ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

5 - 2962

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.В. Николов, К.В. Рерих

ДИСКРЕТНАЯ СЕРИЯ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ГРУППЫ $U(p,q)$

(Обзор по работам Гельфанда-Цетлина-Граева)

1966

А.В. Николов, К.В. Рерих

ДИСКРЕТНАЯ СЕРИЯ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ГРУППЫ $U(p,q)$

(Обзор по работам Гельфанда-Цетлина-Граева)

Содержание

§ I. Введение

Группа $U(p,q)$ есть группа всех комплексных линейных преобразований $n=p+q$ переменных $z_1, \dots, z_n$, сохраняющих эрмитову форму

$$\sum_{k=1}^{p} \bar{z}_k z_k - \sum_{k=p+1}^{n} \bar{z}_k z_k .$$

При $q=0$ $U(p,q)$ совпадает с группой $U(n)$ унитарных преобразований. Неприводимые унитарные представления группы $U(n)$ - все они конечномерны - были описаны ещё Картаном. Картан дал систему инвариантов, однозначно определяющих представление - так называемый старший вес представления - и указал принципиальную возможность конструкции представления, отвечающего данному старшему весу. Однако задача об эффективном описании представления была решена лишь в 1950 г. в важной работе Гельфанда и Цетлина/1/, которые ввели очень удобный базис для представления алгебры Ли группы $U(n)$ и дали явное выражение для матричных элементов генераторов представления в этом базисе*).

В последнее время большой интерес представляет группа $U(p,q)$. Унитарные неприводимые представления этой группы изучались Граевым/3/; в этой работе описана часть представлений. Известно/3/, что у группы $U(p,q)$ имеется несколько типов неприводимых унитарных представлений. Прежде всего, имеется дискретная серия представлений. В известном смысле, который станет ясным из последующего описания этих представлений, их можно рассматривать как "хвосты" упомянутых конечномерных представлений. Кроме того, у группы $U(p,q)$ имеется q " полунепрерывных" серий неприводимых унитарных представлений (при предположении, что $p \geq q$; это предположение не является ограничением общности, поскольку $U(q,p)$ и $U(p,q)$ изоморфны). Представление k - ой серии ($k=1, \dots, q$) задается $n-k$ целыми индексами и k - вещественными параметрами. Существует процедура, сводящая описание представлений k - ой серии группы $U(p,q)$ к описанию представлений дискретной серии группы $U(p-k,q-k)$ (см./3/, где даны "полунепрерывные" серии). Поэтому основная трудность при рассмотрении представлений группы $U(p,q)$ состоит в описании представлений дискретной серии, что и сделано в/3/.

Однако для физических применений более актуальным является описание неприводимых унитарных представлений не самой группы $U(p,q)$, а её алгебры Ли $L(p,q)$. В работе/2/ Гельфандом и Граевым было показано, что формулы Гельфанда-Цетлина на самом деле имеют более широкую область примененияФактически эти формулы задают не только представления алгебры

---

*) Отметим большой цикл работ/4/ о представлениях $U(n)$, основывающихся на упомянутой работе Гельфанда-Цетлина.

Отметим также, что для группы $U(n)$ в/2/ получены интегральные формулы, а в/7/ - явные формулы для операторов Казимира.

$L(n) = L(n,0)$, но и представления дискретной серии алгебры $L(p,q)$, $p+q=n$ ж).

В последнее время, благодаря большому успеху группового подхода в физике элементарных частиц, работы[1,2] стали очень актуальными для физиков. Поскольку они изложены конспективно и в них опущены почти все соответствующие доказательства, то авторы данного обзора поставили себе цель-дать подробное изложение теории дискретной серии, воспроизводя полностью все доказательства Гельфанда-Цетлина-Граева. Для некоторых утверждений (см., например, § 8) авторы предлагают свои доказательства. Кроме того, ими получены некоторые новые результаты, а именно: I) уточнена (см. § 5) "минимальная система" коммутационных соотношений между операторами $A_{k\ell}$ и проверены (см. § 7,В) дополнительные коммутационные соотношения из уточненной "минимальной системы"; 2) выведена (см. § 7, А) формула для операторов $A_{k\ell}$ (при произвольных k и ℓ) в случае алгебры $L(p,q)$ жж), аналогичная соответствующей формуле в случае алгебры $L(n)$, данной в[I]; 3) замечено (см. Добавление), что представления "полунепрерывной" серии для $L(p,1)$, определенные в[2], иногда могут расщепляться в сумму двух неприводимых представлений.

Отметим ещё, что в работах[6] дана конструкция некоторых представлений $U(p,q)$ (так называемая вырожденная лестничная серия) в другом формализме. Его связь с формализмом Гельфанда-Цетлина-Граева будет рассмотрена в отдельном сообщении.

Наконец, отметим большой цикл работ[8] Хариш-Чандра о представлениях полупростых групп Ли; в частности, ему, по-видимому, удалось получить описание представлений дискретных серий в терминах характеров представлений. Обзор его результатов и сопоставление их с результатами Гельфанда-Цетлина-Граева не входит в задачу данного обзора.

ж) См. также работу[5], где подробно изучены унитарные представления алгебр Ли групп $SU(1,1)$ и $SU(2,1)$.

жж) Заметим, что на возможность получения такой формулы указывалось Гельфандом в его лекции, прочитанной на Ялтинской школе по теории элементарных частиц (апрель- май с.г.).

§ 2. Определение группы $\mathcal{U}(p,q)$ и алгебры $L(p,q)$

Как уже отмечалось, группа $\mathcal{U}(p,q)$ есть группа всех комплексных линейных преобразований $n=p+q$ переменных $z_1,\ldots,z_n$, сохраняющих эрмитову форму

$$\sum_{k=1}^{p}\bar{z}_k z_k-\sum_{k=p+1}^{n}\bar{z}_k z_k\,. \tag{2.I}$$

Ясно, что при $q=0$ $(p=n)$ $\mathcal{U}(p,q)$ совпадает с группой $\mathcal{U}(n)$ унитарных преобразований. Как известно, все неприводимые унитарные представления группы $\mathcal{U}(n)$ конечномерны. При $q>0$ группа $\mathcal{U}(p,q)$ некомпактна и все её неприводимые унитарные представления бесконечномерны. Так как $\mathcal{U}(q,p)$ и $\mathcal{U}(p,q)$ изоморфны, то без ограничения общности можно рассматривать лишь случай $p\geqslant q$; всюду в настоящем изложении мы будем предполагать, что выполняется это неравенство.

Пусть 1_s – единичная матрица порядка s. Тогда блочная матрица

$$\sigma=\begin{pmatrix}1_p & 0\\ 0 & -1_q\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

есть матрица эрмитовой формы (2.I), а сама форма записывается компактно в виде

$$z^+\sigma z$$

(z – столбец из элементов z_k, z^+– строка из элементов $\bar{z}_k$). Следовательно, согласно определению группы $\mathcal{U}(p,q)$,

$$z^+u^+\sigma u z=z^+\sigma z\,,\quad u\in\mathcal{U}(p,q),$$

а из этого, как известно, вытекает, что

$$u^+\sigma u=\sigma\,,\quad u\in\mathcal{U}(p,q)\,. \tag{2.3}$$

Проводя рассуждения в обратном порядке (что даже проще), мы получаем, что равенство $u^+\sigma u=\sigma$ имеет место только для матриц u из $\mathcal{U}(p,q)$. Таким путем мы приходим к заключению, что можно дать другое (эквивалентное вышеприведенному) определение группы $\mathcal{U}(p,q)$, а именно: $\mathcal{U}(p,q)$ есть группа всех комплексных матриц порядка $n=p+q$, удовлетворяющих равенству (2.3). (Согласно (2.2), при $q=0$ $(p=n)$ имеем $\sigma=1_n$ и равенство (2.3) принимает вид $u^+u=1_n$, т.е. опять получается, что $\mathcal{U}(p,q)$ совпадает с $\mathcal{U}(n)$ при $q=0$).

В силу (2.3) теперь мы можем утверждать, что алгебра Ли $L(p,q)$ группы $\mathcal{U}(p,q)$ есть совокупность всех комплексных матриц M порядка $n=p+q$, удовлетворяющих условию

$$M^+=\sigma M\sigma\,. \tag{2.4}$$

В частности, согласно вышесказанному, $L(n,0)$ совпадает с алгеброй $L(n)$ группы $\mathcal{U}(n)$. В дальнейшем мы рассмотрим некоторую серию неприводимых представлений алгебры $L(p,q)$ (и алгебры $L(n)$ – как частный случай). Они будут унитарными. Представление алгебры Ли какой-то группы называется унитарным, если оно состоит лишь из эрмитовых операторов, так как в таком и только в таком случае соответствующее представление самой группы будет унитарным; конечно, если последнее существует, т.е. если можно "проинтегрировать" представление алгебры и получить таким путем представление группы. Дело в том, что хотя каждому представлению группы соответствует представление её алгебры Ли, однако обратное неверно: не всякое представление алгебры Ли можно "продолжить" до представления соответствующей группы, причем, если такое "продолжение" и существует, то оно может оказаться не единственным. Вопрос о "продолжении" рассматриваемых в настоящем изложении представлений алгебры $L(p,q)$ до представлений группы $\mathcal{U}(p,q)$ здесь не будет обсуждаться.

§ 3. Постановка задачи о представлениях алгебры $L(p,q)$

Обозначим через A_{ij} матрицу n- го порядка, у которой на пересечении i - ой строки и j - го столбца стоит 1, а на остальных местах - нули. Коммутаторы матриц A_{ij} выражаются, как хорошо известно, следующей формулой:

$$[A_{ij}, A_{kl}] = \delta_{kj} A_{il} - \delta_{il} A_{kj}, \tag{3.1}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Как мы видели (см. § 2), алгебра Ли $L(p,q)$ группы $\mathcal{U}(p,q)$ есть совокупность всех комплексных матриц M порядка $n=p+q$, удовлетворяющих условию (2.4), в которой введено соотношение коммутации: $[M,M'] = MM'-M'M$. Легко показать, что можно выбрать генераторы алгебры $L(p,q)$ следующим образом:

$$M_{kk} = A_{kk}, \quad k=1,\dots,n;$$
$$M_{kl} = A_{kl}+A_{lk}, \quad \tilde{M}_{kl} = i(A_{kl}-A_{lk}), \quad k<l\le p \ \text{ либо } \ p<k<l;$$
$$N_{kl} = A_{kl}-A_{lk}, \quad \tilde{N}_{kl} = i(A_{kl}+A_{lk}), \quad k\le p<l.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{gathered}A_{kk} = M_{kk}, \quad k=1,\dots,n;\\ A_{kl} = \tfrac{1}{2}(M_{kl}-i\tilde{M}_{kl}), \quad A_{lk} = \tfrac{1}{2}(M_{kl}+i\tilde{M}_{kl}), \quad k<l\le p \ \text{ либо } \ p<k<l;\\ A_{kl} = \tfrac{1}{2}(N_{kl}-i\tilde{N}_{kl}), \quad A_{lk} = -\tfrac{1}{2}(N_{kl}+i\tilde{N}_{kl}), \quad k\le p<l.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Скажем, что задано представление алгебры $L(p,q)$ в гильбертовом пространстве H с ортонормированным базисом $\{e_1,\dots,e_n,\dots\}$, если каждому элементу $A\in L(p,q)$ сопоставлен линейный оператор T_A в H, который определен на множестве всех конечных линейных комбинаций векторов $e_1,\dots,e_n,\dots$ и переводит это множество в себя, причем

$$T_{\lambda A+\mu B} = \lambda T_A + \mu T_B, \quad [T_A, T_B] = T_{[A,B]}, \tag{3.3}$$

где A и B – произвольные элементы из $L(p,q)$, а λ и μ – произвольные комплексные числа. Для краткости, как это обычно делается, будем обозначать T_M опять через M (M - - любой из генераторов). Определим операторы A_{ij} "в представлении T " формулами (3.2) (точнее, по определению $T_{A_{ij}}$ выражаются посредством T_M теми же формулами, какими выражаются A_{ij} посредством M, и, кроме того, для краткости символ $T_{A_{ij}}$ заменяется на символ A_{ij}). Тогда из (3.2) и (3.3) вытекает, что и в представлении T операторы A_{ij} удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.I). Наконец, если представление T унитарно, т.е. если операторы M эрмитовы (см. § 2), то из (3.2) получаются соотношения

$$A^{+}_{k\ell} = \varepsilon_{k\ell} A_{\ell k} , \quad \varepsilon_{k\ell} = \begin{cases} +1 & \text{при } k,\ell \le p \text{ либо } p < k,\ell ; \\ -1 & \text{при } k \le p < \ell \text{ либо } \ell \le p < k . \end{cases} \tag{3.4}$$

Согласно (3.3), для задания представления T достаточно задать генераторы M (точнее, T_M). Из вышесказанного ясно, что это эквивалентно заданию операторов A_{ij} ; иными словами, достаточно задать A_{ij} так, чтобы удовлетворялись коммутационные соотношения (3.I) и - если представление унитарно- условия "эрмитовости" (3.4).

Представление T называется неприводимым, если в H не существует подпространств, инвариантных относительно всех операторов из T . Два представления T и T' алгебры $L(p,q)$, действующие в пространствах H и H' , называются эквивалентными, если существует такое линейное отображение H на H' , при котором операторы T переходят в соответствующие операторы T' . В дальнейшем, говоря о представлениях, мы всегда будем подразумевать под этим словом неприводимые представления и всегда будем определять их с точностью до эквивалентности.

Итак, задача об описании унитарных представлений алгебры $L(p,q)$ сводится к решению следующей задачи: найти все попарно неэквивалентные системы операторов A_{ij} в гильбертовом пространстве H , не оставляющие инвариантным ни одного из подпространств в H и удовлетворяющие коммутационным соотношениям (3.I) и условиям эрмитовости (3.4). Дальше мы покажем, как решается эта задача в случае интересующей нас серии представлений алгебры $L(p,q)$.

§ 4. Описание неприводимых представлений алгебр $L(n)$ и $L(p,q)$ (дискретная серия)

А. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $L(n)$

Рассмотрим сначала случай $q=0$, т.е. алгебру $L(n,0)=L(n)$ (см. § 2). Опишем конструкцию базиса Гельфанда-Цетлина в пространстве неприводимого представления. Эта конструкция основывается на следующих двух фактах теории конечномерных представлений:

а) Конечномерное неприводимое представление алгебры $L(n)$ однозначно задается n-мерным вектором $m_n = (m_{1n}, \cdots, m_{nn})$ с целочисленными координатами, где $m_{1n} \geq m_{2n} \geq \cdots \geq m_{nn}$ (старший вес представления). Этот вектор будем дальше называть номером неприводимого представления. Пространство, в котором действует представление с номером m_n, будем обозначать через H_{m_n}.

Условимся считать, что алгебра $L(n-1)$ вложена естественным образом в алгебру $L(n)$, причем генераторы $L(n-1)$ являются линейными комбинациями $A_{k\ell}$, $k, \ell = 1, \dots, n-1$.

б) При разложении конечномерного неприводимого представления алгебры $L(n)$ на неприводимые представления подалгебры $L(n-1)$ последние входят с кратностью,не большей единицы. При этом в разложение пространства H_{m_n} входят те и только те подпространства $H_{m_{n-1}}$, $m_{n-1} = (m_{1,n-1}, \dots, m_{n-1,n-1})$, для которых

$$m_{in} \geq m_{i,n-1} \geq m_{i+1,n}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Канонический базис в пространстве H_{m_n} строится следующим образом. Рассмотрим убывающую цепочку алгебр

$$L(n) \supset L(n-1) \supset \cdots \supset L(1).$$

Разложим пространство H_{m_n} на подпространства, инвариантные и неприводимые относительно подалгебры $L(n-1)$, каждое из этих подпространств разложим на подпространства, инвариантные и неприводимые относительно подалгебры $L(n-2)$ и т.д. вплоть до одномерной алгебры $L(1)$. В результате мы получим разложение H_{m_n} на одномерные подпространства. В силу утверждения б) это разложение определено однозначно. Каждое из полученных одномерных подпространств является пересечением убывающей цепочки подпространств

$$H_{m_n} \supset H_{m_{n-1}} \supset \cdots \supset H_{m_1}.$$

Таким образом, каждое из этих одномерных подпространств задается следующей треугольной схемой

$$m = \begin{bmatrix} m_{1n} \; m_{2n} \; \cdots \; m_{n-1,n} \; m_{nn} \\ m_{1,n-1} \; \cdots\cdots \; m_{n-1,n-1} \\ \cdots\cdots \\ m_{12} \quad m_{22} \\ m_{11} \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

В этой схеме первая строка фиксирована; это номер исходного представления. В остальных строках могут стоять любые целые числа, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$m_{jk} \geq m_{j,k-1} \geq m_{j+1,k}. \tag{4.2}$$

Эти неравенства отражены на схеме тем, что число $m_{j,k-1}$, стоящее в $(k-1)$ строке снизу, выписывается между числами m_{jk} и $m_{j+1,k}$.

Выбирая в каждом из построенных одномерных подпространств по вектору ψ_m с нормой 1, мы получим ортонормированный базис в пространстве H_{m_n}. Векторы базиса занумерованы, таким образом, всевозможными треугольными схемами m. Для удобства в дальнейшем мы всегда будем писать вместо ψ_m просто m.

Чтобы задать представления, достаточно указать, как действуют операторы $A_{k\ell}$ на базисные векторы. Сперва зададим систему операторов $A_{kk}, A_{k,k-1}, A_{k-1,k}$ следующими формулами:

$$A_{kk}\, m = (r_k - r_{k-1})\, m, \tag{4.3}$$

$$A_{k,k-1}\, m = \sum_{j=1}^{k-1} a^j_{k-1}(m)\, m^j_{k-1}, \tag{4.4}$$

$$A_{k-1,k}\, m = \sum_{j=1}^{k-1} b^j_{k-1}(m)\, m^{\hat{j}}_{k-1}, \tag{4.5}$$

где

$$r_0 = 0, \quad r_k = \sum_{j=1}^{k} m_{jk}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{4.6}$$

$$a^j_{k-1}(m) = \left[- \frac{\prod_{i=1}^{k}(l_{ik} - l_{j,k-1} + 1)\prod_{i=1}^{k-2}(l_{i,k-2} - l_{j,k-1})}{\prod_{i\neq j}^{k}(l_{i,k-1} - l_{j,k-1} + 1)(l_{i,k-1} - l_{j,k-1})} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.7}$$

$$b^j_{k-1}(m) = \left[- \frac{\prod_{i=1}^{k}(l_{ik} - l_{j,k-1})\prod_{i=1}^{k-2}(l_{i,k-2} - l_{j,k-1} - 1)}{\prod_{i\neq j}(l_{i,k-1} - l_{j,k-1})(l_{i,k-1} - l_{j,k-1} - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.8}$$

$$l_{ik} = m_{ik} - i, \tag{4.9}$$

а m^j_{k-1} $(m^{\hat{j}}_{k-1})$ обозначает схему, полученную из m заменой $m_{j,k-1}$ на $m_{j,k-1} - 1$ $(m_{j,k-1} + 1)$. Отметим, что формально некоторые из схем m^j_{k-1} в (4.4) и $m^{\hat{j}}_{k-1}$ в (4.5) могут оказаться недопустимыми (т.е. их элементы могут не удовлетворять неравенствам (4.2)), однако фактически такие схемы не войдут в (4.4) и (4.5), так как a^j_{k-1} $(b^j_{k-1}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда схема m^j_{k-1} $(m^{\hat{j}}_{k-1})$ допустима. Справедливость этого утверждения легко проверяется с помощью (4.2) и (4.7-9). Их этих же формул вытекает ещё, что знаменатели коэффициентов a^j_{k-1} и b^j_{k-1} не аннулируются (для допустимых схем)*) и что подкоренные выражения неотрицательны. Значит, a^j_{k-1} и b^j_{k-1} являются вещественными числами:

$$\bar{a}^j_{k-1} = a^j_{k-1}, \quad \bar{b}^j_{k-1} = b^j_{k-1}. \tag{4.10}$$

---

*) Точнее, если некоторый из знаменателей (для недопустимых схем) аннулируется, то соответствующий числитель также аннулируется. Поэтому можно считать, что вся дробь равна нулю по определению (так что соответствующая недопустимая схема опять не войдет в (4.4) либо (4.5) - см. выше). Это определение учтено, хотя и неявно, во всех дальнейших рассуждениях (см., например, § 6, где оно неявно учтено применением аналитического продолжения). Чтобы не перегружать изложения, мы больше нигде не будем обсуждать подобных тонкостей.

Более того, для однозначной определенности операторов $A_{k,k-1}$ и $A_{k-1,k}$ можно считать, конечно, что a^j_{k-1} и b^j_{k-1} неотрицательны.

Остальные операторы $A_{k\ell}$ определим следующими рекуррентными формулами:

$$A_{k,k-h} = [A_{k,k-1}, A_{k-1,k-h}], \quad A_{k-h,k} = [A_{k-h,k-1}, A_{k-1,k}], \; h > 1 \quad . \qquad (4.11)$$

Позже мы покажем (см. § 7 А), что с помощью этих формул можно получить явные выражения для $A_{k\ell}$ при любых k и ℓ, $k \neq \ell$, аналогичные выражениям (4.4), (4.5).

В. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $L(p,q)$

Теперь рассмотрим случай $q > 0$. Мы дадим сейчас описание так называемой дискретной серии неприводимых унитарных представлений алгебры $L(p,q)$ ж). Для этой цели введем схемы более общего вида, чем (4.1) жж). Сначала зададим разбиение

$$p = \alpha + \beta$$

числа p в сумму двух целых неотрицательных чисел. С каждым таким разбиением свяжем совокупность схем, которые определяются следующим образом: элементы $m_{j,k}$, $j = 1, \ldots, k$, $k = 1, \ldots, n$, любой из этих схем являются, как и раньше, целыми числами, но на этот раз они удовлетворяют другим неравенствам, а именно:

$$\begin{aligned} & m_{j,k+1} \geq m_{jk} \geq m_{j+1,k+1}, \quad k = 1, \ldots, p-1; \\ & m_{1k} \geq m_{1,k+1}+1 \geq m_{2k} \geq \cdots \geq m_{\alpha k} \geq m_{\alpha,k+1}+1, \quad k = p, \ldots, n-1; \\ & m_{j,k+1} \geq m_{jk} \geq m_{j+1,k+1}, \quad j = \alpha+1, \ldots, k-\beta, \quad k = p, \ldots, n-1; \\ & m_{k-\beta+2,k+1}-1 \geq m_{k-\beta+1,k} \geq m_{k-\beta+3,k+1}-1 \geq \cdots \geq m_{k+1,k+1}-1 \geq m_{kk}, \quad k = p, \ldots, n-1. \end{aligned} \qquad (4.12)$$

ж) Название "дискретная" связано с тем, что представления из этой серии задаются, как выяснится в дальнейшем, набором параметров $m_{1n}, \ldots, m_{nn}$, пробегающих дискретную совокупность значений.

жж) Отметим, кстати, что схемы (4.1) задают базис и в пространствах, в которых действуют конечномерные неунитарные представления алгебры $L(p,q)$, $q > 0$. Это утверждение доказывается теми же методами, которые применяются в настоящем изложении.

При этом подразумевается, что m_{1k} изменяется в интервале $[m_{1,k+1}+1, +\infty)$, а m_{kk} – в интервале $(-\infty, m_{k+1,k+1}-1]$, когда $k = p, \ldots, n-1$. Разберем несколько подробнее эти условия. Раньше, когда выполнялись неравенства (4.2), мы условились располагать числа m_{jk} в виде схемы (4.I), т.е. m_{jk} выписывалось между $m_{j,k+1}$ и $m_{j+1,k+1}$. Теперь следует поступить так. Сперва m_{jk} располагаются в виде схемы (4.I), а затем каждый из первых α элементов $(n-1)$ – ой строки нужно сместить в соседний слева интервал (определяемый элементами n – ой строки) и каждый из последних β элементов $(n-1)$ – ой строки в соседний справа интервал; точно так же нужно поступить с элементами $(n-2)$–ой строки (по отношению к элементам $(n-1)$ –ой строки) и т.д. вплоть до элементов p – ой строки, включая её; расположение элементов каждой из остальных строк (по отношению к элементам следующей выше строки) сохраняется неизменным. Эти расстановки естественным образом отражают неравенства (4.I2).

Рассмотрим один простой пример: случай алгебры $L(4,3)$. Имеется пять разбиений числа $p=4$ в сумму двух целых неотрицательных чисел: $p=4+0, 3+1, 2+2, 1+3, 0+4$; возьмем разбиение $p=3+1$. Соответствующая схема выглядит так:

$$m = \left[\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & m_{17} & & m_{27} & & m_{37} & & m_{47} & m_{57} & m_{67} & & m_{77} & \\
 & & m_{16} & & m_{26} & & m_{36} & & & m_{46} & m_{56} & & & m_{66} & \\
 & m_{15} & & m_{25} & & m_{35} & & & & m_{45} & & & & & m_{55} \\
m_{14} & & m_{24} & & m_{34} & & & & & & & & & & m_{44} \\
 & m_{13} & & m_{23} & & & & & & m_{33} & & & & & \\
 & & m_{12} & & & & m_{22} & & & & & & & & \\
 & & & & m_{11} & & & & & & & & & &
\end{array}\right].$$

Нетрудно убедиться в том, что всегда имеется $p+1$ разбиений $p=\alpha+\beta$ и бесконечное множество схем с фиксированной верхней строкой и с фиксированным разбиением. Введем гильбертово пространство H, в котором эти схемы образуют ортонормированный базис; иными словами, как и раньше, каждой схеме m соответствует некоторый орт m. Операторы $A_{k\ell}$ задаются теми же формулами (4.3–5) и (4.II), что и в случае алгебры $L(n)$, причем опять в (4.4) и (4.5) не войдут недопустимые схемы (так как для таких и только для таких схем $a^j_{k-1} - b^j_{k-1} = 0$) и опять знаменатели коэффициентов a^j_{k-1} и b^j_{k-1} не аннулируются (для допустимых схем) – все это вытекает из (4.7–9) и (4.I2). Однако теперь в формулах (4.7) и (4.8) для a^j_{k-1} и b^j_{k-1} подкоренные выражения могут быть отрицательными, так что нужно дополнительно указать, какие знаки приписываются квадратным корням. Рассмотрим сперва знаки подкоренных выражений $\left(a^j_{k-1}\right)^2$ и $\left(b^j_{k-1}\right)^2$. Нетрудно увидеть, что в силу (4.7–9) и (4.I2)

$$\operatorname{sign}\left(a^j_{k-1}\right)^2 = \operatorname{sign}\left(b^j_{k-1}\right)^2 = \begin{cases} +1, & k \neq p+1, \\ -1, & k = p+1. \end{cases}$$

Принимая это во внимание, мы полагаем

$$\arg a_{k-1}^{j} = \arg b_{k-1}^{j} = \begin{cases} 0, & k \neq p+1 \\ \frac{\pi}{2}, & k = p+1 \end{cases};$$

тем самым выражения (4.4) и (4.5) для операторов $A_{k,k-1}$ и $A_{k-1,k}$ однозначно определены, причем

$$\bar{a}_{k-1}^{j} = \varepsilon_k a_{k-1}^{j}, \quad \bar{b}_{k-1}^{j} = \varepsilon_k b_{k-1}^{j}, \quad \varepsilon_k = \begin{cases} +1, & k \neq p+1, \\ -1, & k = p+1. \end{cases} \tag{4.13}$$

Так как в случае алгебры $L(n)$ $(q=0)$ имеем $p+1 = n+1$ и, следовательно, $k \neq p+1$ $(k \leq n)$, то в этом случае $\varepsilon_k = +1$ и формулы (4.13) превращаются в формулы (4.10). В силу этого и всего вышесказанного насчет A_{kk}, $A_{k,k-1}$, $A_{k-1,k}$ и $A_{k\ell}$ при $|k-\ell|>1$ в дальнейшем мы не будем рассматривать отдельно частный случай алгебры $L(n)$ – соответствующую информацию о нем можно получить из общего случая алгебры $L(p,q)$ при $q=0$. Это возможно, потому что, как мы увидим, все дальнейшие выкладки будут основываться лишь на упомянутых – одинаковых для $L(p,q)$ и $L(n)$ – свойствах операторов A_{kk}, $A_{k,k-1}$, $A_{k-1,k}$ и коэффициентов a_{k-1}^{j} и b_{k-1}^{j}.

Чтобы убедиться, что определенные выше операторы $A_{k\ell}$ задают представление алгебры $L(p,q)$, достаточно доказать (см. § 3), что они удовлетворяют (3.1) и (3.4). Коммутационные соотношения (3.1) мы проверим позже (см. § 5, § 6 и § 7, B), а здесь займемся соотношениями эрмитовости (3.4). Неприводимость и попарная неэквивалентность всех рассматриваемых представлений также будут установлены позже (см. § 8).

Итак, приступаем к проверке соотношений эрмитовости. Сначала докажем, что

$$A_{kk}^{+} = A_{kk}, \quad A_{k,k-1}^{+} = \varepsilon_k A_{k-1,k}, \quad \varepsilon_k = \begin{cases} +1, & k \neq p+1, \\ -1, & k = p+1. \end{cases} \tag{4.14}$$

Обозначим через $\langle n|A_{k\ell}|m\rangle$ матричные элементы оператора $A_{k\ell}$ в базисе $\{m\}$, а через δ_{nm} – соответствующий символ Кронекера. Тогда, принимая во внимание, что базис $\{m\}$ ортонормирован на основании (4.3-5), легко находим

$$\langle n|A_{kk}|m\rangle = (\tau_k - \tau_{k-1})\delta_{nm}, \tag{4.15}$$

$$\langle n|A_{k,k-1}|m\rangle = \sum_{j=1}^{k-1} a_{k-1}^{j}(m)\delta_{n,m_{k-1}^{j}}, \tag{4.16}$$

$$\langle n|A_{k-1,k}|m\rangle = \sum_{j=1}^{k-1} b_{k-1}^{j}(m)\delta_{n,m_{k-1}^{\hat{j}}}. \tag{4.17}$$

Кроме того, как нетрудно показать с помощью (4.7) и (4.8),

$$a_{k-1}^{j}(m) = b_{k-1}^{j}(m_{k-1}^{j}), \quad b_{k-1}^{j}(m) = a_{k-1}^{j}(m_{k-1}^{\hat{j}}). \tag{4.18}$$

Наконец, нетрудно убедиться в том, что n совпадает с m_{k-1}^{j} тогда и только тогда, когда m совпадает с $n_{k-1}^{\hat{j}}$, так что

$$\delta_{n,m^j_{k-1}} = \delta_{m,n^{\hat{j}}_{k-1}} . \tag{4.19}$$

На основании (4.I3) и (4.I6–I9) получаем

$$\langle m|A^+_{k,k-1}|n\rangle = \overline{\langle n|A_{k,k-1}|m\rangle} = \sum_{j=1}^{k-1} \bar{a}^j_{k-1}(m)\delta_{n,m^j_{k-1}} = \sum_{j=1}^{k-1} \bar{b}^j_{k-1}(m^j_{k-1})\delta_{n,m^j_{k-1}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \bar{b}^j_{k-1}(n)\delta_{n,m^j_{k-1}} = \varepsilon_k \sum_{j=1}^{k-1} b^j_{k-1}(n)\delta_{m,n^{\hat{j}}_{k-1}} = \varepsilon_k \langle m|A_{k-1,k}|n\rangle ,$$

т.е. $A^+_{k,k-1} = \varepsilon_k A_{k-1,k}$, причем ε_k то же самое, что и в (4.I4). Осталось доказать, что $A^+_{kk} = A_{kk}$. Но это равенство сразу вытекает из (4.I5), так как в силу (4.6) коэффициенты $\tau_k - \tau_{k-1}$ вещественны.

Заметим теперь, что при $|k-\ell| \le 1$ (3.4) сводится к (4.I4). Поэтому мы можем продолжить доказательство (3.4) по индукции. Предположим, что (3.4) имеет место при $|k-\ell| \le h-1$, $h>1$. Принимая во внимание, что , как нетрудно убедиться,

$$\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{ij} , \tag{4.20}$$

на основании предположения индукции и (4.II) получаем

$$A^+_{k,k-h} = [A_{k,k-1}, A_{k-1,k-h}]^+ = [A^+_{k-1,k-h}, A^+_{k,k-1}] = \varepsilon_{k,k-1}\varepsilon_{k-1,k-h}[A_{k-h,k-1}, A_{k-1,k}] = \varepsilon_{k,k-h} A_{k-h,k}$$

и аналогично

$$A^+_{k-h,k} = \varepsilon_{k-h,k} A_{k,k-h} .$$

Следовательно, (3.4) имеет место и при $|k-\ell| = h$, что и требовалось доказать.

Отметим ещё, что вторая часть вышеприведенного доказательства не зависит от того, с каким (унитарным) представлением алгебры $L(p,q)$ мы имеем дело. Поэтому всегда в таких случаях достаточно проверять только те из соотношений эрмитовости, которые входят в (4.I4).

§ 5. Редукция системы коммутационных соотношений

Здесь мы установим, что аналогичная ситуация возникает при проверке (3.I). Пусть задана система операторов A_{kk}, $A_{k,k-1}$, $A_{k-1,k}$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
&[A_{ii}, A_{kk}] = 0 , \\
&[A_{ii}, A_{k,k-1}] = [A_{ii}, A_{k-1,k}] = 0 , \quad i = k, k-1, \\
&[A_{ii}, A_{i,i-1}] = [A_{i,i-1}, A_{i-1,i-1}] = A_{i,i-1} , \\
&[A_{i-1,i-1}, A_{i-1,i}] = [A_{i-1,i}, A_{ii}] = A_{i-1,i} , \\
&[A_{i,i-1}, A_{i-1,i}] = A_{ii} - A_{i-1,i-1} , \\
&[A_{i,i-1}, A_{k-1,k}] = 0 , \quad i \ne k, \\
&[A_{i,i-1}, A_{k,k-1}] = [A_{i-1,i}, A_{k-1,k}] = 0 , \quad i \ne k \pm 1
\end{aligned} \tag{5.I}$$

и пусть операторы $A_{\kappa\ell}$ определяются рекуррентными формулами (4.II). Тогда, если[ж)]

$$[A_{i,i\pm2}, A_{i,i\pm1}] = [A_{i,i\pm2}, A_{i\pm1,i\pm2}] = 0, \tag{5.2}$$

то $A_{\kappa\ell}$ удовлетворяют (3.I). Это означает, что нет надобности проверять все соотношения (3.I) - достаточно проверить только (5.I) и (5.2).

Прежде всего заметим, что если соотношения

$$[A_{ij}, A_{\kappa,\kappa+\Delta}] = \delta_{\kappa j} A_{i,\kappa+\Delta} - \delta_{i,\kappa+\Delta} A_{\kappa j}, \quad \Delta = 0, \pm1 \tag{5.3}$$

уже доказаны, то из них легко получается (3.I) индукцией по $|\kappa-\ell|$. В самом деле, при $|\kappa-\ell| \leq 1$ (3.I) сводится к (5.3). Предположим теперь, что (3.I) имеет место при $|\kappa-\ell| \leq h-1$, $h>1$ (и, конечно, при всех i и j). Тогда, при помощи тождества Якоби и (4.II), находим

$$[A_{ij}, A_{\kappa,\kappa-h}] =$$

$$= [A_{ij},[A_{\kappa,\kappa-1}, A_{\kappa-1,\kappa-h}]] = [[A_{ij},A_{\kappa,\kappa-1}], A_{\kappa-1,\kappa-h}] + [A_{\kappa,\kappa-1},[A_{ij}, A_{\kappa-1,\kappa-h}]] =$$

$$= \delta_{\kappa j}[A_{i,\kappa-1}, A_{\kappa-1,\kappa-h}] - \delta_{i,\kappa-1}[A_{\kappa j}, A_{\kappa-1,\kappa-h}] + \delta_{\kappa-1,j}[A_{\kappa,\kappa-1}, A_{i,\kappa-h}] - \delta_{i,\kappa-h}[A_{\kappa,\kappa-1}, A_{\kappa-1,j}] =$$

$$= \delta_{\kappa j}(A_{i,\kappa-h} - \delta_{i,\kappa-h} A_{\kappa-1,\kappa-1}) - \delta_{i,\kappa-1}\delta_{\kappa-1,j} A_{\kappa,\kappa-h} + \delta_{\kappa-1,j}\delta_{i,\kappa-1} A_{\kappa,\kappa-h} - \delta_{i,\kappa-h}(A_{\kappa j} - \delta_{\kappa j} A_{\kappa-1,\kappa-1}) =$$

$$= \delta_{\kappa j} A_{i,\kappa-h} - \delta_{i,\kappa-h} A_{\kappa j}$$

и аналогично

$$[A_{ij}, A_{\kappa-h,\kappa}] = \delta_{\kappa-h,j} A_{i\kappa} - \delta_{i\kappa} A_{\kappa-h,j}.$$

Следовательно, (3.I) имеет место и при $|\kappa-\ell| = h$, что и требовалось доказать.

Итак, доказательство вышеприведенного утверждения будет завершено, как только мы установим, что из (5.I) и (5.2) вытекает (5.3). Чтобы не перегружать изложения, здесь мы докажем только соотношения

$$[A_{ij}, A_{\kappa,\kappa-1}] = \delta_{\kappa j} A_{i,\kappa-1} - \delta_{i,\kappa-1} A_{\kappa j}, \quad i>j; \tag{5.4}$$

ж) В /2/ утверждается, что достаточно проверить только соотношения (5.I). Однако из них не вытекают соотношения (5.2), т.е. последние требуют особой проверки. Этой проверкой мы займемся позже (см. § 7,В), а здесь мы установим, что нет надобности проверять другие коммутационные соотношения, кроме (5.I) и (5.2). Во всем этом и состоит уточнение результатов работы /2/, о котором шла речь раньше (см. § I).

остальные из соотношений (5.3) доказываются аналогично.

Как легко видеть, согласно (4.II) и (5.I)

$$[A_{ij}, A_{kl}] = \delta_{kj} A_{il} - \delta_{il} A_{kj}, \quad |i-j|, \ |k-l| \le 1 . \tag{5.5}$$

Кроме того, нам понадобятся ещё следующие вспомогательные равенства

$$[A_{ik}, A_{kj}] = A_{ij} \ , \quad i > k > j, \tag{5.6}$$

$$[A_{i+1,i-1}, A_{ij}] = [A_{i+1,i}, A_{i+1,j}] = 0, \quad i > j , \tag{5.7}$$

поэтому мы сперва займемся ими. При предположении, что

$$[A_{i+1,i}, A_{kj}] = 0 , \quad i > k > j \tag{5.8}$$

и при помощи тождества Якоби, (4.II) и (5.5) получаем

$$[A_{i+1,i}, A_{k+1,j}] = [A_{i+1,i}, [A_{k+1,k}, A_{kj}]] = [[A_{i+1,i}, A_{k+1,k}], A_{kj}] + [A_{k+1,k}, [A_{i+1,i}, A_{kj}]] =$$
$$= \delta_{k+1,i} [A_{i+1,k}, A_{kj}] - \delta_{i+1,k} [A_{k+1,i}, A_{kj}] = 0,$$

если $i > k+1$. Заодно, согласно (5.5), имеем

$$[A_{i+1,i}, A_{j+1,j}] = 0, \quad i > j+1 .$$

Иными словами, мы индуктивно доказали (5.8). Теперь мы индуктивно докажем (5.6). В самом деле, в силу (4.II) при $i = k+1$ (5.6) очевидно. Предположим, что оно имеет место для некоторого i , $i > k > j$. Из этого при помощи тождества Якоби, (4.II) и (5.8) получаем

$$[A_{i+1,k}, A_{kj}] = [[A_{i+1,i}, A_{ik}], A_{kj}] =$$

$$= [[A_{i+1,i}, A_{kj}], A_{ik}] + [A_{i+1,i}, [A_{ik}, A_{kj}]] = [A_{i+1,i}, A_{ij}] = A_{i+1,j} ,$$

что и требовалось доказать. Нетрудно установить таким же методом и справедливость (5.7), основываясь на (5.2), (5.5) и (5.6); мы опускаем соответствующие рассуждения, так как в них нет никаких существенно новых элементов, если не считать того, что они основываются на (5.2).

Теперь мы уже в состоянии доказать (5.4). В силу (5.5) при $i = j+1$ (5.4) очевидно. Поэтому мы продолжим доказательство по индукции. При предположении, что (5.4) имеет место для некоторого i, $i > j$ и при помощи тождества Якоби и (5.5-7) получаем

$$[A_{i+1,j}, A_{k,k-1}] =$$
$$= \delta_{kj} [A_{i+1,i}, A_{i,j-1}] - \delta_{k,i+1} [A_{i+1,i}, A_{i+1,j}] + \delta_{ki} [A_{i+1,i-1}, A_{ij}] - \delta_{k,i+2} [A_{i+2,i}, A_{ij}] =$$
$$= \delta_{kj} A_{i+1,j-1} - \delta_{k,i+2} A_{i+2,j} = \delta_{kj} A_{i+1,k-1} - \delta_{i+1,k-1} A_{kj} .$$

Этим доказательство (5.4), а значит – и (3.I), закончено.

Отметим ещё, что фактически нет надобности рассматривать при всех значениях $i \neq k,\ k-1$ коммутационные соотношения

$$[A_{ii}, A_{k,k-1}] - [A_{ii}, A_{k-1,k}] = 0\ ,$$

входящие в (5.I). Достаточно рассматривать только те из них, для которых $i = k+1,\ k+2$. Остальные получаются индуктивно. Для краткости здесь мы получим только соотношения

$$[A_{ii}, A_{k,k-1}] = 0\ ,\quad i > k;$$

опущенные нами доказательства проводятся аналогичным образом. Согласно вышесказанному, последнее равенство имеет место при $i = k+1$. Кроме того, если

$$[A_{i-1,i-1}, A_{k,k-1}] = 0\ ,\quad i-1 > k,$$

то при помощи тождества Якоби и (5.I) находим

$$[A_{ii}, A_{k,k-1}] = [A_{ii} - A_{i-1,i-1}, A_{k,k-1}] = [[A_{i,i-1}, A_{i-1,i}], A_{k,k-1}] =$$

$$= [[A_{i,i-1}, A_{k,k-1}]A_{i-1,i}] + [[A_{k,k-1}, A_{i-1,i}], A_{i,i-1}] = 0,$$

так как $i \neq k \pm 1$ и $k \neq i$ (здесь мы использовали только те из соотношений (5.I), которые записаны в последних трех строках). Доказательство закончено.

Отметим, наконец, что если вдобавок $A_{k\ell}$ удовлетворяют и условиям эрмитовости (3.4), то количество независимых коммутационных соотношений в (5.I) и (5.2) ещё уменьшается. В самом деле, пусть

$$[A_{ij}, A_{k\ell}] = \delta_{kj} A_{i\ell} - \delta_{i\ell} A_{kj}$$

при некотором выборе индексов i , j , k , ℓ (все соотношения (5.I) и (5.2) имеют указанный вид). Тогда, используя (3.4) вместе с (4.20), находим

$$[A_{\ell k}, A_{ji}] = \varepsilon_{k\ell}\varepsilon_{ij}[A^{+}_{k\ell}, A^{+}_{ij}] = \varepsilon_{k\ell}\varepsilon_{ij}[A_{ij}, A_{k\ell}]^{+} = \varepsilon_{k\ell}\varepsilon_{ij}(\delta_{kj}A^{+}_{i\ell} - \delta_{i\ell}A^{+}_{kj}) =$$

$$= \delta_{kj}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{j\ell}A^{+}_{i\ell} - \delta_{i\ell}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{ij}A^{+}_{kj} = \delta_{kj}\varepsilon^{2}_{i\ell}A_{\ell i} - \delta_{i\ell}\varepsilon^{2}_{kj}A_{jk} = \delta_{jk}A_{\ell i} - \delta_{\ell i}A_{jk}\ .$$

Принимая во внимание все вышесказанное, приходим к заключению, что в случае, когда $A_{k\ell}$ удовлетворяют и условиям эрмитовости (3.4), достаточно рассматривать только часть соотношений (5.I) и часть соотношений (5.2), а именно :

$$[A_{ii}, A_{kk}] = 0,$$

$$[A_{k-2,k-2}, A_{k,k-1}] = [A_{k+1,k+1}, A_{k,k-1}] = 0\ ,$$

$$[A_{ii}, A_{i,i-1}] = [A_{i,i-1}, A_{i-1,i-1}] = A_{i,i-1}\ ,$$

$$[A_{i,i-1}, A_{i-1,i}] = A_{ii} - A_{i-1,i-1}\ ,$$

$$\begin{gathered}[A_{i,i-1}, A_{k-1,k}] = 0, \quad i<k,\\ [A_{i,i-1}, A_{k,k-1}] = 0, \quad i \neq k \pm 1\end{gathered} \tag{5.9}$$

и соответственно

$$[A_{i,i-2}, A_{i,i-1}] = [A_{i,i-2}, A_{i-1,i-2}] = 0\,. \tag{5.10}$$

Таким образом, непосредственной проверке подлежит довольно узкая система коммутационных соотношений.

Как мы уже установили (см. § 4, В), операторы $A_{k\ell}$, определяемые формулами (4.3-5) и (4.11), удовлетворяют условиям эрмитовости (3.4). Следовательно, проверка коммутационных соотношений сводится к проверке (5.9) и (5.10).

§ 6. Проверка коммутационных соотношений (5.9)

Мы докажем только равенство

$$[A_{k,k-1}, A_{k-1,k}] = A_{kk} - A_{k-1,k-1}\,, \tag{6.1}$$

так как справедливость всех остальных коммутационных соотношений (5.9) устанавливается тривиальным образом. Сначала отметим, что в силу (4.7) и (4.8) имеют место следующие формулы:

$$a^h_{k-1}(m^{\hat{j}}_{k-1}) = \varkappa_{jh}\, a^h_{k-1}(m), \quad b^j_{k-1}(m^h_{k-1}) = \varkappa_{jh}\, b^j_{k-1}(m), \quad j \neq h, \tag{6.2}$$

где

$$\varkappa_{jh} = \left(\frac{\ell_{j,k-1} - \ell_{h,k-1}}{\ell_{j,k-1} - \ell_{h,k-1} + 2}\right)^{\frac{1}{2}} > 0$$

для допустимых схем и $\varkappa_{jh} = 0$ для недопустимых (как нетрудно показать при помощи (6.3), если одна из схем $(m^{\hat{j}}_{k-1})^h_{k-1}$ и $(m^h_{k-1})^j_{k-1}$ недопустима, то и другая недопустима, причем

$$a^h_{k-1}(m^{\hat{j}}_{k-1}) = b^j_{k-1}(m^h_{k-1}) = 0, \; j \neq h \quad ;$$

ср. § 4). Кроме того, нетрудно видеть, что

$$(m^j_{k-1})^{\hat{j}}_{k-1} = (m^{\hat{j}}_{k-1})^j_{k-1} = m, \quad (m^h_{k-1})^{\hat{j}}_{k-1} = (m^{\hat{j}}_{k-1})^h_{k-1}, \; j \neq h\,. \tag{6.3}$$

Тогда, согласно (4.4), (4.5), (4.18), (6.2) и (6.3), имеем

$$[A_{k,k-1}, A_{k-1,k}]\, m = \sum_{j,h=1}^{k-1} b^j_{k-1}(m)\, a^h_{k-1}(m^{\hat{j}}_{k-1})\, (m^{\hat{j}}_{k-1})^h_{k-1} - \sum_{j,h=1}^{k-1} a^h_{k-1}(m)\, b^j_{k-1}(m^h_{k-1})\, (m^h_{k-1})^{\hat{j}}_{k-1} =$$

$$= \sum_{j,h=1}^{k-1} \left[b_{k-1}^{j}(m) a_{k-1}^{h}(m_{k-1}^{\hat{j}}) - a_{k-1}^{h}(m) b_{k-1}^{j}(m_{k-1}^{h}) \right] (m_{k-1}^{\hat{j}})_{k-1}^{h} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \left[b_{k-1}^{j}(m) a_{k-1}^{j}(m_{k-1}^{\hat{j}}) - a_{k-1}^{j}(m) b_{k-1}^{j}(m_{k-1}^{j}) \right] (m_{k-1}^{\hat{j}})_{k-1}^{j} +$$

$$+ \sum_{j \neq h} \left[b_{k-1}^{j}(m) \varkappa_{jh} a_{k-1}^{h}(m) - a_{k-1}^{h}(m) \varkappa_{jh} b_{k-1}^{j}(m) \right] (m_{k-1}^{\hat{j}})_{k-1}^{h} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \left[b_{k-1}^{j}(m) b_{k-1}^{j}(m) - a_{k-1}^{j}(m) a_{k-1}^{j}(m) \right] m ,$$

так что, согласно (4.3), (6.I) будет выполняться, если

$$\sum_{j=1}^{k-1} \left[b_{k-1}^{j}(m) \right]^2 - \sum_{j=1}^{k-1} \left[a_{k-1}^{j}(m) \right]^2 = \tau_k - 2\tau_{k-1} + \tau_{k-2} . \tag{6.4}$$

Мы докажем более сильное утверждение, из которого, в частности, будет вытекать (6.4). Пусть $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{k-1}, z_1, \dots, z_{k-2}$ – независимые комплексные переменные. Положим:

$$x = (x_1, \dots, x_k), \quad y = (y_1, \dots, y_{k-1}), \quad z = (z_1, \dots, z_{k-2}),$$

$$\varphi(x, y, z | \Delta) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\prod_{i=1}^{k} (x_i - y_j + 1 - \Delta) \prod_{i=1}^{k-2} (z_i - y_j - \Delta)}{\prod_{i \neq j} (y_i - y_j + 1 - \Delta)(y_i - y_j - \Delta)} , \tag{6.5}$$

$$f(x, y, z) = \varphi(x, y, z | 0) - \varphi(x, y, z | 1) . \tag{6.6}$$

Тогда имеет место тождество

$$f(x, y, z) = 1 + \sum_{i=1}^{k} x_i - 2 \sum_{i=1}^{k-1} y_i + \sum_{i=1}^{k-2} z_i . \tag{6.7}$$

В силу (4.6-9), (6.5) и (6.6) из этого тождества при $x_i = l_{ik}$, $i = 1, \dots, k$, $y_i = l_{i,k-1}$, $i = 1, \dots, k-1$, $z_i = l_{i,k-2}$, $i = 1, \dots, k-2$ получается (6.4).

Приступаем к доказательству тождества (6.7). Если привести выражение для $f(x, y, z)$ к общему знаменателю, то в силу (6.5) и (6.6) получится

$$f(x, y, z) = \frac{P(x, y, z)}{\prod_{i<j} (y_i - y_j + 1)(y_i - y_j)(y_i - y_j - 1)} = \frac{P(x, y, z)}{\prod_{i<j} (y_i - y_j) \prod_{i<j} \left[(y_i - y_j)^2 - 1 \right]} , \tag{6.8}$$

где $P(x, y, z)$ – полином степени не выше $N + 2$, причем через N мы обозначили степень знаменателя. Кроме того, при помощи (6.5) нетрудно убедиться в том, что функция $\varphi(x, y, z | \Delta)$ симметрична относительно каждой системы переменных x, y, z (в отдельности). Согласно (6.6), такое же свойство имеет и функция $f(x, y, z)$.

Покажем сначала, что $f(x, y, z)$ не имеет особенностей. В самом деле, если фиксировать подходящим образом все аргументы x, y, z, кроме y_1, то в силу (6.5) $\varphi(x,y,z|0)$ и $\varphi(x,y,z|1)$, рассматриваемые как функции от y_1, будут иметь простой полюс при $y_1 = y_2 + 1$. Обозначим вычеты этих функций в указанном полюсе соответственно через res_0 и res_1. На основании (6.5) получаем

$$res_0 = res_1 = \frac{\prod\limits_{i=1}^{K} (x_i - y_2) \prod\limits_{i=1}^{K-2} (z_i - y_2 - 1)}{\prod\limits_{i \neq 1,2} (y_i - y_2)(y_i - y_2 - 1)} .$$

Раз $res_0 = res_1$, то в силу (6.6) $f(x,y,z)$, рассматриваемая как функция от y_1, не имеет особенности при $y_1 = y_2 + 1$. В силу отмеченной выше симметрии $f(x,y,z)$ она не имеет особенности и при $y_2 = y_1 + 1$. Следовательно, согласно (6.8), полином $P(x,y,z)$, рассматриваемый как функция всех своих аргументов, делится на $y_1 - y_2 \pm 1$, а из этого вытекает, что он делится и на $(y_1 - y_2)^2 - 1$. Опять в силу симметрии то же самое можно утверждать и для $(y_i - y_j)^2 - 1$, $i < j$. В конечном итоге мы приходим к заключению, что $P(x,y,z)$ делится на полином

$$\prod_{i<j} \left[(y_i - y_j)^2 - 1 \right].$$

Кроме того, очевидно, знаменатель в (6.8) является антисимметричной функцией от $y_1, \ldots, y_{K-1}$ и, так как функция $f(x,y,z)$ симметрична по этим же аргументам, то полином $P(x,y,z)$ должен быть антисимметричным по ним. Как известно, из этого вытекает, что он должен делиться на полином

$$\prod_{i<j} (y_i - y_j).$$

Итак, $P(x,y,z)$ делится на весь знаменатель в (6.8), т.е. $f(x,y,z)$ является полиномом степени не выше $(N+2) - N = 2$. Теперь мы покажем, что фактически степень не больше 1 и вычислим свободный член этого полинома. Для этой цели примем во внимание, что в силу только что доказанного утверждения $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, где λ – новая комплексная переменная, является полиномом по λ степени не выше 2:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \sum_{s=0}^{2} P_s(x,y,z) \lambda^s , \tag{6.9}$$

где $P_s(x,y,z)$ – либо ноль, либо однородный полином степени s, $s = 0, 1, 2$. С другой стороны, из (6.5) получаем

$$\varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z|0) = \sum_{j=1}^{K-1} \frac{\prod\limits_{i=1}^{K} (\lambda x_i - \lambda y_j + 1) \prod\limits_{i=1}^{K-2} (z_i - y_j)}{\prod\limits_{i \neq j} (\lambda y_i - \lambda y_j + 1)(y_i - y_j)} ,$$

$$\varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z|1) = \sum_{j=1}^{K-1} \lambda^2 \frac{\prod\limits_{i=1}^{K} (x_i - y_j) \prod\limits_{i=1}^{K-2} (\lambda z_i - \lambda y_j - 1)}{\prod\limits_{i \neq j} (y_i - y_j)(\lambda y_i - \lambda y_j - 1)} .$$

Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left[\frac{1}{\lambda^2}\varphi(\lambda x,\lambda y,\lambda z|0)\right]=\lim_{\lambda\to\infty}\left[\frac{1}{\lambda^2}\varphi(\lambda x,\lambda y,\lambda z|1)\right]=\sum_{j=1}^{K-1}\frac{\prod_{i=1}^{K}(x_i-y_j)\prod_{i=1}^{K-2}(z_i-y_j)}{\prod_{i\neq j}(y_i-y_j)^2} \tag{6.10}$$

и, кроме того, согласно (6.6) и (6.9),

$$\sum_{s=0}^{2}P_s(x,y,z)\lambda^s=\sum_{j=1}^{K-1}\frac{\prod_{i=1}^{K}(\lambda x_i-\lambda y_j+1)\prod_{i=1}^{K-2}(z_i-y_j)}{\prod_{i\neq j}(\lambda y_i-\lambda y_j+1)(y_i-y_j)}-\lambda^2\sum_{j=1}^{K-1}\frac{\prod_{i=1}^{K}(x_i-y_j)\prod_{i=1}^{K-2}(\lambda z_i-\lambda y_j-1)}{\prod_{i\neq j}(y_i-y_j)(\lambda y_i-\lambda y_j-1)}.$$

Подставляя $\lambda=0$ в последнее тождество, находим

$$P_0(x,y,z)=\sum_{j=1}^{K-1}\frac{\prod_{i=1}^{K-2}(z_i-y_j)}{\prod_{i\neq j}(y_i-y_j)}.$$

Так как, согласно вышесказанному, P_0 – полином нулевой степени, т.е. $P_0=const$, то

$$P_0=P_0(x,y,z)_{\substack{z_i=y_i\\ i\leq K-2}}=\sum_{j=1}^{K-2}\frac{\prod_{i=1}^{K-2}(y_i-y_j)}{\prod_{i\neq j}(y_i-y_j)}+\frac{\prod_{i=1}^{K-2}(y_i-y_{K-1})}{\prod_{i\neq K-1}(y_i-y_{K-1})}=\frac{\prod_{i=1}^{K-2}(y_i-y_{K-1})}{\prod_{i=1}^{K-2}(y_i-y_{K-1})}=1. \tag{6.11}$$

Далее, в силу (6.6) и (6.10) имеем

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left[\frac{1}{\lambda^2}f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\right]=0.$$

Согласно (6.9), левая сторона этого равенства не что иное, как $P_2(x,y,z)$. Стало быть,

$$P_2(x,y,z)=0. \tag{6.12}$$

Подставим теперь $\lambda=1$ в (6.9) и, с учетом (6.11) и (6.12), находим

$$f(x,y,z)=1+P_1(x,y,z). \tag{6.13}$$

Из вышесказанного ясно, что полином $P_1(x,y,z)$ симметричен относительно каждой системы переменных x, y, z (в отдельности); кроме того, он однороден и его степень равна 1.

Как известно, из всего этого вытекает, что он должен представлять собой линейную комбинацию от $\sum_{i=1}^{K}x_i$, $\sum_{i=1}^{K-1}y_i$, $\sum_{i=1}^{K-2}z_i$. Тогда в силу (6.13) имеем:

$$f(x,y,z)=1+A\sum_{i=1}^{K}x_i+B\sum_{i=1}^{K-1}y_i+C\sum_{i=1}^{K-2}z_i, \tag{6.14}$$

где $A, B, C = const.$

Остается подсчитать коэффициенты A, B, C. Для этой цели положим в (6.5) $x_i = y_i$, $i=1,\dots,k-1$ и $z_i = y_i$, $i=1,\dots,k-2$, в результате чего находим:

$$\varphi(x^0; y, z^0 | \Delta) = \sum_{j=1}^{k-2} \frac{(1-\Delta)(x_k - y_j + 1 - \Delta)(-\Delta)}{y_{k-1} - y_j - \Delta} + (1-\Delta)(x_k - y_{k-1} + 1 - \Delta),$$

где x^0 и z^0 получаются из x и z указанным выбором значений аргументов. Тогда, согласно (6.6),

$$f(x^0; y, z^0) = \varphi(x^0; y, z^0/0) - \varphi(x^0; y, z^0/1) = x_k - y_{k-1} + 1 .$$

С другой стороны, согласно (6.I4),

$$f(x^0; y, z^0) = 1 + A x_k + (A+B) y_{k-1} + (A+B+C) \sum_{i=1}^{k-2} y_i .$$

Так как оставшиеся аргументы независимы между собой, мы можем сравнить коэффициенты в этих двух выражениях для $f(x^0, y, z^0)$. Таким образом, получаем

$$A = 1, \quad A+B = -1, \quad A+B+C = 0.$$

Значит, $A = C = 1$, $B = -2$. Подставляем значения A, B, C в (6.I4) и получаем тождество (6.7), что и требовалось доказать.

§ 7. Общая формула для операторов $A_{k\ell}$ и проверка коммутационных соотношений (5.IC)

А. Ф О Р М У Л А Д Л Я $A_{k\ell}$

Всюду в дальнейшем мы подразумеваем, что каждый индекс типа i_s пробегает множество значений $1, \dots, s$. Пусть нам дана произвольная схема m и пусть величины $a_{k-1}^j(m)$ и $b_{k-1}^j(m)$ определяются формулами (4.7) и (4.8), а параметры ℓ_{ik} – формулой (4.9). Положим:

$$a_{i_{k-1}\dots i_\ell}(m) = \prod_{s=\ell+1}^{k} a_{i_{s-1}}(m) \prod_{s=\ell+2}^{k} \frac{\varepsilon_{i_{s-1} i_{s-2}}(m)}{c_{i_{s-1} i_{s-2}}(m)}, \quad k > \ell, \tag{7.I}$$

$$b_{i_k \dots i_{\ell-1}}(m) = \prod_{s=k+1}^{\ell} b_{i_{s-1}}(m) \prod_{s=k+2}^{\ell} \frac{\varepsilon_{i_{s-1} i_{s-2}}(m)}{c_{i_{s-1} i_{s-2}}(m)}, \quad k < \ell, \tag{7.2}$$

где

$$a_{i_s}(m) = a_s^{i_s}(m), \quad b_{i_s}(m) = b_s^{i_s}(m), \tag{7.3}$$

$$c_{i_s i_t}(m) = \left[(\ell_{i_s s} - \ell_{i_t t} + 1)(\ell_{i_s s} - \ell_{i_t t})\right]^{\frac{1}{2}} \geq 0, \tag{7.4}$$

$$\varepsilon_{i_s i_t}(m) = \mathrm{sign}(\ell_{i_s s} - \ell_{i_t t}). \tag{7.5}$$

Наконец, пусть схемы $m_{i_{k-1}\dots i_\ell}$ и $m_{\hat{i}_k\dots\hat{i}_{\ell-1}}$ определяются индуктивно следующим образом:

$$m_{i_{k-1}\dots i_\ell} = (m_{i_{k-1}\dots i_{\ell+1}})_\ell^{i_\ell}, \quad k>\ell, \quad m_{\hat{i}_k\dots\hat{i}_{\ell-1}} = (m_{\hat{i}_k\dots\hat{i}_{\ell-2}})_{\ell-1}^{\hat{i}_{\ell-1}}, \quad k<\ell \tag{7.6}$$

(ср. § 4), причем

$$m_{i_s} = m_s^{i_s}, \quad m_{\hat{i}_s} = m_s^{\hat{i}_s} \tag{7.7}$$

(см. § 4); фактически порядок индексов у $m_{i_{k-1}\dots i_\ell}$ и $m_{\hat{i}_k\dots\hat{i}_{\ell-1}}$ несущественен (ср. (6.3)), так что в силу (7.6) имеем, например:

$$(m_{i_{\ell-1}})_{i_{k-1}\dots i_\ell} = (m_{i_{k-1}\dots i_\ell})_{i_{\ell-1}} = m_{i_{k-1}\dots i_\ell i_{\ell-1}}. \tag{7.8}$$

Докажем, что имеют место следующие формулы:

$$A_{k\ell}\, m = \sum_{i_{k-1}\dots i_\ell} a_{i_{k-1}\dots i_\ell}(m)\, m_{i_{k-1}\dots i_\ell}, \quad k>\ell, \tag{7.9}$$

$$A_{k\ell}\, m = \sum_{i_k\dots i_{\ell-1}} b_{i_k\dots i_{\ell-1}}(m)\, m_{\hat{i}_k\dots\hat{i}_{\ell-1}}, \quad k<\ell. \tag{7.10}$$

Действительнс, при $\ell=k-1$ выражение (7.I) сводится к $a_{i_{k-1}}(m)$ (при $\ell=k-1$ произведение типа $\prod_{s=\ell+2}^{k}$ по определению считается равным единице). Следовательно, согласно (7.3) и (7.7), при $\ell=k-1$ формула (7.9) сводится к формуле (4.4). Аналогичным образом приходим к заключению, что при $k=\ell-1$ (7.I0) сводится к (4.5). Стало быть, справедливость (7.9) и (7.I0) установлена при $|k-\ell| = 1$. Поэтому мы продолжим рассуждения по индукции. Чтобы не перегружать изложения, мы закончим только доказательство формулы (7.9); доказательство формулы (7.I0) аналогично.

Итак, осталось установить, что, если формула (7.9) верна для некоторого $\ell<k$, то она верна и при замене ℓ на $\ell-1$. В самом деле, как мы видели, в силу (4.II) имеет место равенство (5.6). С его помощью и на основании предположения индукции, (4.4), (7.3) и (7.7) находим

$$A_{k,\ell-1}\, m = [A_{k\ell}, A_{\ell,\ell-1}]\, m = A_{k\ell}A_{\ell,\ell-1}\, m - A_{\ell,\ell-1}A_{k\ell}\, m =$$

$$= \sum_{i_{k-1}\dots i_{\ell-1}} \left[a_{i_{k-1}\dots i_\ell}(m_{i_{\ell-1}})\, a_{i_{\ell-1}}(m)\, (m_{i_{\ell-1}})_{i_{k-1}\dots i_\ell} - a_{i_{\ell-1}}(m_{i_{k-1}\dots i_\ell})\, a_{i_{k-1}\dots i_\ell}(m)\, (m_{i_{k-1}\dots i_\ell})_{i_{\ell-1}}\right],$$

или, согласно (7.8),

$$A_{k,\ell-1}\, m = \sum_{i_{k-1}\dots i_{\ell-1}} \left[a_{i_{k-1}\dots i_\ell}(m_{i_{\ell-1}})\, a_{i_{\ell-1}}(m) - a_{i_{\ell-1}}(m_{i_{k-1}\dots i_\ell})\, a_{i_{k-1}\dots i_\ell}(m)\right] m_{i_{k-1}\dots i_\ell i_{\ell-1}}. \tag{7.II}$$

Далее, можно показать при помощи (4.7), (7.I) и (7.3–8), что

$$a_{i_{k-1}\dots i_\ell}(m_{i_{\ell-1}}) = \lambda_{i_\ell i_{\ell-1}} a_{i_{k-1}\dots i_\ell}(m), \quad a_{i_{\ell-1}}(m_{i_{k-1}\dots i_\ell}) = \mu_{i_\ell i_{\ell-1}} a_{i_{\ell-1}}(m), \tag{7.12}$$

где

$$\lambda_{i_s i_t} = \left(\frac{\ell_{i_s s} - \ell_{i_t t} + 1}{\ell_{i_s s} - \ell_{i_t t}}\right)^{\frac{1}{2}} > 0, \quad \mu_{i_s i_t} = \lambda^{-1}_{i_s i_t}$$

для допустимых схем (и $\lambda_{i_s i_t} = \mu_{i_s i_t} = 0$ для недопустимых; ср. § 6). Так как

$$\lambda_{i_s i_t} - \mu_{i_s i_t} = \frac{|\ell_{i_s s} - \ell_{i_t t} + 1| - |\ell_{i_s s} - \ell_{i_t t}|}{[(\ell_{i_s s} - \ell_{i_t t} + 1)(\ell_{i_s s} - \ell_{i_t t})]^{\frac{1}{2}}},$$

то, согласно (7.4) и (7.5),

$$\lambda_{i_s i_t} - \mu_{i_s i_t} = \frac{\varepsilon_{i_s i_t}(m)}{c_{i_s i_t}(m)}$$

(для допустимых схем). Принимая это во внимание и подставляя (7.12) в (7.11), находим

$$A_{k,\ell-1} m = \sum_{i_{k-1}\dots i_{\ell-1}} a_{i_{k-1}\dots i_\ell}(m)\, a_{i_{\ell-1}}(m) \left(\lambda_{i_\ell i_{\ell-1}} - \mu_{i_\ell i_{\ell-1}}\right) m_{i_{k-1}\dots i_\ell i_{\ell-1}} =$$

$$= \sum_{i_{k-1}\dots i_{\ell-1}} a_{i_{k-1}\dots i_\ell}(m)\, a_{i_{\ell-1}}(m) \frac{\varepsilon_{i_\ell i_{\ell-1}}(m)}{c_{i_\ell i_{\ell-1}}(m)}\, m_{i_{k-1}\dots i_\ell i_{\ell-1}}$$

(как нетрудно убедиться, в рассматриваемой сумме участвуют лишь допустимые схемы, т.е. коэффициенты перед недопустимыми схемами равны нулю - ср. § 4). И так как в силу (7.I)

$$a_{i_{k-1}\dots i_\ell i_{\ell-1}}(m) = a_{i_{k-1}\dots i_\ell}(m)\, a_{i_{\ell-1}}(m) \frac{\varepsilon_{i_\ell i_{\ell-1}}(m)}{c_{i_\ell i_{\ell-1}}(m)},$$

то

$$A_{k,\ell-1} m = \sum_{i_{k-1}\dots i_{\ell-1}} a_{i_{k-1}\dots i_\ell i_{\ell-1}}(m)\, m_{i_{k-1}\dots i_\ell i_{\ell-1}},$$

что и требовалось доказать. Из вышесказанного ясно, что формулы (7.9) и (7.I0) являются следствием (4.II).

Заметим ещё, что (7.5) задает разные "правила знаков" в случае $L(n) = L(n,0)$, когда имеют место неравенства (4.2), и в случае $L(p,q)$, $q>0$, когда имеют место неравенства (4.I2). Несмотря на это, в силу вышесказанного действие операторов $A_{k\ell}$ задается единым образом в обоих случаях.

B. <u>П Р О В Е Р К А (5.I0)</u>

Мы проверим только одно из соотношений (5.I0), а именно

$$[A_{k,k-2}, A_{k-1,k-2}] = 0, \tag{7.13}$$

так как другое проверяется аналогично. Для этой цели мы применим только что доказанную формулу (7.9). С её помощью, рассуждая как при выводе (7.II), получаем (для краткости все замечания относительно допустимых и недопустимых схем здесь опущены)

$$[A_{k,k-2}, A_{k-1,k-2}]\, m =$$

$$= \sum_{i_{k-1} i_{k-2} j_{k-2}} \left[a_{i_{k-1} i_{k-2}}(m_{j_{k-2}})\, a_{j_{k-2}}(m) - a_{j_{k-2}}(m_{i_{k-1} i_{k-2}})\, a_{i_{k-1} i_{k-2}}(m) \right] m_{i_{k-1} i_{k-2} j_{k-2}} .$$

Далее, рассуждая как при выводе (7.I2), получаем

$$[A_{k,k-2}, A_{k-1,k-2}]\, m =$$

$$= \sum_{i_{k-1}} \sum_{i_{k-2} \neq j_{k-2}} \frac{a_{i_{k-1}}(m)\, a_{i_{k-2}}(m)\, a_{j_{k-2}}(m)\, \mathcal{E}_{i_{k-1} i_{k-2}}(m)}{C_{i_{k-1} i_{k-2}}(m)} \left(\nu_{i_{k-1} i_{k-2} j_{k-2}} - \nu^{-1}_{i_{k-1} i_{k-2} j_{k-2}} \right) m_{i_{k-1} i_{k-2} j_{k-2}} +$$

$$+ \sum_{i_{k-1}} \sum_{i_{k-2}} a_{i_{k-1}}(m)\, a_{i_{k-2}}(m)\, a_{i_{k-2}}(m_{i_{k-2}})\, \mathcal{E}_{i_{k-1} i_{k-2}}(m) \left[\frac{\nu_{i_{k-1} i_{k-2}}(m)}{C_{i_{k-1} i_{k-2}}(m_{i_{k-2}})} - \frac{\nu^{-1}_{i_{k-1} i_{k-2}}(m_{i_{k-2}})}{C_{i_{k-1} i_{k-2}}(m)} \right] m_{i_{k-1} i_{k-2} i_{k-2}},$$

где

$$\nu_{i_s i_t i_u} = \left[\frac{(\ell_{i_s s} - \ell_{i_u u} + 1)(\ell_{i_u u} - \ell_{i_t t} + 1)}{(\ell_{i_s s} - \ell_{i_u u})(\ell_{i_u u} - \ell_{i_t t} - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \nu_{i_s i_t}(m) = \left(\frac{\ell_{i_s s} - \ell_{i_t t} + 1}{\ell_{i_s s} - \ell_{i_t t}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

так что в силу (7.4) все слагаемые второй суммы равны нулю. Преобразовывая разность $\nu_{i_{k-1} i_{k-2} j_{k-2}} - \nu^{-1}_{i_{k-1} i_{k-2} j_{k-2}}$ с помощью (7.4) и (7.5) и подставляя полученный таким образом результат в первую сумму, находим

$$[A_{k,k-2}, A_{k-1,k-2}]\, m =$$

$$= \sum_{i_{k-1}} \sum_{i_{k-2} \neq j_{k-2}} \frac{\ell_{i_{k-2},k-2} + \ell_{j_{k-2},k-2} - 2\ell_{i_{k-1},k-1} - 1}{\left[(\ell_{i_{k-2},k-2} - \ell_{j_{k-2},k-2})^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a_{i_{k-1}}(m)\, a_{i_{k-2}}(m)\, a_{j_{k-2}}(m)\, \mathcal{E}_{i_{k-1} i_{k-2}}(m)\, \mathcal{E}_{i_{k-1} j_{k-2}}(m)}{C_{i_{k-1} i_{k-2}}(m)\, C_{i_{k-1} j_{k-2}}(m)} \cdot$$

$$\mathcal{E}_{i_{k-2} j_{k-2}}(m).$$

Так как в силу (7.5) выражение, стоящее под знаком суммирования, антисимметрично относительно i_{k-2} и j_{k-2}, то

$$[A_{k,k-2}, A_{k-1,k-2}]\, m = 0 .$$

Этим, ввиду произвольности схемы m, равенство (7.I3) доказано.

§ 8. Неприводимость и попарная неэквивалентность представлений алгебр $L(n)$ и $L(p,q)$ (дискретная серия)

A. НЕПРИВОДИМОСТЬ

Мы воспользуемся следующим критерием неприводимости: унитарное представление какой-нибудь алгебры Ли (какой-нибудь группы) является неприводимым тогда и только тогда, когда каждый диагональный оператор, который коммутирует со всеми операторами представления, кратен единичному оператору. Доказательство этого утверждения несложно (и по существу известно), поэтому мы его опускаем.

Теперь ясно, что для проверки неприводимости рассматриваемых нами представлений достаточно установить справедливость следующей импликации:

$$[\Lambda, A_{k,k-1}] = [\Lambda, A_{k-1,k}] = 0 \Rightarrow \Lambda = \lambda I, \tag{8.1}$$

где Λ - диагональный*), а I - единичный оператор в H и λ - число. Раз оператор Λ диагонален, то его матричные элементы $\langle n|\Lambda|m\rangle$ (ср. § 4, B) имеют следующий вид:

$$\langle n|\Lambda|m\rangle = \lambda_m \delta_{nm}, \tag{8.2}$$

где λ_m - числа. С учетом этого, (4.16) и (4.17) находим

$$\langle n|[\Lambda, A_{k,k-1}]|m\rangle = (\lambda_n - \lambda_m)\langle n|A_{k,k-1}|m\rangle = (\lambda_n-\lambda_m)\sum_{h=1}^{k-1} a_{k-1}^h(m)\delta_{n,m_{k-1}^h},$$

$$\langle n|[\Lambda, A_{k-1,k}]|m\rangle = (\lambda_n - \lambda_m)\langle n|A_{k-1,k}|m\rangle = (\lambda_n-\lambda_m)\sum_{h=1}^{k-1} b_{k-1}^h(m)\delta_{n,m_{k-1}^{\hat{h}}}.$$

Следовательно, при

$$[\Lambda, A_{k,k-1}] = [\Lambda, A_{k-1,k}] = 0$$

имеем

$$(\lambda_n-\lambda_m)\sum_{h=1}^{k-1} a_{k-1}^h(m)\delta_{n,m_{k-1}^h} = (\lambda_n-\lambda_m)\sum_{h=1}^{k-1} b_{k-1}^h(m)\delta_{n,m_{k-1}^{\hat{h}}} = 0.$$

---

*) Здесь, конечно, подразумевается, что Λ диагонален в том же базисе, в котором заданы $A_{k,k-1}$ и $A_{k-1,k}$.

В частности, при $n = m_{k-1}^{j}$ и $n = m_{k-1}^{\hat{j}}$ получаем

$$(\lambda_{m_{k-1}^{j}} - \lambda_m)\, a_{k-1}^{j}(m) = (\lambda_{m_{k-1}^{\hat{j}}} - \lambda_m)\, b_{k-1}^{j}(m) = 0, \quad j = 1, \ldots, k-1.$$

Так как для всех допустимых схем $a_{k-1}^{j}(m), b_{k-1}^{j}(m) \neq 0$ (см. § 4), то для таких схем

$$\lambda_{m_{k-1}^{j}} = \lambda_{m_{k-1}^{\hat{j}}} = \lambda_m, \quad j = 1, \ldots, k-1.$$

Иными словами, диагональные элементы оператора Λ, которые соответствуют (допустимым) схемам, присутствующим в разложении (4.4) либо в разложении (4.5), равны диагональному элементу, который соответствует исходной схеме m.

Назовем две схемы m и m' соседями, если m' присутствует (фактически, а не только формально!) в разложении (4.4) либо в разложении (4.5) (нетрудно убедиться в том, что "соседство" всегда симметрично). Две схемы назовем зацепленными, если они связаны цепочкой соседей. Из вышесказанного ясно, что, если схемы m и m' зацеплены, то диагональные элементы оператора Λ, соответствующие m и m', равны между собой. С другой стороны, как нетрудно показать при помощи (4.12), любые две (допустимые) схемы m и m' зацеплены, так что диагональные элементы λ_m и $\lambda_{m'}$ совпадают для каждой пары ортов m и m'. Стало быть, все λ_m одинаковы. Обозначая их общее значение через λ, из (8.2) получаем $\Lambda = \lambda I$. Этим импликация (8.1) доказана. Тем самым проверена неприводимость рассматриваемых нами представлений.

В. ПОПАРНАЯ НЕЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Как мы видели (см. § 4, В), каждое представление из дискретной серии определяется разбиением числа p и первой строкой соответствующих схем; назовем эту строку (одинаковую для всех схем данного представления) номером представления. При помощи (3.1) и (3.2) нетрудно убедиться в том, что операторы $A_{k\ell}, k,\ell = 1,..(n-1)$ определяют некоторую алгебру $L(p,q-1)$ (так же, как операторы $A_{k\ell}, \; k,\ell = 1,\ldots,n$ определяют алгебру $L(p,q)$), причем $L(p,q-1) \subset L(p,q)$. Продолжая это рассуждение по индукции, получаем убывающую цепочку алгебр

$$L(p,q) \supset L(p,q-1) \supset \cdots \supset L(p,0) \supset L(p-1,0) \supset \cdots \supset L(1,0). \tag{8.3}$$

Как мы увидим дальше, для проверки попарной неэквивалентности достаточно установить, что рассматриваемые нами представления $L(p,q)$ попарно неэквивалентны при предположении, что в случае $L(p,q-1)$ попарная неэквивалентность уже доказана (это позволит нам применить индукцию). Поэтому все дальнейшие рассуждения мы будем проводить при том же предположении. Кроме того, в дальнейшем, говоря о представлениях какой-нибудь алгебры $L(P,Q)$, мы всегда будем подразумевать, что речь идет о представлениях из соответствующей дискретной серии (конечно, если $Q>0$ ж)).

Любое неприводимое представление алгебры $L(p,q)$ является приводимым представлением подалгебры $L(p,q-1)$ и разлагается на некоторое множество неприводимых представлений $L(p,q-1)$. Каждое из последних характеризуется тем же самым разбиением числа жж) p и новым номером, совпадающим с $(n-1)$ - ой строкой некоторой из соответствующих схем для $L(p,q)$; обратно - каждая из упомянутых строк есть номер некоторого неприводимого представления $L(p,q-1)$. Указанное разложение однозначно, так как представления $L(p,q-1)$ входят в него с кратностью не большей единицы (все они попарно неэквивалентны в силу вышесформулированного предположения, поскольку их номера различны). Очевидно, номера представлений, содержащихся в этом разложении, пробегают некоторое счетное множество "значений", определяемое неравенствами (4.12). Назовем каждое такое множество интервалом представлений $L(p,q-1)$ относительно $L(p,q)$.

Пусть T и T' - два представления $L(p,q)$ с разбиениями $p=\alpha+\beta$, $p=\alpha'+\beta'$ и с номерами $(m_{1n},\ldots,m_{nn}),(m'_{1n},\ldots,m'_{nn})$ соответственно. Обозначим через $N(N')$ интервал представлений, определяемый разложением $T(T')$. Сначала мы покажем, что если представления T и T' эквивалентны, то интервалы N и N' совпадают. Действительно, допустим, что они не совпадают; без ограничения общности можно считать, что существует представление $L(p,q-1)$, номер которого содержится в N, но не содержится в N'. Тогда в силу вышесформулированного предположения все представления $L(p,q-1)$, на которые разлагается T', неэквивалентны этому представлению. Так как последнее содержится в разложении T, то разложения T и T' не совпадают, т.е. T и T' неэквивалентны (как мы установили выше, разложения определены однозначно!). Полученное противоречие доказывает, что N и N' совпадают.

Теперь мы установим, что если представления T и T эквивалентны, то их характеристики совпадают, т.е.

$$\alpha=\alpha' \quad (\beta=\beta'), \tag{8.4}$$

$$(m_{1n},\ldots,m_{nn})=(m'_{1n},\ldots,m'_{nn}). \tag{8.5}$$

В самом деле, допустим, что $\alpha\neq\alpha'$; без ограничения общности можно считать, что $\alpha>\alpha'$.

ж)Если $Q=0$, то соответствующая серия (см. её определение в § 4.А) содержит, как хорошо известно, все неприводимые представления $L(P,0)=L(p)$, так что в этом случае нет надобности пояснять, о каких представлениях идет речь.

жж)Конечно, эти слова не лишены смысла лишь при $q>1$, при $q=1$ имеем $L(p,q-1)=L(p)$ и о разбиении нельзя говорить. Однако для дальнейших рассуждений все это несущественно.

Пусть строка $(m_{1,n-1}, \ldots, m_{n-1,n-1})$ пробегает интервал N, а строка $(m'_{1,n-1}, \ldots, m'_{n-1,n-1})$ интервал N'. Тогда, согласно (4.12),

$$\min m_{\alpha,n-1} = m_{\alpha n}+1, \quad \min m'_{\alpha,n-1} = m'_{\alpha+\Delta+1,n}-\Delta,$$

$$\max m_{\alpha+1,n-1} = m_{\alpha+\delta+1,n}-\delta, \quad \max m'_{\alpha+1,n-1} = m'_{\alpha+\Delta+1,n}-\Delta, \tag{8.6}$$

где δ и Δ – целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq \delta \leq \Delta \leq 1$. С другой стороны, по условию T и T' эквивалентны; поэтому интервалы N и N', как мы только что доказали, должны совпадать. Следовательно, имеем

$$\min m_{i,n-1} = \min m'_{i,n-1}, \quad \max m_{i,n-1} = \max m'_{i,n-1}, \quad i=1, \ldots, n-1.$$

В частности,

$$\min m_{\alpha,n-1} = \min m'_{\alpha,n-1}, \quad \max m_{\alpha+1,n-1} = \max m'_{\alpha+1,n-1}$$

или, с учетом (8.6),

$$m_{\alpha n}+1 = m'_{\alpha+\Delta+1,n}-\Delta = m_{\alpha+\delta+1,n}-\delta.$$

Отсюда вытекает $(\delta \geq 0)$, что $m_{\alpha n} < m_{\alpha+\delta+1,n}$, а это противоречит неравенствам (4.12), в силу которых $m_{in} \geq m_{jn}$ при $i<j$. Полученное противоречие доказывает, что $\alpha=\alpha'$ и, следовательно, $\beta=\beta'$ $(\beta=p-\alpha, \beta'=p-\alpha')$. Таким образом, справедливость (8.4) установлена.

Раз $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ и интервалы N и N' совпадают, то, очевидно, $m_{in}=m'_{in}, i=1,\ldots,n$ при $q>1$ и $m_{in}=m'_{in}$, $i=1,\ldots,\alpha, \alpha+2, \ldots, n$ при $q=1$. Но, как мы увидим, всегда

$$\sum_{i=1}^{n} m_{in} = \sum_{i=1}^{n} m'_{in}, \tag{8.7}$$

так что во втором случае $(q=1)$ будем иметь

$$m_{\alpha+1,n} = \sum_{i=1}^{n} m_{in} - \sum_{i\neq\alpha+1} m_{in} = \sum_{i=1}^{n} m'_{in} - \sum_{i\neq\alpha+1} m'_{in} = m'_{\alpha+1,n},$$

т.е. опять $m_{in}=m'_{in}$, $i=1,\ldots,n$. Этим справедливость (8.5) также установлена. Осталось установить справедливость (8.7). Как хорошо известно, если два представления T и T' какой-нибудь алгебры Ли (какой-нибудь группы) эквивалентны, то любой фиксированный оператор из T и соответствующий ему в силу эквивалентности оператор из T' имеют одни и те же собственные значения. В частности, (единственные) собственные значения оператора Казимира первого порядка C_1 для двух эквивалентных представлений совпадают (напомним, что C_1 в отличие от операторов Казимира более высокого порядка всегда является элементом представления алгебры Ли). В нашем случае, как нетрудно убедиться, $C_1 = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ и, согласно (4.3) и (4.6), для представления T собственное значение этого оператора равно $\sum_{i=1}^{n} m_{in}$, а для $T' - \sum_{i=1}^{n} m'_{in}$; кроме того, по условию представления T и T' эквивалентны. Следовательно, в силу вышеуказанного свойства C_1 имеет место равенство (8.7), что и требовалось доказать.

Конечно, выше мы подразумевали, что $q>0$. Но и при $q=0$ имеет смысл говорить о номерах и интервалах представлений, причем можно доказать (доказательство аналогично вышеприведенному, поэтому мы его опускаем), что, если T и T' - два эквивалентных представления $L(\rho,0)=L(\rho)$, то соответствующие интервалы совпадают. После этого сразу видно, что номер T равен номеру T', т.е. опять характеристики совпадают, так как при $q=0$ номер представления определяет его полностью (см. § 4, А).

Итак, мы установили, что рассматриваемые нами представления $L(\rho,q)$ могут быть эквивалентны лишь тогда, когда их характеристики совпадают. Иными словами, указанные представления попарно неэквивалентны. Этот результат мы получили при предположении, что в случае $L(\rho,q-1)$ попарная неэквивалентность уже доказана. Вернемся теперь к цепочке алгебр (8.3). Как хорошо известно, представления $L(1,0)=L(1)$ попарно неэквивалентны. Объединяя этот факт с предыдущим результатом, получаем индуктивное доказательство следующего утверждения: рассматриваемые нами представления $L(\rho,q)$ попарно неэквивалентны.

ДОБАВЛЕНИЕ

В случае алгебры $L(p,1)$ аналогичным образом можно построить теорию (единственной – см. § I) " полунепрерывной" серии унитарных представлений. Рассмотрим схемы m типа (4.I), характеризуемые следующими условиями:

а) $m_{1n} = -\frac{n-1}{2} + \sigma$, $m_{nn} = \frac{n-1}{2} + \bar{\sigma}$, где σ – произвольное комплексное число и $n = p+1$;

b) остальные элементы схемы m являются целыми числами, причем все элементы m_{jk}, за исключением $m_{1,n-1}$ и $m_{n-1,n-1}$, удовлетворяют неравенствам $m_{j,k+1} \geq m_{jk} \geq m_{j+1,k+1}$;

с) элементы же $m_{1,n-1}$ и $m_{n-1,n-1}$ удовлетворяют лишь неравенствам $m_{1n-1} \geq m_{2n}$ и $m_{n-1,n-1} \leq m_{n-1,n}$ соответственно.

Возьмем множество таких схем с фиксированной верхней строкой; оно счетно. Введем гильбертово пространство H , в котором это множество схем определяет базис, и зададим операторы $A_{k\ell}$ формулами (4.3–5) и (4.II). Как легко убедиться при помощи условий а), b), с), коэффициенты a^j_{k-1} и b^j_{k-1} в этих формулах при $k \neq n$ являются вещественными числами, а a^j_{n-1} и b^j_{n-1} – чисто мнимыми числами. Для опеределенности будем считать, что

$$\arg a^j_{k-1} = \arg b^j_{k-1} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & k = n \end{cases},$$

а это означает, что опять будут иметь место соотношения (4.I3).

С помощью методов, которые были уже использованы в настоящем обзоре, можно проверить, что определенные выше операторы $A_{k\ell}$ задают (вообще говоря, неприводимое) представление алгебры $L(p,1)$ в пространстве H . Оно определяется верхней строкой соответствующих схем, т.е. комплексным числом σ и набором $n-2$ целых чисел $m_{2n}, \ldots, m_{n-1,n}$ (иными словами, часть определяющих параметров пробегает непрерывную совокупность значений, а остальная часть – дискретную совокупность; отсюда и происходит название "полунепрерывная" серия).

Отметим ещё следующее обстоятельство. Если $Im\,\sigma = 0$ и $Re\, m_{nn} = m_{nn}$ является целым числом, удовлетворяющим неравенству $m_{nn} \leq m_{n-1,n}$, то соответствующее представление приводимо и распадается на два неприводимых (бесконечномерных) представления, задающихся той же схемой m , но с дополнительными условиями на элемент $m_{n-1,n-1}$:

d) $m_{n-1,n} \geq m_{n-1,n-1} \geq m_{nn}$ для одного их этих двух представлений и

$m_{n-1,n-1} < m_{nn}$ – для другого.

Аналогичная ситуация возникает, когда $Im\,\sigma = 0$ и $Re\, m_{1n} = m_{1n}$ является целым числом, удовлетворяющим неравенству $m_{1n} \geq m_{2n}$. Справедливость этих утверждений устанавливается методами, которые были уже использованы нами в подобных случаях (см. § 8,В).

Что касается "полунепрерывных" серий в случае алгебры $L(p,q)$, $q>1$, то пока ещё не существует конструкции её представлений, аналогичной рассмотренной в настоящем обзоре конструкции Гельфанда-Цетлина-Граева.

Авторы обязаны во многом М.И. Граеву, который был инициатором создания обзора и выражают ему глубокую благодарность за полезные консультации, за ценные замечания и советы по ходу работы над рукописью, за плодотворные дискуссии. Авторы признательны И.М. Гельфанду за внимание и интерес к обзору. Они благодарят И.Т. Тодорова за постоянную поддержку.

Литература

1. И.М. Гельфанд, М.Л. Цетлин. ДАН СССР, 71, № 5, 825 (1950).
2. И.М. Гельфанд, М.И. Граев. Изв. АН СССР, серия математическая, 29, № 6, 1329 (1965).
3. М.И. Граев. Труды Московского математического общества, 7, 335 (1958).
4. L.C. Biedenharn. J.Math.Phys., 4, 436 (1963); G.E.Baird and L.C.Biedenharn J.Math. Phys., 4, 1449 (1963); 5, 1723 (1964); 5, 1730 (1964); 6, 1847 (1965).
5. L.C.Biedenharn, J.Nuyts and N.Straumann. Ann. Instr. H. Poincare, Sect. A: Physique theorique, 3, 13 (1965).
6. B.Kursunoglu. Two Massless states of Matter, University of Miami preprint, Coral Gables (1964); Symmetry and Strong Interaction. In: Symmetry Principles at High-Energy, Proceedings of the Second Coral Gables Conference, San Francisco and London, 1965, p. 160-175.
7. А.М. Переломов, В.С. Попов. ЯФ, 3, 924 (1966).
8. Harish Chandra. Acta math., 113, 241-318 (1965); 116, 1-111 (1966); Publ.Math. N. 27, 5-54 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел 24 октября 1966 г.