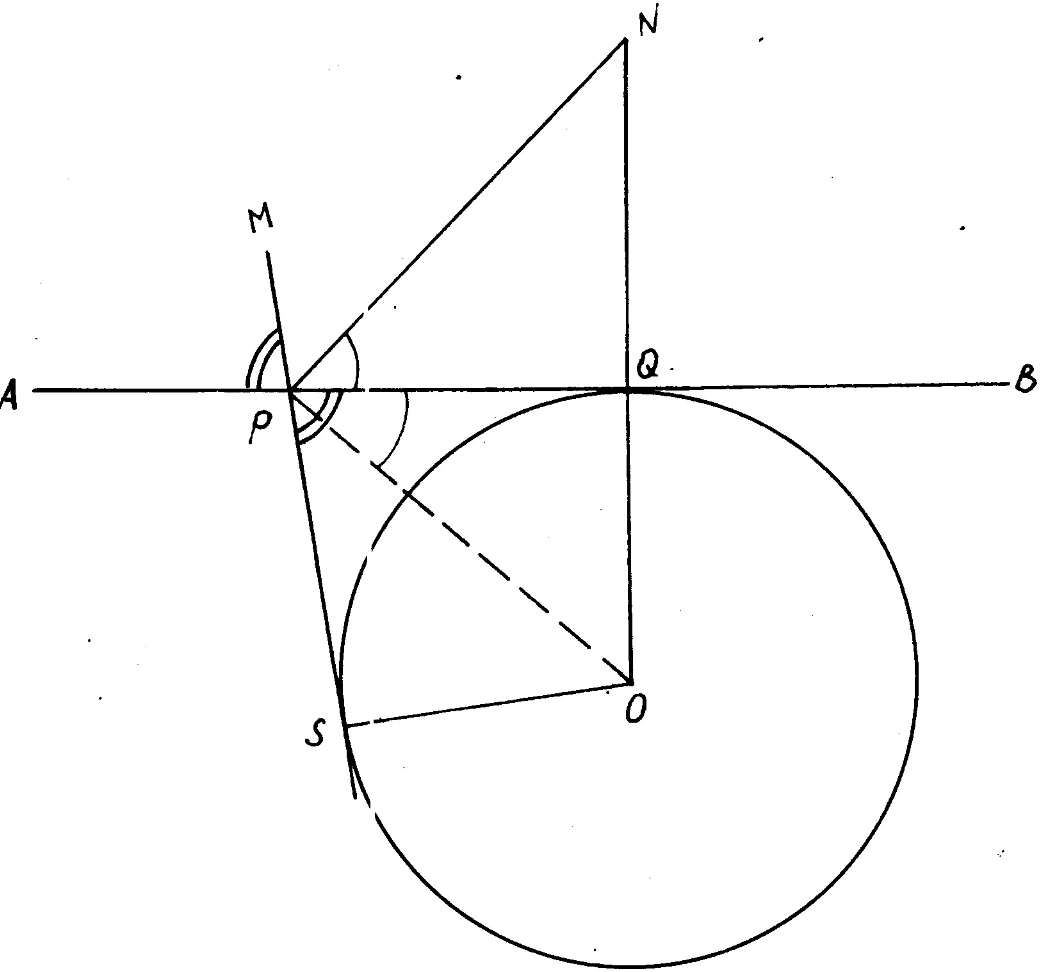

Рис. 13

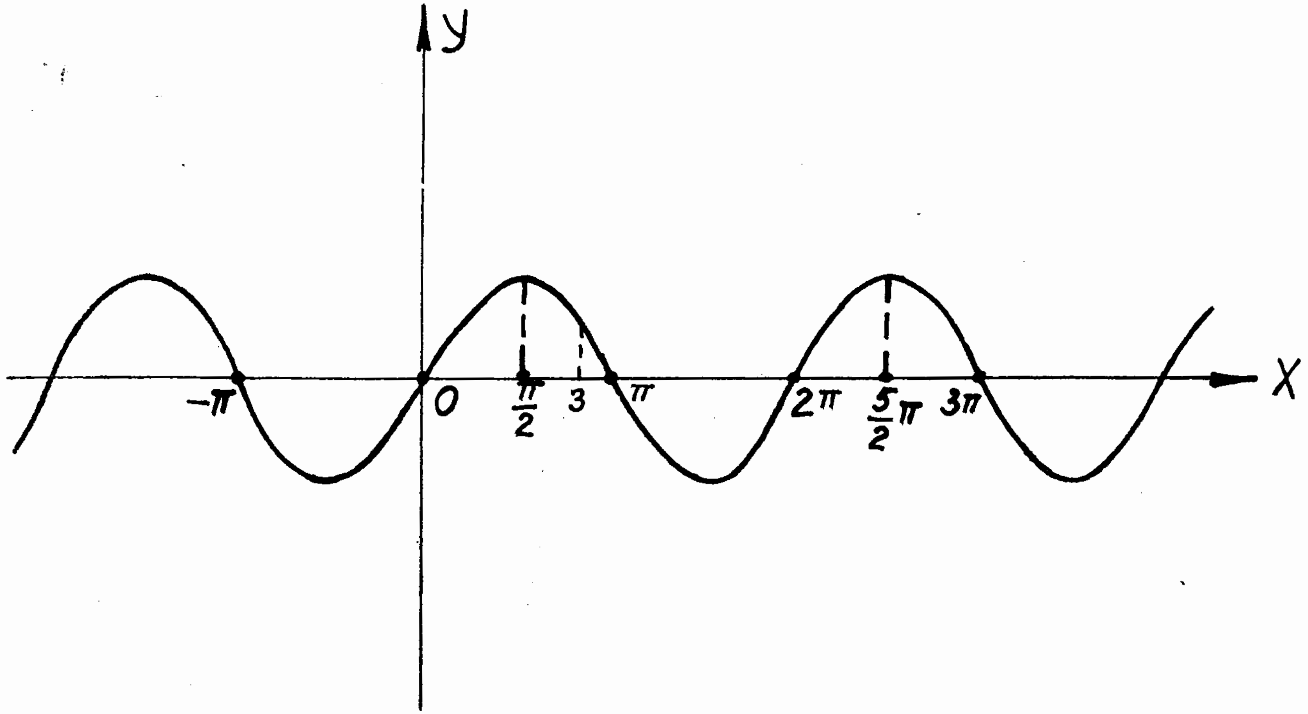

Рис. 15

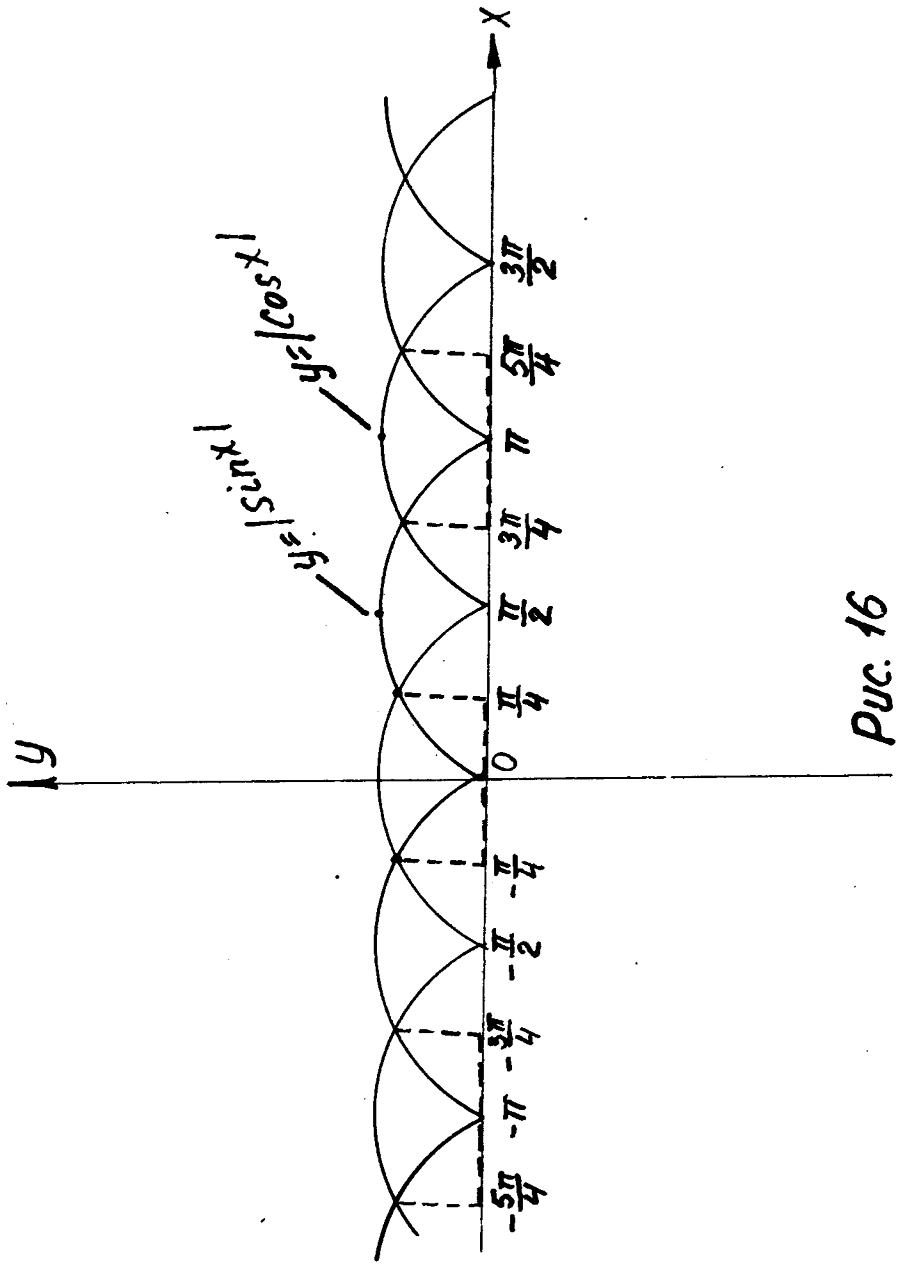

Рис. 16

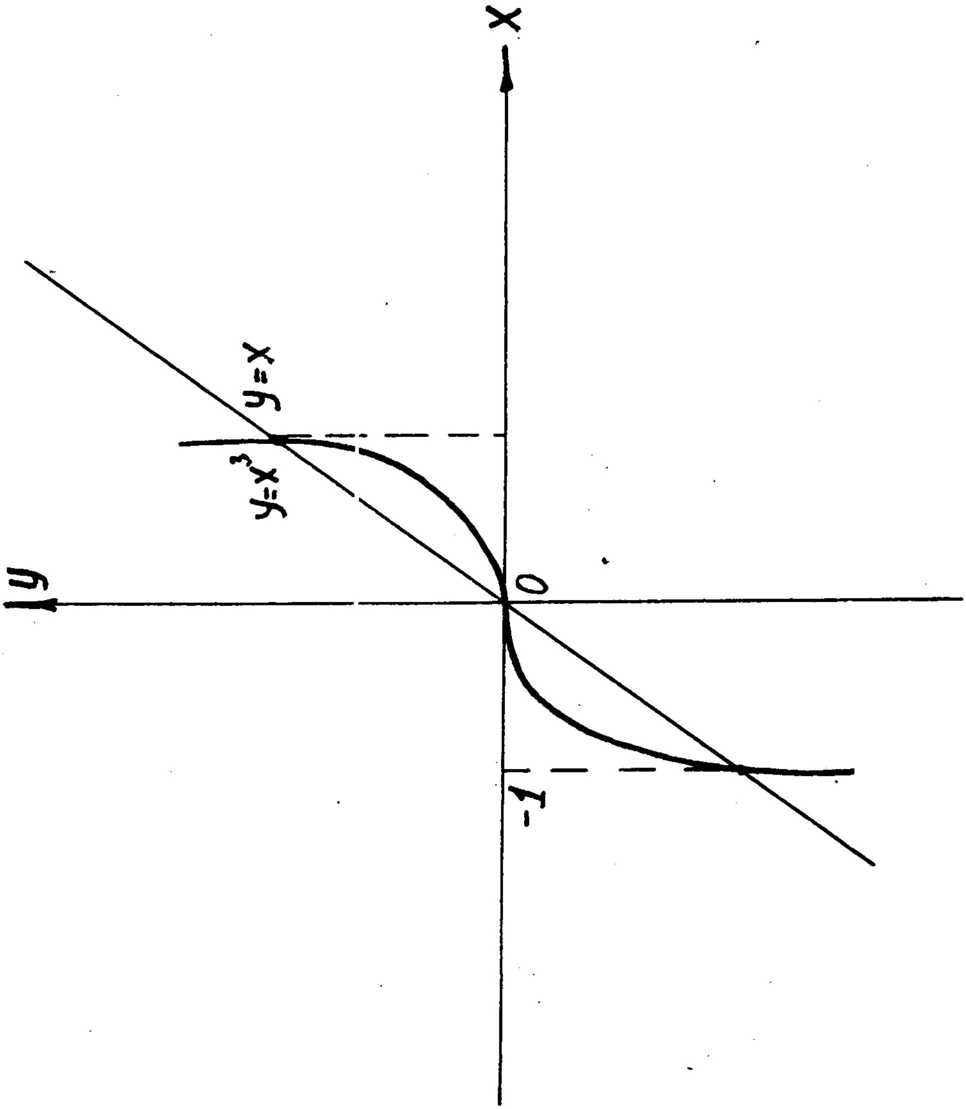

Рис. 17.

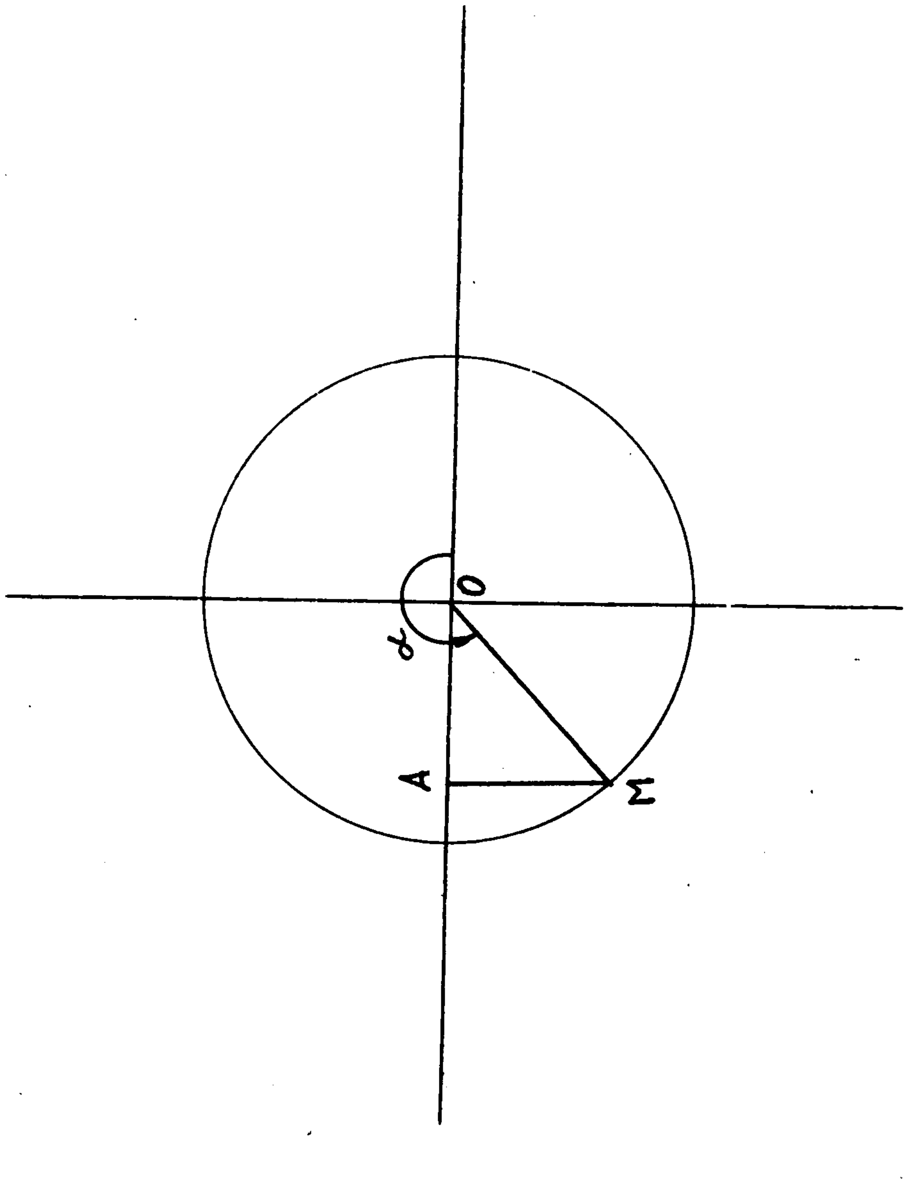

Рис. 18

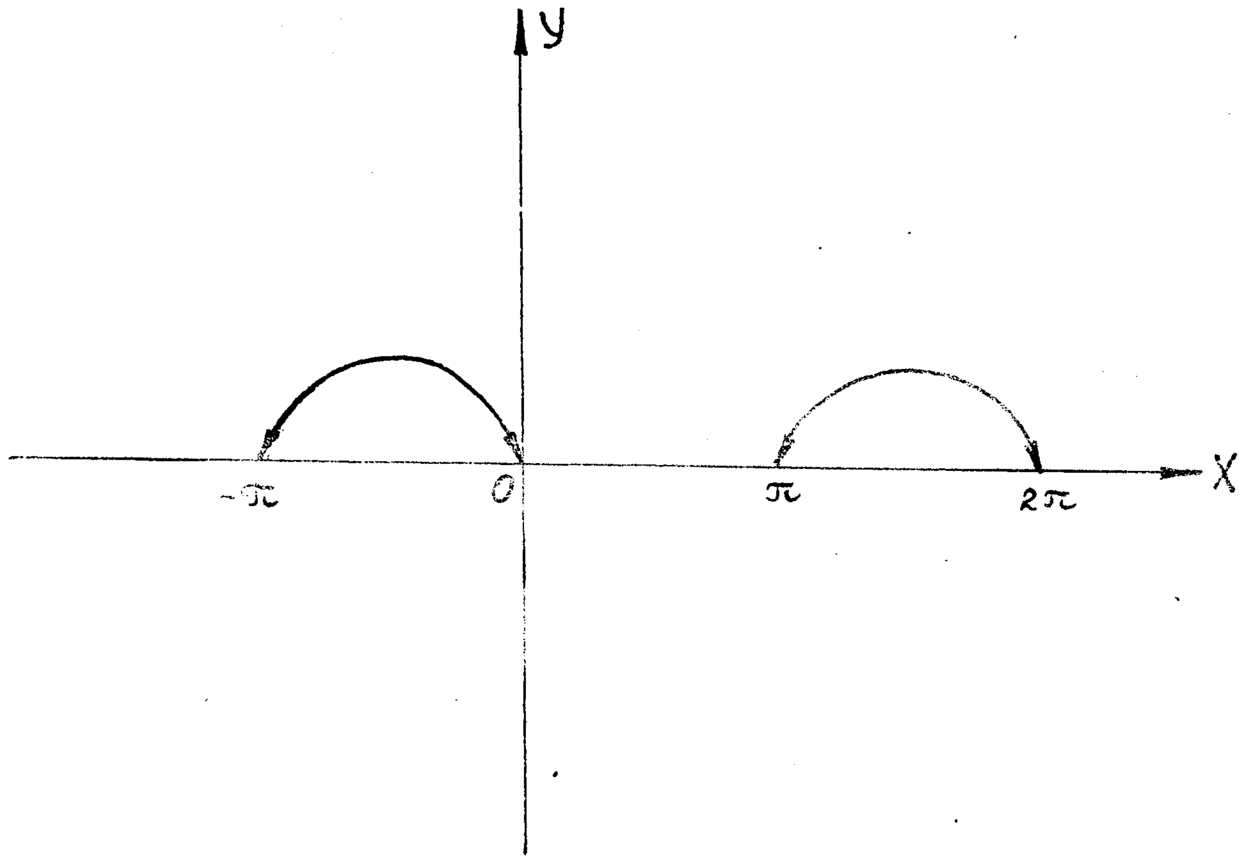

Рис. 19

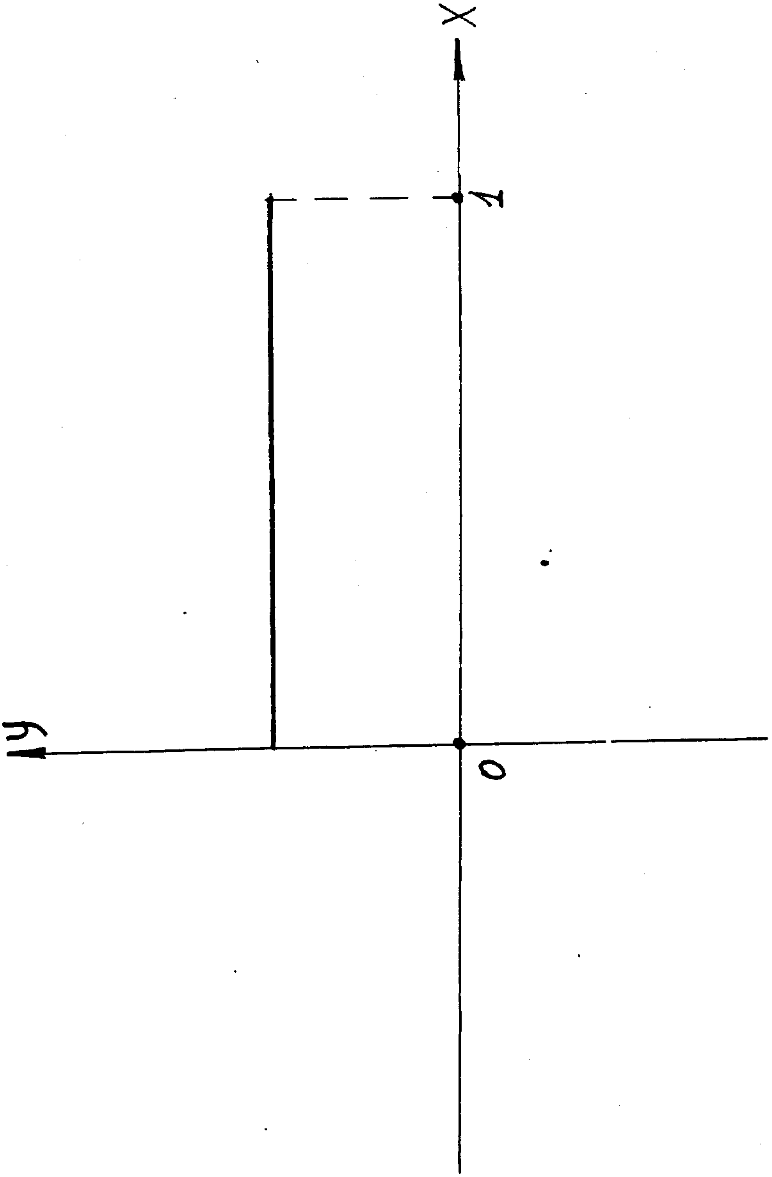

Рис. 20

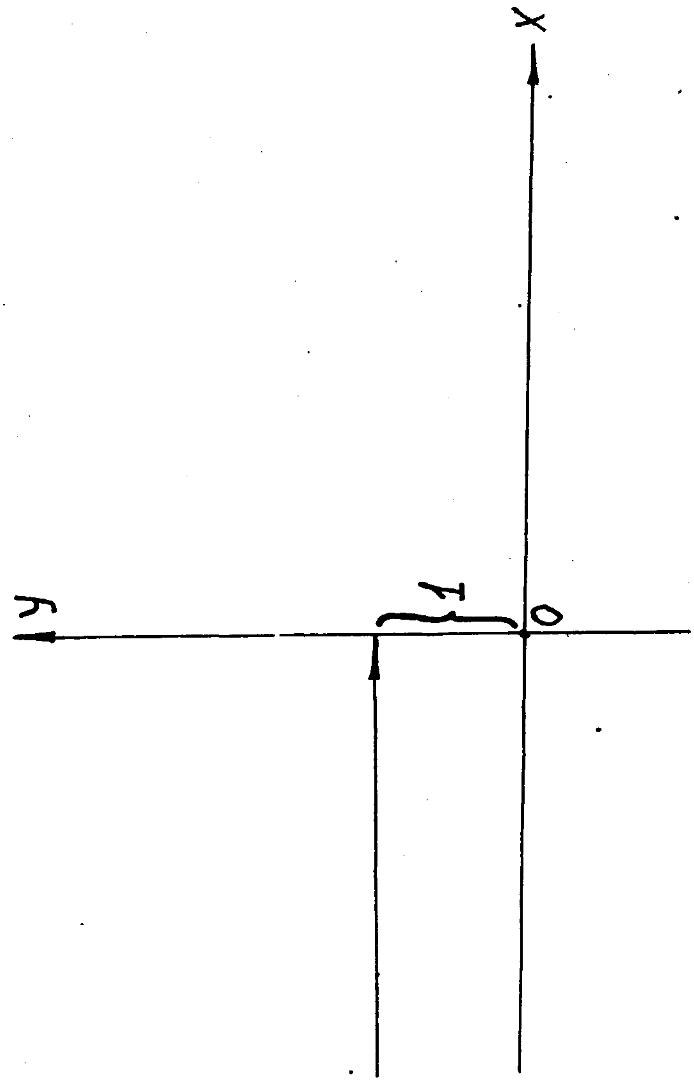

Рис. 21

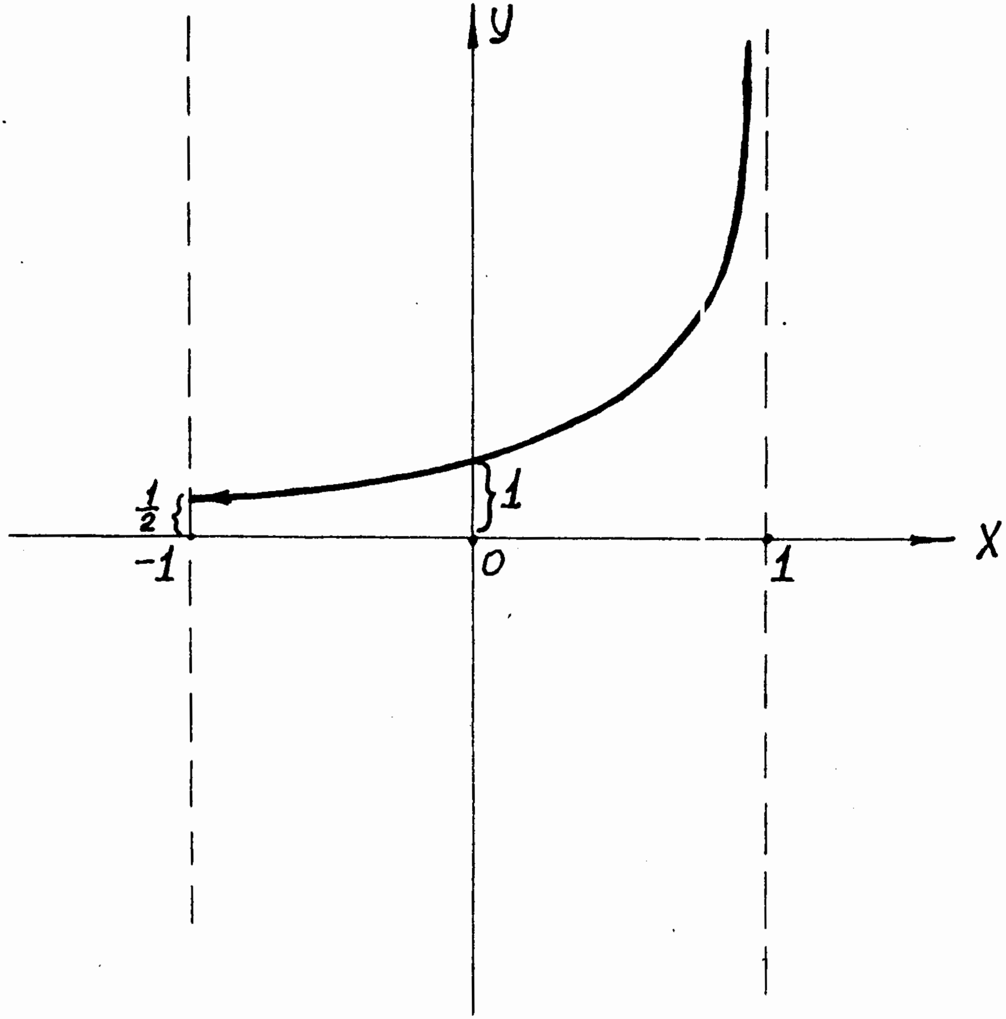

Рис. 22

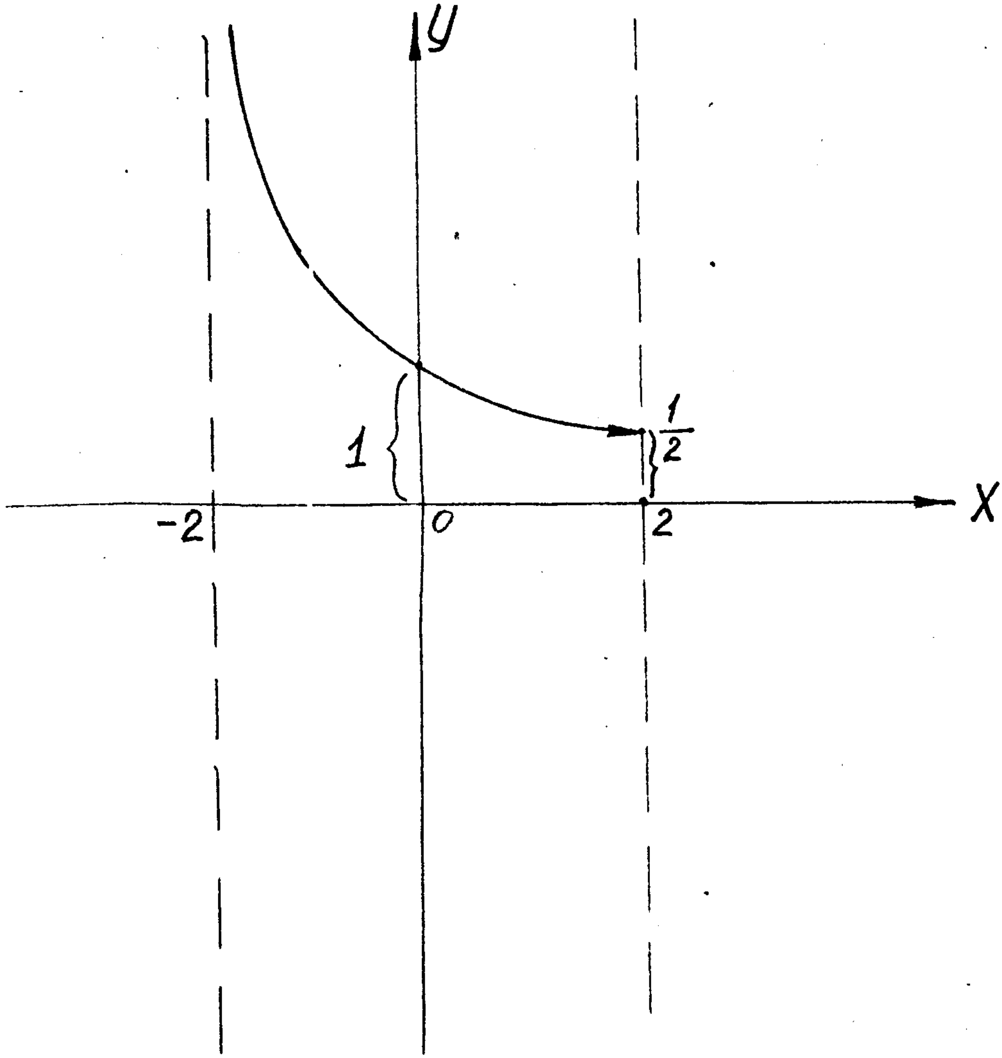

Рис. 23

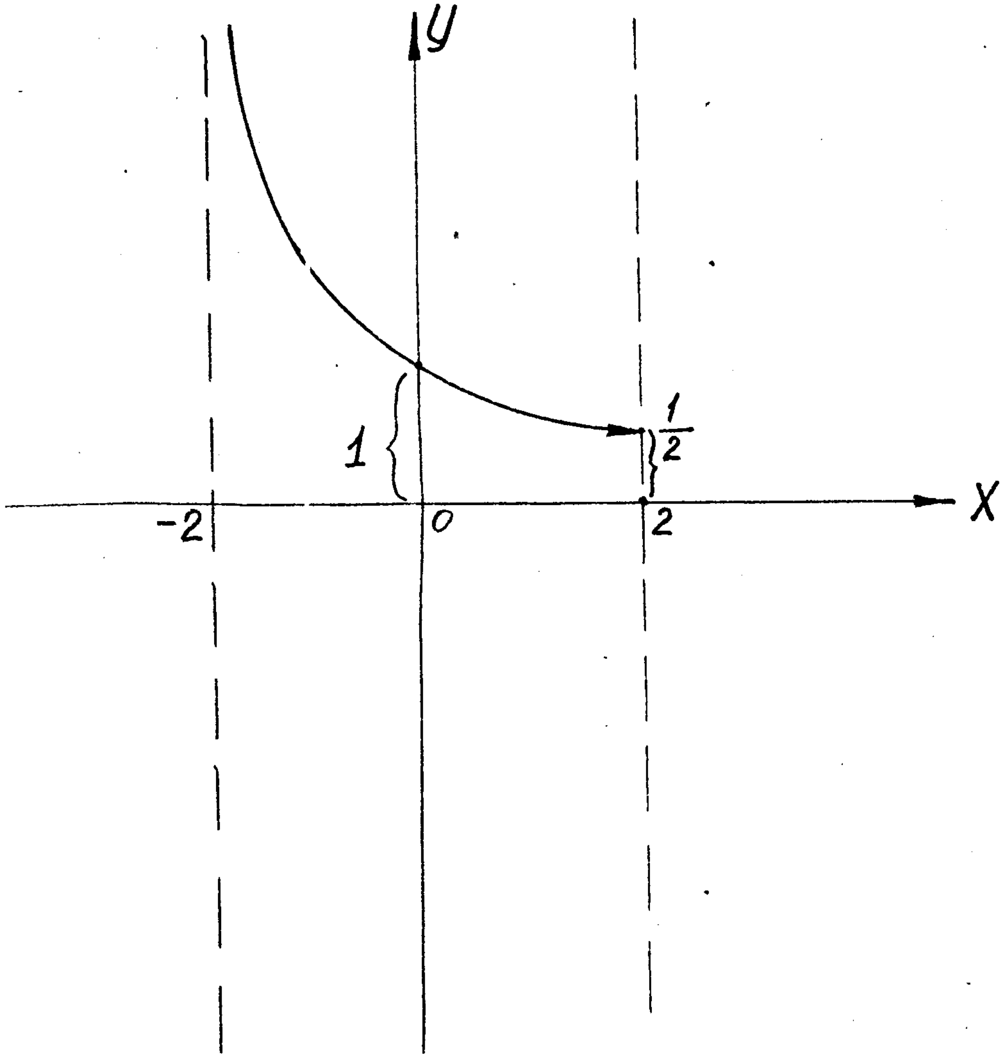

Рис. 23

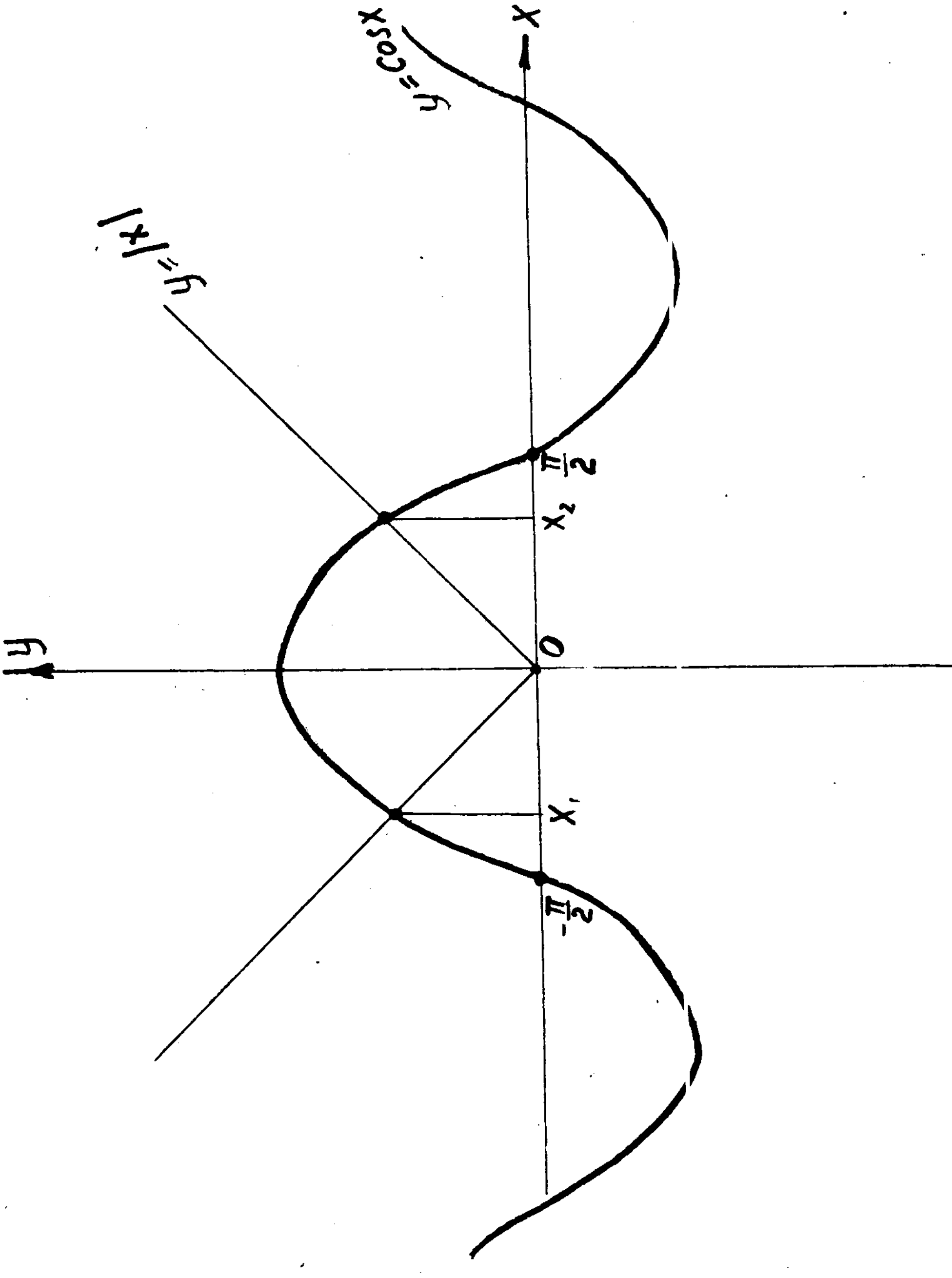

Рис. 24

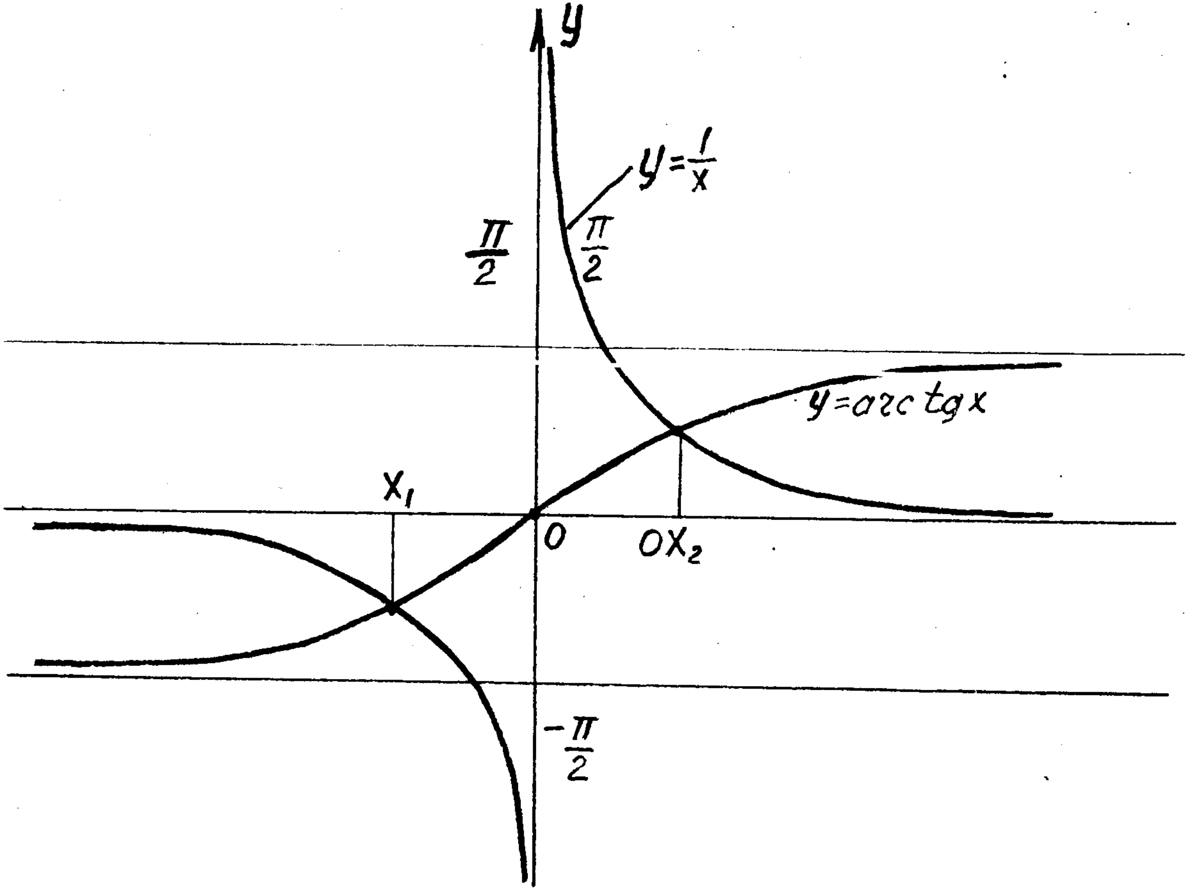

Рис. 25

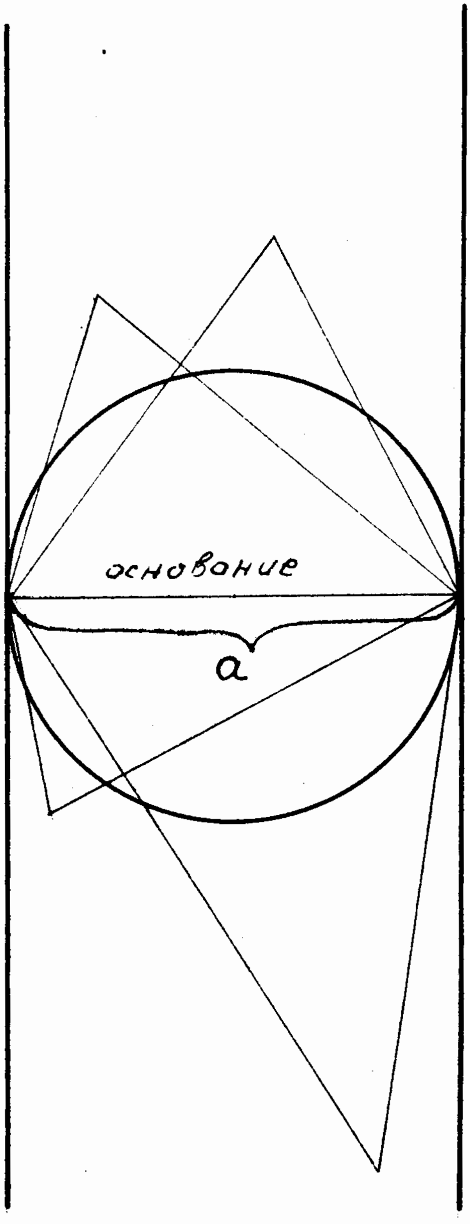

Рис. 26

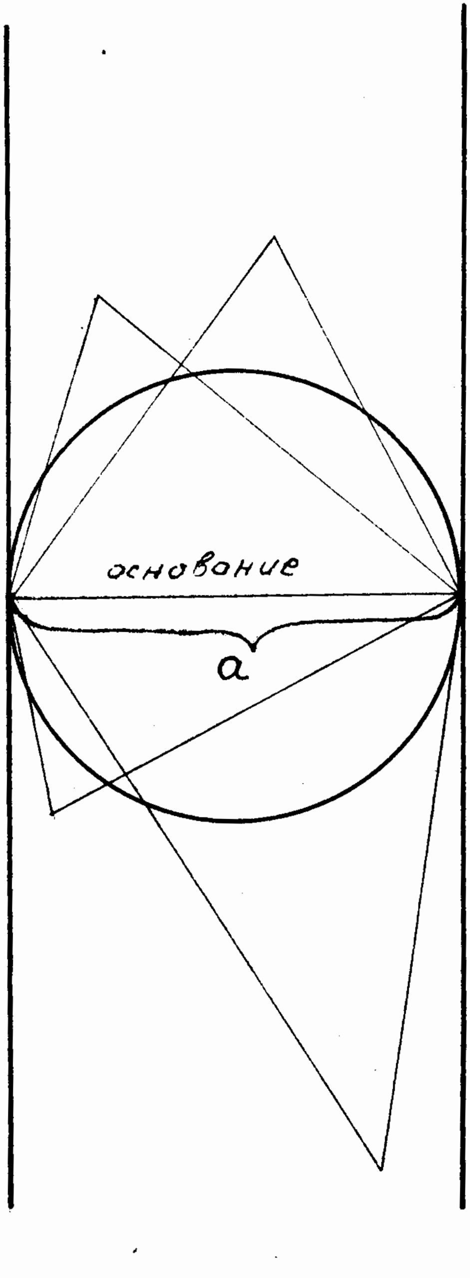

Рис. 26

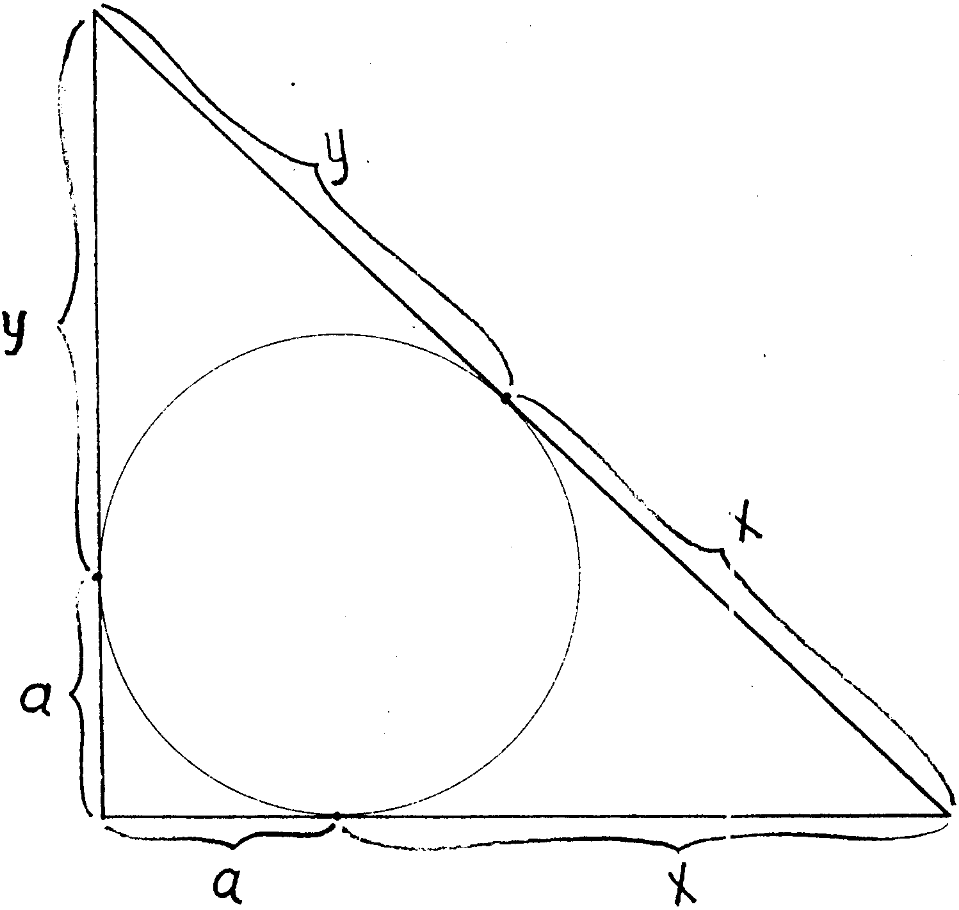

Рис. 27