ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

5 - 3398

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев

О СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1967.

5 - 3398

М.Л. Краснов,* Г.И. Макаренко, А.И. Киселев *

О СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

I

---

* Московский энергетический институт

В прямоугольнике $D : \begin{cases} 0 \le t \le T \\ 0 < x \le 1 \end{cases}$; рассматривается смешанная краевая задача для квазилинейного параболического уравнения второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\alpha} (1 + u^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = h(x, t). \qquad (1)$$

$$(\alpha > 0)$$

Решение будем искать в классе $H_{\alpha}(D)$ функций $u(x, t)$, имеющих конечный интеграл

$$\iint_D x^{\alpha} (1 + u^2) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx\, dt < +\infty . \qquad (2)$$

Справедлива следующая <u>т е о р е м а   в л о ж е н и я:</u>

а) Если $0 < \alpha < 1$, то любая функция $u(x, t) \in H_{\alpha}(D) \cap \overset{\circ}{C}{}^{(1)}[0,1]$ принимает в среднем в смысле $\mathfrak{L}_4(D)$ значение нуль при $x = 0$.

б) Если $\alpha \ge 1$, то любая функция $u(x, t)$, имеющая ограниченные кусочно-непрерывные первые производные в D и обращающаяся в нуль при значении $x = 1$, причём

$$|u| \le C^2 x^{\frac{1-\alpha}{4}} \qquad \text{при} \quad \alpha > 1 ,$$

$$|u| \le C \, |\ln x|^{\frac{\alpha}{4}} \qquad \text{при} \quad \alpha = 1 ,$$

принадлежит $H_{\alpha}(D)$.

в) Для функции $u(x,t) \in H_\alpha(D)$ справедлива оценка

$$\iint_D \sigma(x) u^4(x,t)\,dx\,dt \le C_1^2 \iint_D x^\alpha (1+u^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\,dt, \tag{3}$$

где C_1^2 не зависит от $u(x,t)$; $\sigma(x)$ –достаточно гладкая функция $\sigma(x) > 0$, $x > 0$;

$$\sigma(x) = \begin{cases} x^{\alpha-2}\,|\ln x|^{-1-\epsilon_0}, & \text{если } \alpha \neq 1 \quad (\epsilon_0 > 0), \\ x^{-1}|\ln x|^{-2-\epsilon_0}, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases} \tag{4}$$

Отсюда следует, что в случае $\alpha \ge 1$ в $H_\alpha(D)$ входят функции, стремящиеся к бесконечности при $x \to 0$, а также функции, принимающие при $x = 0$ любые наперед заданные значения.

<u>Д о к а з а т е л ь с т в о.</u> Пусть $\alpha < 1$. Тогда

$$u^4(x,t) = \left(\int_0^x \frac{\partial u^2}{\partial x} dx\right)^2 =$$

$$= 4\left(\int_0^x x^{-\frac{\alpha}{2}}\left(x^{\frac{\alpha}{2}} u \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\right)^2 .$$

Применяя неравенство Буняковского, получим

$$u^4(x,t) \le C x^{1-\alpha} \int_0^1 x^\alpha u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx . \tag{5}$$

Проинтегрируем (5) по любому сечению области $D\{0 < x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ линией $x = h$ по t от 0 до T:

$$\int_0^T u^4(h,t)\,dt < C h^{1-\alpha} \iint_D x^\alpha u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\,dt. \tag{6}$$

Из (6) видно, что

$$\lim_{h\to 0}\int_0^T u^4(h,t)\,dt = 0, \tag{7}$$

т.е. в случае $\alpha < 1$ функция $u(x,t)$ принимает в среднем в смысле $\mathfrak{L}_4$ нулевые граничные значения при $x = 0$. Умножая обе части (5) на $x^{\alpha-2}|\ln x|^{-1-\varepsilon_0}$ и интегрируя по области

$$D_\delta \{0 < x < 1-\delta, (\delta > 0);\ 0 \le t \le T\},$$

получим

$$\iint_{D_\delta} \sigma(x)\,u^4(x,t)\,dx\,dt \le C \iint_{D_\delta} x^\alpha u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\,dt,$$

где $C = \mathrm{const}$.

Аналогично доказывается (3) и при $\alpha \ge 1$.

Для уравнения (1) в прямоугольнике D ставится краевая задача: найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) из $H_\alpha(D)$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = 0 \quad (\text{в смысле } \mathfrak{L}_2) \tag{8}$$

и краевому условию

$$u(1,t) = 0 \quad (\text{в смысле } \mathfrak{L}_4). \tag{9}$$

Причём, поскольку из $u(x,t) \in H_\alpha(D)$ при $\alpha \ge 1$ не следует обращения $u(x,t)$ в нуль при $x = 0$, то естественно при $\alpha \ge 1$ на границе $x = 0$ не задавать граничных условий. При $\alpha < 1$ задается граничное условие

$$u(0,t) = 0 \quad (\text{в смысле } \mathfrak{L}_4). \tag{10}$$

При этом под решением (обобщенным) такой краевой задачи мы понимаем функцию $u(x,t) \in H_\alpha(D)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\iint_D x^{\alpha}(1+u^2)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dt-\iint_D u(x,t)\frac{\partial v}{\partial t}\,dx\,dt= \tag{11}$$

$$=\iint_D h(x,t)\,v(x,t)\,dx\,dt,$$

где $v(x,t)\in C^{(1)}(D)$ обращается в нуль в граничной полоске вблизи $x=0$; $v\big|_{x=1}=0$, $v\big|_{t=T}=0$.

Теорема существования решения

Если функция $h(x,t)$ такова, что

$$\int_0^T \| h(x,t)\|_x\,dt<+\infty, \tag{12}$$

где

$$\| h(x,t)\|_x=\Big[\int_0^1 h^2(\,,t)\,dx\Big]^{1/2}, \tag{13}$$

то существует по крайней мере одно слабое решение задачи (1), (8)-(10).
Для доказательства применяется метод Галеркина, в силу которого приближенное решение задачи ищется в виде

$$u_n(x,t)=\sum_{k=1}^{n} c_k(t)\,z_k(x), \tag{14}$$

где $c_k(t)$ -неизвестные функции, а $\{z_k(x)\}$ образуют ортонормированную на отрезке $[0,1]$ систему функций, полную в пространстве $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[0,1]$; $z_k(0)=z_k(1)=0$ $(k=1,\dots,n)$.

Функции $c_k(t)$ $(k=1,\dots,n)$ определяются из "моментных" уравнений

$$\int_0^1 \frac{\partial u_n}{\partial t}z_j(x)\,dx+\int_0^1 x^{\alpha}(1+u_n^2)\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{dz_j}{dx}\,dx= \tag{15}$$

$$=\int_0^1 h(x,t)\,z_j(x)\,dx,\qquad (j=1,\dots,n).$$

Система (15) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейных относительно $c_j(t)$, которую можно записать в виде

$$c_j'(t) + F_j(c_1, c_2, \dots, c_n) = h_j(t),$$
$$h_j(t) = \int_0^1 h(x,t) z_j(x) dx, \qquad (16)$$

причём в силу условия (8):

$$c_j(0) = 0, \quad (j = 1, \dots, n). \qquad (17)$$

Система (16) при начальных условиях (17) однозначно разрешима для достаточно малых t .

Можно показать, что решение этой системы ограничено на любом отрезке $[0, T]$, а следовательно, это решение существует на всем отрезке $[0, T]$.

Устанавливается, что нормы

$$\| u_n(x,t) \|_{\mathfrak{L}_2(D)}, \quad \| x^{\frac{a}{2}} u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} \|_{\mathfrak{L}_2(D)}$$

и $\| x^{\frac{a}{2}} \frac{\partial u_n}{\partial x} \|_{\mathfrak{L}_2(D)}$ равномерно ограничены по n , а поэтому можно выбрать подпоследовательность $\{ u_{n_\ell}(x,t) \}$, слабо сходящуюся к некоторой функции $u(x,t)$.

Доказывается, что семейство функций $\{ c_n(t) \}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно по t на отрезке $[0,T]$. Следовательно, можно выделить подпоследовательность n_k такую, что функции $c_{n_k}(t)$ будут сходиться равномерно на $[0,T]$. Таким образом, $\{ u_{n_k}(x,t) \}$ будет сходиться слабо в $\mathfrak{L}_2(D)$ равномерно относительно $t \in [0,T]$.

Далее доказывается сильная сходимость $u_{n_k}(x,t)$ в $\mathfrak{L}_2(D)$, причём используется равномерная ограниченность интегралов

$$\iint_{D_{\delta_0}} \left(\frac{\partial u_{n_k}}{\partial x} \right)^2 dx\, dt \le M$$

в любой подобласти $D_{\delta_0} = D \cap (x > \delta_0 > 0)$ и неравенство Фридрихса (см. /5/):

$$\int_0^1 w^2(x)\, dx < \sum_{j=1}^{N(\epsilon)} \left(\int_0^1 w\, \omega_j\, dx \right)^2 + \epsilon \int_0^1 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx.$$

В силу этого $\int_0^T \| u_{n_k} - u_{m_k} \|^2 dt \to 0$ при $k \to \infty$.

Так построенное приближенное решение является обобщенным, т.е. удовлетворяет интегральному тождеству (11). В самом деле, из "моментных" уравнений для любой фиксированной функции $v_k(x,t)$ имеем

$$- \iint_D u_n \frac{\partial v_k}{\partial t} dx\,dt + \iint_D x^\alpha \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial v_k}{\partial x} dx\,dt +$$

$$+ \iint_D x^\alpha u_n u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial v_k}{\partial x} dx\,dt = \iint_D h v_k \,dx\,dt. \qquad (18)$$

Перейдём в (18) к пределу при $n \to \infty$ (k-фиксировано). Предельный переход в линейных членах очевиден. Что касается нелинейного слагаемого, то в силу сказанного выше, $u_n(x,t)$ сходятся сильно, а значит, почти всюду. Произведение $u_n \frac{\partial u_n}{\partial x}$ сходится слабо. Следовательно, произведение $u_n(u_n \frac{\partial u_n}{\partial x})$ сходится слабо.

Совершая затем предельный переход при $k \to \infty$, убеждаемся в том, что функция $u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t)$ есть обобщенное решение поставленной задачи.

Изложенный метод без всяких изменений переносится на случай уравнения с любым числом пространственных переменных.

Литература

1. М.И.Вишик. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. Мат. сб., т.35(77), №3(1954), 513–568.
2. М.И.Вишик. О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков. Мат. сб., т. 59(101) (дополнительный) (1962), 289–325.

3. Ю.А.Дубинский. Некоторые интегральные неравенства и разрешимость вырождающихся квазилинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений. Мат. сб., т. 64(106): 3(1964), 458–480.
4. Ю.А.Дубинский. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях. Мат. сб., т.67(109): 4(1965), 609–642.
5. Р.Курант и Д.Гильберт. Методы математической физики, т. II. ГИТТЛ, 1951.
6. М.Л.Краснов. Об одной краевой задаче для квазилинейного параболического уравнения, вырождающегося при $t = 0$. Труды МЭИ. Вып. 42(математика) (1962), 63–74.
7. М.Л.Краснов. Квазилинейные параболические уравнения, вырождающиеся на границе области. Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1964–1965 г.г., серия математическая. МЭИ, 1965 г, 120–128.
8. О.А.Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физматгиз, 1961.
9. Г.И.Макаренко. Краевые задачи для вырождающихся параболических уравнений. Труды МЭИ, вып. XXУШ (1956), 5–24.
10. С.Л.Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, Ленинград, 1950.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 июня 1967 г.