ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

5 - 3000

Р. Денчев

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОМПАКТЕ

1966

5 - 3000

Р. Денчев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОМПАКТЕ

Направлено в " Журнал вычислительной математики и

математической физики "

Рассматривается уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

при условии

$$\|Bx\| \leq M , \tag{2}$$

где A и B –самосопряженные коммутирующие операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Исследуется устойчивость задачи при изменении y.

Пусть множество

$$\mathfrak{M}(M) = \{ x \in \mathcal{H} \;/\; \|Bx\| \leq M \} \quad -$$

компакт в $\mathcal{H}$. Пусть оператор A-непрерывный, A^{-1}- однозначный (может быть неограниченным). Пусть $\mathfrak{N} = A\mathfrak{M}$ – образ множества $\mathfrak{M}$. Обозначим через $R(\mathfrak{N})$ сужение оператора A^{-1} на $\mathfrak{N}$. Как известно (см. /1/), оператор $R(\mathfrak{N})$ непрерывен.

В работе предлагается способ[x/] вычисления модуля непрерывности оператора $R(\mathfrak{N})$. Обозначим его через $\omega(\epsilon, M)$ Нетрудно видеть, что[xx/]

$$\omega(\epsilon, M) = \max\{ \|x\| \;/\; \|Ax\| \leq \epsilon \;,\; \|Bx\| \leq M \} . \tag{3}$$

Применим метод множителей Лагранжа. Образуем функционал

$$\Phi(x, \lambda) = \|x\|^2 + \lambda_1(\epsilon^2 - \|Ax\|^2) + \lambda_2(M^2 - \|Bx\|^2) . \tag{4}$$

Можно показать[xxx/], что если $\hat{x}$ – точка, в которой достигается максимум в (3), то

[x/] Предлагаемый способ есть некоторое обобщение одного метода, примененного М.М. Лаврентьевым (см. /2/).

[xx/] Иными словами, $\omega(\epsilon, M)$ есть диаметр пересечения двух эллипсоидов в гильбертовом пространстве.

[xxx/] Это утверждение доказывается так же, как и в случае выпуклых функций (см. /3,4/).

существуют $\hat\lambda_1$ и $\hat\lambda_2$, такие, что выполняются следующие соотношения:

$$\hat x - \hat\lambda_1 A^2 \hat x - \hat\lambda_2 B^2 \hat x = 0, \tag{5.1}$$

$$\|A\hat x\| \leq \epsilon, \tag{5.2}$$

$$\|B\hat x\| \leq M, \tag{5.3}$$

$$\hat\lambda_1(\epsilon - \|A\hat x\|) + \hat\lambda_2(M - \|B\hat x\|) = 0, \tag{5.4}$$

$$\hat\lambda_1,\ \hat\lambda_2 \geq 0. \tag{5.5}$$

Мы определим $\|\hat x\|$ для любого вектора $\hat x$, удовлетворяющего соотношениям (5). Среди полученных величин $\|\hat x\|$ определим максимальную.

Предположим сначала, что $\hat\lambda_1$ и $\hat\lambda_2$ обе отличны от нуля. Тогда

$$\|A\hat x\| = \epsilon, \quad \|B\hat x\| = M. \tag{6}$$

Умножая в (5.1) на $\hat x$, получаем

$$\|\hat x\|^2 = \hat\lambda_1 \epsilon^2 + \hat\lambda_2 M^2. \tag{7}$$

Так как A и B коммутируют, существует спектральное семейство проекционных операторов E_θ, такое, что

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, dE_\theta, \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\theta)\, dE_\theta. \tag{8}$$

Подставляя в (5.1), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} [1 - \hat\lambda_1 f^2(\theta) - \hat\lambda_2 \phi^2(\theta)]\, dE_\theta\, \hat x = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим выражение

$$P(\theta) = 1 - \hat\lambda_1 f^2(\theta) - \hat\lambda_2 \phi^2(\theta).$$

Обозначим через N множество нулей $\mathcal{P}(\theta)$. N – не пусто, так как в противном случае из (9) следует, что $\hat x = 0$. Предположим, что N состоит из конечного числа точек.

Пусть N содержит хотя бы две точки, θ_1 и θ_2, такие, что

$$f^2(\theta_1)\phi^2(\theta_2) - f^2(\theta_2)\phi^2(\theta_2) \neq 0. \tag{10}$$

Тогда из уравнений

$$1 - \hat\lambda_1 f^2(\theta_1) - \hat\lambda_2 \phi^2(\theta_1) = 0,$$
$$1 - \hat\lambda_1 f^2(\theta_2) - \hat\lambda_2 \phi^2(\theta_2) = 0$$

определяем $\hat\lambda_1$ и $\hat\lambda_2$, подставляем в (7) и получаем:

$$\|x\| = \sqrt{\frac{[\phi^2(\theta_2) - \phi^2(\theta_1)]\epsilon^2 + [f^2(\theta_1) - f^2(\theta_2)]M^2}{f^2(\theta_1)\phi^2(\theta_2) - f^2(\theta_2)\phi^2(\theta_1)}} \tag{11}$$

Обозначим через $\omega(\epsilon, M)$ максимум по θ_1 и θ_2 выражения (11).

Если для любых двух точек $\theta_i, \theta_j \in N$

$$f^2(\theta_i)\phi^2(\theta_j) - f^2(\theta_j)\phi^2(\theta_i) = 0, \tag{12}$$

тогда

$$\hat x = \sum_{\theta_k \in N} (E_{\theta_k} - E_{\theta_k - 0})\hat x = \Sigma \hat x_k, \tag{13}$$

$$\|A\hat x\|^2 = \Sigma f^2(\theta_k)\|\hat x_k\|^2 = \epsilon^2, \qquad \|B\hat x\|^2 = \Sigma \phi^2(\theta_k)\|\hat x_k\|^2 = M^2 \tag{14}$$

Таким образом,

$$\|\hat x\| = \sqrt{\Sigma \|\hat x_k\|^2}, \tag{15}$$

где $\|\hat x_k\|$ и θ_k удовлетворяют (14). Обозначим через $\omega_2(\epsilon, M)$ максимум (15) при условии (14).

Пусть, наконец, N содержит только одну точку θ_1. Тогда

$$\hat x = (E_{\theta_1} - E_{\theta_1 - 0})\hat x, \tag{16}$$

$$\|A\hat x\| = \|f(\theta_1)\hat x\| = \epsilon, \qquad \|B\hat x\| = \|\phi(\theta_1)\hat x\| = M. \tag{17}$$

Из (17) получаем, что θ_1 удовлетворяет соотношению

$$\left|\frac{\phi(\theta_1)}{f(\theta_1)}\right| = \frac{M}{\epsilon} \tag{18}$$

и

$$\|\hat x\| = \frac{\epsilon}{|f(\theta_1)|} = \frac{M}{|\phi(\theta_1)|}. \tag{19}$$

Обозначим через $\omega_3(\epsilon, M)$ максимум (19) при условии (18).

Рассмотрим теперь случай, когда одно из чисел $\hat\lambda_1, \hat\lambda_2$ равняется нулю, например $\hat\lambda_2 = 0$. Тогда

$$\|A\hat x\| = \epsilon \ ,\qquad \|B\hat x\| \leqq M \ . \tag{20}$$

Пусть уравнение

$$1 - \hat\lambda_1 f^2(\theta_1) = 0 \tag{21}$$

имеет один корень θ_1. Тогда $\hat\lambda_1 = \frac{1}{f^2(\theta_1)}$

и

$$\|\hat x\| = \frac{\epsilon}{|f(\theta_1)|} . \tag{22}$$

При этом из (5.2) и (5.3) получаем для θ_1 условие

$$\frac{\phi^2(\theta_1)}{f^2(\theta_1)} \leqq \frac{M^2}{\epsilon^2} . \tag{23}$$

Если уравнение (21) имеет больше одного корня, то легко видеть, что хотя бы один из них будет удовлетворять (22) и (23). Пусть $\omega_4(\epsilon, M)$ обозначает максимум (22) при условии (23).

Модуль непрерывности оператора $R(\mathfrak{N})$ равняется наибольшему из чисел $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$.

Рассмотрим пример.

Пусть
$$\mathcal{H} = L\ (0,1) \ ,$$

$$Ax = \int_0^s x(t)\,dt \ , \qquad Bx = i\,\frac{dx}{dt} \ , \tag{24}$$

т.е. рассматривается уравнение

$$\int_0^s x(t)\,dt = y(t) \tag{25}$$

при условии

$$\int_0^1 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt \leqq M^2 \ . \tag{26}$$

Уравнение (5.1) в этом случае имеет вид

$$\hat x(t) - \hat\lambda_1 \int_t^1 ds \int_0^s \hat x(\tau)\,d\tau + \hat\lambda_2 \frac{d^2\hat x}{dt^2} = 0 \ . \tag{27}$$

С помощью преобразования Фурье

$$\hat x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta}\, \hat y(\theta)\,d\theta$$

получаем

$$(\hat\lambda_2\theta^4 - \theta^2 + \hat\lambda_1)\hat y(\theta) = 0 .$$

Пусть $\hat\lambda_1, \hat\lambda_2 \neq 0$. Существуют хотя бы два корня θ_1, θ_2 уравнения

$$\hat\lambda_2\theta^4 - \theta^2 + \hat\lambda_1 = 0 \ ,$$

такие, что $\theta_1^4 \neq \theta_2^4$. Тогда

$$\hat\lambda_1 = \frac{\theta_1^2\theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2} , \quad \hat\lambda_2 = \frac{1}{\theta_1^2 + \theta_2^2}$$

и

$$\|\hat x\| = \sqrt{\frac{\theta_1^2\theta_2^2\epsilon + M^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2}} = f(\theta_1, \theta_2) .$$

Приравнивая к нулю $\frac{\partial f}{\partial\theta_1}$ и $\frac{\partial f}{\partial\theta_2}$, находим:

$$\max_{\theta_1,\theta_2} f(\theta_1, \theta_2) = \sqrt{\epsilon M} \ .$$

Если $\hat\lambda_2 = 0$, то из (22) и (23) получаем:

$$\|\hat x\| = \epsilon\theta$$

при условии на θ

$$\theta^4 \leqq \frac{M^2}{\epsilon^2} .$$

Отсюда

$$\max_{\theta} \|\hat x\| = \sqrt{\epsilon M} \ .$$

Таким образом, для рассматриваемого примера

$$\omega(\epsilon, M) = \sqrt{\epsilon M} \ .$$

Литература

1. А.Н. Тихонов. Об устойчивости обратных задач. ДАН, 39, № 5, 195–198 (1944).
2. М.М. Лаврентьев. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск. Изд. Сиб отд. АН СССР, 1962.
3. R.T. Rockafellar. Extension of Fenchel's Duality Theorem for Convex Functions. Duke Math. j., 33, №1 (1966).
4. Г.П. Кюнци, В. Крелле. Нелинейное программирование. Изд. "Советское радио". Москва, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 октября 1966 г.