ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

5 - 3368

Е.П. Жидков, И.В. Пузынин

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ СТАБИЛИЗАЦИИ ПО ПАРАМЕТРУ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

1967.

5 - 3368

Е.П. Жидков, И.В. Пузынин

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ СТАБИЛИЗАЦИИ ПО ПАРАМЕТРУ

Рассматривается приближенный метод нахождения решений обыкновенного дифференциального уравнения

$$f(x, y, y', y'') = 0, \tag{0.1}$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= \gamma, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= \delta. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Здесь α_1, β_1, γ, α_2, β_2, δ – заданные числа, причем $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i = 1,2$. Предполагается, что граничная задача (0.1)-(0.2) имеет хотя бы одно решение. Для приближенного решения задачи (0.1)-(0.2) применяется непрерывный аналог метода Ньютона.

В работе[1] этот метод применен для исследования существования решений нелинейных функциональных уравнений в банаховом пространстве. В наших работах[2,3] данный метод применен при приближенном решении некоторой граничной задачи для нелинейного дифференциального уравнения 2-го порядка при условии существования решений. На возможность приближенного решения нелинейных граничных задач с помощью названного метода указано также в[4].

В разделе I настоящей работы приведена теорема о применимости непрерывного аналога метода Ньютона для решения нелинейного функционального уравнения в пространстве Банаха при условии существования решения. Здесь же рассмотрен приближенный метод нахождения этого решения.

В разделе II рассмотрен метод приближенного решения краевой задачи (0.1)-(0.2) и приведен один из возможных алгоритмов численного решения этой задачи.

1. Пусть $\phi(x)$ -непрерывная функция, отображающая банахово пространство X в банахово пространство Y. Рассмотрим уравнение

$$\phi(x) = 0 . \tag{1.1}$$

1. Теорема 1. Пусть уравнение (1.1) имеет единственное решение x^* в открытой области D пространства X. Предположим, что в области D существуют непрерывные производные Фреше $\phi'(x), \phi''(x)$. Пусть, далее, в D существует обратный оператор $\phi'(x)^{-1}$, для которого выполняется неравенство

$$\| \phi'(x)^{-1} \| \leq B . \tag{1.2}$$

Тогда существует сфера $S: \| x - x^* \| \leq \epsilon$, принадлежащая области D, такая что для любого $x_0 \in S$ дифференциальное уравнение

$$x'_t = -\phi'(x)^{-1}\phi(x), \tag{1.3}$$

где t -вещественный параметр, с начальным условием

$$x(0) = x_0 \tag{1.4}$$

имеет решение $x(t)$ для $0 \leq t < \infty$ и $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$.

Доказательство. В силу соотношения

$$\lim_{x\to x^*} \| \phi(x) \| = 0$$

можно выбрать такое $\epsilon > 0$, что для любого $x_0 \in S : \| x - x^* \| \leq \epsilon$ будет выполняться неравенство

$$\| \phi(x_0) \| < \delta ,$$

где $\delta > 0$ достаточно мало, а $S \subset D$. Выберем δ столь малым, что сфера $R : \| x - x_0 \| \leq B\delta$ будет принадлежать D для любого $x_0 \in S$.

В сфере R правая часть уравнения (1.3) имеет непрерывную производную. Поэтому на достаточно малом отрезке изменения параметра $t[0,\sigma]$ существует единственное решение уравнения (1.3), удовлетворяющее начальному условию (1.4)[5]. Заметим, что уравнение (1.3) с начальным условием (1.4) имеет интеграл

$$\phi(x) = \phi(x_0) e^{-t} , \tag{1.5}$$

откуда следует, что

$$x'_t = -\phi'(x)^{-1}\phi(x_0) e^{-t} . \tag{1.6}$$

Интегрируя последнее соотношение и оценивая по норме, легко получить

$$\| x(t) - x_0 \| = \| \int_0^t x'_t(s)\, ds \| \leq \int_0^t \| x'_t(s) \| \, ds \leq B\delta(1 - e^{-t}) . \tag{1.7}$$

Это неравенство показывает, что $x(t)$ лежит в сфере R для всех t, при которых оно определено. Следовательно, оно продолжаемо на весь промежуток $0 \leq t < \infty$.

Из соотношения (1.7) легко следует, что интеграл $\int_0^\infty \| x'_t(s) \| \, ds$ является сходящимся. Это, в свою очередь, влечет существование $\lim_{t\to\infty} x(t)$. Воспользовавшись равенством (1.5), получаем $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$. Теорема доказана.

2. Рассмотрим метод Эйлера приближенного интегрирования дифференциальных уравнений типа (1.3) в пространстве Банаха.

Пусть X -пространство Банаха, $\psi(x)$ -функция, переводящая X в себя. Предположим, что в некоторой открытой области $D \subset X$.

$$\| \psi(x) \| \leq M \tag{1.8}$$

и $\psi(x)$ в D удовлетворяет условию Липшица, то есть для любых $x', x'' \in D$

$$\| \psi(x') - \psi(x'') \| \leq L \| x' - x'' \| . \tag{1.9}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x'_t = \psi(x), \qquad x(0) = x_0, \quad x_0 \in D, \tag{1.10}$$

где t – вещественный параметр. На некотором интервале изменения t, $0 \le t \le \sigma$ существует единственное решение уравнения (1.10), принадлежащее области D /5/. Разобьем $[0, \sigma]$ на n частей узловыми точками $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$, где

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_0 + r_1, \quad \sigma_2 = \sigma_1 + r_2, \dots, \sigma_n = \sigma_{n-1} + r_n = \sigma .$$

Пусть $r = \max\limits_{1 \le i \le n} r_i$. Назовем последовательность элементов $\bar{x}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, получаемых с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_0 + \psi(x_0) r_1, \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_1 + \psi(\bar{x}_1) r_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{x}_n &= \bar{x}_{n-1} + \psi(\bar{x}_{n-1}) r_n, \end{aligned} \tag{1.11}$$

приближенным решением уравнения (1.10), получаемым методом Эйлера.

Теорема 2. Пусть для $\psi(x)$ в D выполнены условия (1.8)-(1.9) и решение уравнения (1.10) при $0 \le t \le \sigma$ лежит в D. Пусть, далее, выполнено условие

$$r \le \frac{K\sigma}{n}, \tag{1.12}$$

где $K \ge 1$ – константа, не зависящая от n.

Тогда при $r \to 0$ решение, получаемое методом Эйлера, сходится к $x(t)$ на отрезке $[0, \sigma]$.

Доказательство. Пусть $x(t)$ при $t = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ принимает значения $x_0, x_1, \dots, x_n$. При этом

$$x_{i+1} = x_i + \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \psi(x(t))\,dt, \qquad i = 0, 1, \dots, n-1 . \tag{1.13}$$

Обозначим $\Delta_i = \|x_i - \bar{x}_i\|$. Оценим Δ_i для $i = 1, 2, \dots, n$. При $i = 1$ получаем

$$\Delta_1 = \left\| \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \psi(x(t))\,dt - \psi(x_0) r_1 \right\| = \left\| \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} [\psi(x(t)) - \psi(x_0)]\,dt \right\| \le$$

$$\le L \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \|x(t) - x_0\|\,dt \le L \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \left\| \int_{\sigma_0}^{t} \psi(x(s))\,ds \right\| dt \le \frac{1}{2} L M r^2 .$$

На следующем шаге получим

$$\Delta_2 = \left\| x_1 + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \psi(x(t))\,dt - \bar{x}_1 - \psi(\bar{x}_1) r_2 \right\| \le$$

$$\le \|x_1 - \bar{x}_1\| + \left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} [\psi(x(t)) - \psi(\bar{x}_1)]\,dt \right\| \le$$

$$\le \Delta_1 + L \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \|x(t) - \bar{x}_1\|\,dt \le \Delta_1 + L \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} [\|x(t) - x_1\| + \|x_1 - \bar{x}_1\|]\,dt \le$$

$$\le \Delta_1 (1 + Lr) + \frac{1}{2} L M r^2 .$$

По индукции легко показать, что

$$\Delta_{i+1} \le \Delta_i (1 + Lr) + \frac{1}{2} L M r^2 . \tag{1.14}$$

Далее, применяя метод, изложенный в /6/, получим следующую оценку:

$$\Delta_i \le \frac{1}{2} M r \left(e^{LK\sigma} - 1\right), \qquad i = 1, 2, \dots, n . \tag{1.15}$$

Из последней оценки при $r \to 0$ получаем сходимость приближенного решения к точному, что завершает доказательство.

II. Применим изложенный метод для решения граничной задачи (0.1)-(0.2). Без ограничения общности можно в граничных условиях (0.2) положить $\gamma = \delta = 0$. Рассмотрим граничную задачу

$$f(x, y, y', y'') = 0, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Пусть $Y[a,b]$ -множество дважды непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих граничным условиям (2.2), вторые производные которых $y''(x)$ удовлетворяют на $[a,b]$ условию Липшица. Введем норму элемента $y(x)$ следующим образом:

$$\| y(x) \| = \sum_{n=0}^{2} \max_{a \le x \le b} | y^{(n)}(x) | + L_y, \tag{2.3}$$

где L_y - нижняя грань констант Липшица для второй производной рассматриваемой функции $y(x)$. Легко видеть, что рассматриваемое множество $Y[a,b]$ с введенной таким образом нормой является пространством Банаха.

Рассмотрим также банахово пространство $Z[a,b]$, элементами которого являются функции $z(x)$, удовлетворяющие на $[a,b]$ условию Липшица, для которых норма определена как

$$\| z(x) \| = \max_{a \le x \le b} | z(x) | + L_z, \tag{2.4}$$

где L_z -нижняя грань констант Липшица для данной функции $z(x)$.

Т е о р е м а 3. Пусть внутри замкнутой области $D_y \subset Y[a,b]$ содержится единственное решение $y^*(x)$ задачи (2.1)-(2.2). Предположим, что $f(x,y,y',y'')$ имеет в D_y непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно и, кроме того,

$$| f'_{y''} | \ge a > 0. \tag{2.5}$$

Пусть, далее, граничная задача

$$f'_{y''}(x, y, y', y'') v'' + f'_{y'}(x,y,y',y'') v' + f'_y(x,y,y',y'') v = 0, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) = 0, \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

имеет только тривиальное решение для любой функции $y(x) \in D_y$.

Тогда существует такое $\epsilon > 0$, что для любой функции $y_0(x) \in Y[a,b]$, удовлетворяющей условию

$$\| f(x, y_0, y_0', y_0'') \|_Z < \epsilon, \tag{2.8}$$

система относительно функций $y(x,t)$, $v(x,t)$

$$\begin{aligned} f'_{y''}(x,y,y'_x,y''_{xx}) v''_{xx} + f'_{y'}(x,y,y'_x,y''_{xx}) v'_x + f'_y(x,y,y'_x,y''_{xx}) v = -f(x,y,y'_x,y''_{xx}) \\ y'_t = v \end{aligned} \tag{2.9}$$

с условиями

$$\begin{aligned} \alpha_1 v(a,t) + \beta_1 v'_x(a,t) = 0, \\ \alpha_2 v(b,t) + \beta_2 v'_x(b,t) = 0, \\ y(x,0) = y_0(x) \end{aligned} \tag{2.10}$$

имеет единственное решение и

$$\lim_{t \to 0} \| y(x,t) - y^*(x) \| = 0, \tag{2.11}$$

т.е. имеет место равномерная на $[a,b]$ сходимость $y(x,y)$, $y_x'(x,t)$, $y''_{xx}(x,t)$ к $y'(x)$, $y^{*\prime}(x)$, $y^{*\prime\prime}(x)$ соответственно при $t \to +\infty$.

Доказательству настоящей теоремы предпошлем лемму. Предварительно заметим, что оператор $f(y) = f(x,y,y',y'')$, действующий в банаховом пространстве $Y[a,b]$, имеет в D_y непрерывные производные Фреше $f'(y)$ и $f''(y)$. Поскольку производная Фреше $f'(y)$ определяется соотношением

$$f'(y)v = f'_{y''}(x,y,y',y'')v'' + f'_{y'}(x,y,y',y'')v' + f'_{y}(x,y,y',y'')v\,, \qquad (2.12)$$

существование в D_y обратного оператора $f'(y)^{-1}$ обусловлено тем, что граничная задача (2.6)-(2.7) имеет только тривиальное решение для всех $y \in D_y$.

Л е м м а. Если выполнены условия теоремы 3, то оператор $f'(y)^{-1}$ ограничен по норме в области D_y.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть D_z – сфера единичного радиуса с центром в нуле пространства $Z[a,b]$. Рассмотрим множество решений граничных задач

$$f'_{y''}(x,y,y',y'')v'' + f'_{y'}(x,y,y',y'')v' + f'_{y}(x,y,y',y'')v = z(x)\,, \qquad (2.13)$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) = 0\,,\\ &\alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0\,, \end{aligned} \qquad (2.14)$$

где $y(x) \in D_y$, $z(x) \in D_z$. Для доказательства леммы достаточно показать, что $v''(x)$ удовлетворяют на $[a,b]$ условию Липшица и, кроме того, существует константа $P > 0$, для которой

$$\| v \|_Y \leq P\,, \qquad (2.15)$$

где $v(x)$ –любая функция рассматриваемого множества.

1. Покажем сначала равномерную ограниченность функций $v(x)$. Согласно условиям теоремы 3, для любой функции $y(x) \in D_y$ решение задачи (2.13)-(2.14) существует и единственно. Каждая функция $v(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Предположим, что множество $v(x)$ не является равномерно ограниченным, то есть для любого натурального n найдутся функции $y_n(x) \in D_y$, $\| z_n(x) \| = 1$ и точка $x_n \in [a,b]$ такие, что

$$| v_n(x_n) | > n\,.$$

Из последовательности точек отрезка $[a,b]$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, предел которой обозначим $\bar{x} \in [a,b]$. Рассмотрим последовательность функций $y_k(x) \in D$, соответствующую этой подпоследовательности. Все L_y для $y(x) \in D_y$ равномерно ограничены. В силу введенной метрики (2.3) последовательности $y_k(x)$, $y'_k(x)$, $y''_k(x)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на $[a,b]$. По теореме Арцела из последовательности функций $y_k(x)$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность, для которой предельная функция $y(x) \in D_y$. Нетрудно также показать, что эта подпоследовательность будет сходящейся по норме пространства $Y[a,b]$. Аналогичные рассуждения легко проводятся и для последовательности функций $z_n(x)$.

Рассмотрим предельную граничную задачу (2.13)-(2.14), где в уравнение (2.13) подставлены предельные функции $y(x) \in D_y$ и $z(x) \in D_z$. Пусть A –линейный оператор, который определен как

$$Av = f'_{y''}(x,y,y',y'')v'' + f'_{y'}(x,y,y',y'')v' + f'_{y}(x,y,y',y'')v\,, \quad v \in Y[a,b].$$

Наряду с ним рассмотрим последовательность линейных операторов $A + \Delta A_n$, которые определяются соотношением

$$(A+\Delta A_n)v = f'_{y''}(x,y_n,y'_n,y''_n)v'' + f'_{y'}(x,y_n,y'_n,y''_n)v' + f'_{y}(x,y_n,y'_n,y''_n)v, \quad v \in Y[a,b],$$

а y_n - элементы последовательности, для которой $\| y - y_n \| \to 0$. Легко показать, что $\| \Delta A_n \| \to 0$ при $n \to \infty$. Воспользовавшись известным результатом (теорема 3/7/), можно утверждать, что $\| (A+\Delta A_n)^{-1} - A^{-1} \| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\| v - v_n \| \to 0$ при $n \to \infty$. Действительно, справедлива следующая оценка:

$$\| v - v_n \| \le \| A^{-1} \| \| z - z_n \| + \| (A + \Delta A_n^{-1}) - A^{-1} \| \| z_n \| ,$$

откуда вытекает последнее утверждение.

Таким образом, получено противоречие: решение предельной граничной задачи $v(x)$ будет обращаться в точке $\bar{x} \in [a, b]$ в бесконечность. Следовательно, множество функций $\{v(x)\}$ равномерно ограничено.

2. Чтобы показать равномерную ограниченность множеств функций $\{v'(x)\}$ и $\{v''(x)\}$, преобразуем уравнение (2.13) с помощью известного преобразования /8/ независимой переменной к виду

$$v''(\xi) + Q(\xi) v(\xi) = S(\xi), \tag{2.16}$$

где

$$\xi = \int_a^x p(s)^{-1} ds, \quad p(x) = \exp[\int_a^x f_{y''}'(t, y(t), y'(t), y''(t))^{-1} f_{y'}'(t, y(t), y'(t), y''(t)) dt],$$

$$Q(\xi) = p(x) P(x),$$

$$P(x) = f_{y''}'(x, y(x), y'(x), y''(x))^{-1} f_y'(x, y(x), y'(x), y''(x)) p(x),$$

$$S(\xi) = z(x) p(x).$$

Отрезок $[a, b]$ преобразуется для каждого $y \in D_y$ в отрезок $[0, \ell]$, где $\ell = \int_a^b p(s)^{-1} ds$. Очевидно,

$$\max_{a \le x \le b} |v(x)| = \max_{0 \le \xi \le \ell} |v(\xi)| .$$

Из (2.16) легко следует равномерная ограниченность множества функций $v''(\xi)$. Действительно, множество $v(\xi)$ равномерно ограничено, а равномерная ограниченность функций $p(x), P(x), S(\xi), Q(\xi)$ вытекает из определения этих функций и условий теоремы 3.

Функции $v(\xi)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\alpha_1 v(0) + \beta_1 v'(0) = 0,$$

$$\alpha_2 v(\ell) + p(b)^{-1} v'(\ell) \beta_2 = 0.$$

Отсюда видно, что $v'(0)$ и $v'(\ell)$ –равномерно ограниченные множества. Учитывая равномерную ограниченность множеств $v''(\xi)$, ℓ, получаем, что множество $v'(\xi)$ равномерно ограничено. Следовательно, $\{v'(x)\}$ также равномерно ограничено, поскольку $v'_x = p(x)^{-1} v'_\xi$. Заметим, что $v''(x) = p(x)^{-2} v''(\xi) - p'(x) p(x)^{-2} v'(\xi)$. Из последнего выражения следует равномерная ограниченность множества $v''(x)$, так как множество $p'(x)$ также равномерно ограничено.

3. Покажем, что все $v''(x)$ удовлетворяют на $[a,b]$ условию Липшица, причем константы Липшица равномерно ограничены.

Из уравнения (2.13) получим

$$v''(x) = f'_{y''}(x, y(x), y'(x), y''(x))^{-1}[z(x) - f'_{y'}(x, y(x), y'(x), y''(x))v'(x) - f'_y(x, y(x), y'(x), y''(x))v]$$

По условию теоремы 3 все частные производные $f(x, y, y', y'')$ до 2-го порядка включительно равномерно ограничены в D_y. Применяя формулу конечного приращения, легко убедиться, что все $f'_{y''}$, $f'_{y'}$, f_y удовлетворяют на $[a,b]$ условию Липшица с одной константой. Далее достаточно вспомнить, что множества функций $z(x)$, $v(x)$ и $v'(x)$ удовлетворяют на $[a,b]$ условию Липшица, причём и для них можно выбрать общую константу. Отсюда следует справедливость нашего утверждения.

Таким образом, лемма доказана

Доказательство теоремы 3. Для оператора $f(y) = f(x, y, y', y'')$, переводящего банахово пространство $Y[a,b]$ в банахово пространство $Z[a,b]$, выполнены все условия теоремы 1. Следовательно, дифференциальное уравнение в пространстве Банаха

$$y'_t = -f'(y)^{-1} f(y), \quad y(0) = y_0 \tag{2.17}$$

имеет решение $y(t)$ в промежутке $0 \leq t < \infty$ и $\lim_{t\to\infty} y(t) = y^*$ для любого $y_0 \in S : \|y - y^*\|_Y \leq \epsilon$, где $\epsilon > 0$ достаточно мало. Уравнение (2.17) можно записать в виде

$$f'(y) y'_t = -f(y), \quad y(0) = y_0 .$$

Обозначив y'_t через $v(x,t)$ и вспомнив выражение (2.12) для производной Фреше $f'(y)$, приходим к системе (2.9) с условиями (2.10) относительно функций $y(x,t)$ и $v(x,t)$ в полуполосе $a \le x \le b$, $0 \le t < \infty$. Согласно теореме 1, решение задачи (2.9)-(2.10) существует и $\lim\limits_{t\to\infty} \| y(x,t) - y^*(x) \| = 0$ для любой начальной функции $y(x,0) = y_0(x) \in S$. Но из условия (2.3) легко следует близость по норме пространства $Y[a,b]$ начальной функции $y_0(x)$ к искомому решению $y^*(x)$.

Теорема 3 доказана.

Рассмотрим следующую схему численного решения задачи (0.1)-(0.2). Разобьем полуполосу $a \le x \le b$, $0 \le t < \infty$ прямыми, параллельными оси x, $t = t_i$, отстоящими одна от другой на r_i. Второе уравнение системы (2.9) заменим приближенным разностным соотношением

$$r_{i+1}^{-1}\left[y(x,t_{i+1}) - y(x,t_i)\right] = v(x,t_i). \qquad (2.18)$$

На слое $t = t_i$ решаем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $v(x,t_i)$

$$A_i(x)\, v''(x,t_i) + B_i(x)\, v'(x,t_i) + C_i(x)\, v(x,t_i) = F_i(x), \qquad (2.19)$$

где

$$A_i(x) = f_{y''}(x, y(x,t_i), y'(x,t_i), y''(x,t_i)),$$

$$B_i(x) = f_{y'}(x, y(x,t_i), y'(x,t_i), y''(x,t_i)),$$

$$C_i(x) = f_{y}(x, y(x,t_i), y'(x,t_i), y''(x,t_i)),$$

$$F_i(x) = -f(x, y(x,t_i), y'(x,t_i), y''(x,t_i)),$$

а функция $y(x,t_i)$ считается известной, с граничными условиями

$$\alpha_1 v(a,t_i) + \beta_1 v'(a,t_i) = 0,$$

$$\alpha_2 v(b,t_i) + \beta_2 v'(b,t_i) = 0. \qquad (2.20)$$

При $i = 0$ начальная функция $y(x,0) = y_0(x)$ должна удовлетворять граничным

условиям (0.2). Соотношения (2.18)-(2.20) позволяют последовательно определять на слоях $t = t_i$ функции $v(x,t_i)$, $y(x,t_{i+1})$.

Легко видеть, что данная схема является реализацией метода Эйлера для решения дифференциального уравнения (2.17), сходимость которого доказана теоремой 2, так как оператор $\psi(y) = -f'(y)^{-1} f(y)$ удовлетворяет условиям этой теоремы.

В процессе вычислений шаг по параметру r_i можно выбирать оптимальным образом. Краевую задачу (2.19)-(2.20) можно решать любым известным численным методом. С точки зрения реализации на ЭВМ может быть удобен метод прогонки для разностного уравнения, получаемого при аппроксимации дифференциального оператора конечно-разностным на равномерной сетке узлов отрезка $[a,b]$.

Литература

1. М.К. Гаврин. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов. Изв. вузов, Математика, 5 (6), 18-31 (1958).
2. Е.П. Жидков, И.В. Пузынин. Препринт ОИЯИ, 5-2959, Дубна, 1966.
3. Е.П. Жидков, И.В. Пузынин. Решение краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом стабилизации. ДАН СССР, 174, 2 (1967).
4. R.E.Bellman, R.E.Kalaba. Quasilinedrization and Nonlinear Boundary-Value Problems, Amer. Els. Pabl. Comp., New-York, 1965, p.p. 114-115.
5. Ж. Дьедонне. Основы современного анализа. Мир, Москва, 1964, 328-331.
6. Л. Коллатц. Численные методы решения дифференциальных уравнений. ИЛ, Москва, 1953, 28-29.
7. Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. Элементы функционального анализа. Наука, Москва, 1965, 157-158.
8. Ф. Трикоми. Дифференциальные уравнения. ИЛ, Москва, 1958, 127-129.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 мая 1967 г.