ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

5 - 2959

Е.П. Жидков, И.В. Пузынин

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВВЕДЕНИЯ ПАРАМЕТРА ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1966

5 - 2959

Е.П. Жидков, И.В. Пузынин

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВВЕДЕНИЯ ПАРАМЕТРА ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Направлено в ЖВММФ

Некоторые задачи нелинейной теории поля, статистической теории ядра, вывода пучка из ускорителя и т.п. приводят к рассмотрению краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Наряду с качественными исследованиями этих задач возникает необходимость построения алгоритмов численного решения. Среди известных методов отметим, например, итерационный конечноразностный метод /1/. Доказательство сходимости метода основывается на принципе сжатых отображений, что налагает существенные ограничения на нелинейную часть уравнения. Другой подход к поставленной проблеме заключается в применении к решению краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка общего метода Ньютона решения функциональных уравнений, предложенного Л.В.Кантаровичем. Этот метод, разработанный Н.Н. Глинской и И.П. Мысовских /2/, предполагает довольно жесткие ограничения как на нелинейную часть уравнения, так и на выбор начального приближения в итерационной схеме. Известное распространение получил метод "стабилизации" для решения стационарных задач. Суть этого метода в применении к решению краевых задач заключается в следующем. Пусть дано нелинейное дифференциальное уравнение

$$L[y] = y'' + f(x,y) = 0 \qquad (0.1)$$

с граничными условиями

$$y(0) = y(1) = 0. \qquad (0.2)$$

Вводя непрерывный параметр "время t ", мы рассматриваем нестационарную задачу для функции $u(x,t)$:

$$u'_t = u''_{xx} + f(x,u) \qquad (0.3)$$

с граничными условиями

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad (0.4)$$

и с некоторым начальным условием

$$u(x,0) = \phi(x), \quad \phi(0) = \phi(1) = 0. \qquad (0.5)$$

Решение "стабилизируется", если при $t \to \infty$ $u'_t \to 0$. В этом случае решение нестационарной задачи сходится к решению задачи (0.1)-(0.2). В случае "стабилизации" можно применять различные сеточные методы, что позволяет обойти трудности, связанные с нелинейностью дифференциального уравнения. К сожалению, в работах, посвященных "стабилизации", например /3/, также налагаются существенные ограничения на функцию $f(x,y)$.

В предлагаемой работе изложен некоторый обобщенный метод стабилизации по непрерывному параметру решения краевых задач типа (0.1)-(0.2). Этот метод не налагает столь существенных ограничений на нелинейности уравнений; кроме того, он является более общим по сравнению с методом Н.Н. Глинской и И.П. Мысовских, поскольку излагаемый в /2/ алгоритм является частным случаем реализации предлагаемого метода. В разделе I настоящей работы предложен некоторый метод введения непрерывного параметра t, который может быть применен, кроме дифференциальных уравнений, к некоторым другим видам уравнений, например, трансцендентным алгебраическим, нелинейным интегральным. Здесь же сформулирован основной результат работы. Разделы II и III посвящены обоснованию предложенного метода. В разделе II доказывается существование в ограниченной области решения для полученной системы уравнения в частных производных.

В разделе III исследуется вопрос продолжимости решения системы при $t \to \infty$, а также оценивается скорость "стабилизации" решения системы к решению задачи (0.1)-(0.2).

В разделе IV приведены примеры.

1. Введем непрерывный параметр t в задаче (0.1)-(0.2) следующим образом. Рассмотрим функцию $y(x,t)$, для которой составим следующее дифференциальное соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial t} L_x[y] = -L_x[y], \tag{1.1}$$

где L_x - оператор частного дифференцирования по x, соответствующий (0.1).

Выражение $\frac{\partial}{\partial t} L_x[y]$ можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} L_x[y] = \frac{\partial}{\partial t} y''_{xx} + f'_y(x,y)y'_t$$

Предполагая, что $y(x,t)$ имеет непрерывную производную $\frac{\partial}{\partial t} y''_{xx}$ и обозначая y'_t через $v(x,t)$, приходим к следующей системе уравнений в частных производных, равносильной соотношению (1.1)

$$\begin{gathered} v''_{xx} + f'_y(x,y)v = -[y''_{xx} + f(x,y)], \\ y'_t = v. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Для полученной системы рассмотрим задачу: в полуполосе $0 \le x \le 1, 0 \le t < \infty$ найти функции $v(x,t)$ и $y(x,t)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} v(0,t) = v(1,t) = 0, \\ y(x,0) = \phi(x), \end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\phi(x)$ - некоторая известная дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем $\phi''(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0,1]$. Предполагается также, что $\phi(x)$ удовлетворяет краевому условию

$$\phi(0) = \phi(1) = 0 \tag{1.4}$$

Если решение задачи (1.2)-(1.3) существует, то, как легко видеть из (1.1), решение $y(x,t)$ стабилизируется к решению задачи (0.1)-(0.2). Действительно, из (1.1) непосредственно следует, что

$$L_x[y] = r(x)e^{-t}, \tag{1.5}$$

где $r(x)$ - некоторая непрерывная функция. Отсюда при $t \to \infty$ $L_x[y] \to 0$, т.е. решение стабилизируется, $y(x,t) \to y(x)$, где $y(x)$ - функция, удовлетворяющая (0.1). Выполнение краевого условия (0.2) обеспечивается условиями (1.3). Можно предположить, например, следующую реализацию предложенного метода. Выбираем шаг движения по параметру t, обозначим его τ. Разбиваем полуполосу $0 \le x \le 1, 0 \le t < \infty$ прямыми, параллельными оси x, $t = t_i$, $t_{i+1} - t_i = \tau$. Второе уравнение системы заменим каким-нибудь разностным аналогом, например,

$$\tau^{-1}[y(x,t_{i+1}) - y(x,t_i)] = v(x,t_i). \tag{1.6}$$

На слое $t = t_i$ решаем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $v(x,t_i)$

$$v''(x,t_i) + f'_y(x,y(x,t_i))v(x,t_i) = -[y''(x,t_i) + f(x,t_i)], \tag{1.7}$$

где функция $y(x,t_i)$ считается известной, с краевыми условиями

$$v(0,t_i) = v(1,t_i) = 0. \tag{1.8}$$

Переход к $(i+1)$-у слою осуществляется при помощи (1.6). Численное решение (1.7)-(1.8) можно реализовать любым известным методом. Изложенный алгоритм лежит в основе доказательства существования решения задачи (1.2)-(1.3). Разумеется, можно предложить и другие численные методы отыскания этого решения.

Сформулируем теперь основной результат работы в виде следующего утверждения.

Теорема. Пусть решение краевой задачи (0.1) – (0.2) существует и в случае неединственности может быть "локализовано", то есть можно построить дважды непрерывно дифференцируемые функции $z(x)$ и $Z(x)$, обращающиеся в нуль в $x=0$ и $x=1$, такие, что в области d

$$0\le x\le 1,\quad z(x)\le y\le Z(x) \tag{1.9}$$

имеется только одно решение задачи (0.1) – (0.2). Предположим, что $f(x,y)$ имеет в (1.9) непрерывные производные по x, y до второго порядка включительно. Предположим, далее, что выполнены следующие условия:

1) $|\phi'' + f(x,\phi)|\le \epsilon$, где ϵ – достаточно малое положительное число, $\phi(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, $\phi(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0,1]$, причем $\phi(x)$ удовлетворяет краевому условию (1.4);

2) краевая задача

$$v'' + f'_y(x,y)v=0 \tag{1.10}$$

$$v(0)=v(1)=0 \tag{1.11}$$

имеет только тривиальное решение для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$, удовлетворяющей условию (1.9).

Тогда решение системы (1.2), удовлетворяющее условиям (1.3), существует во всей полуполосе $0\le x\le 1$, $0\le t<\infty$. Приближенное решение системы, получаемое из (1.6) – (1.8), равномерно сходится при $r\to 0$ к решению задачи (1.2) – (1.3). Скорость "стабилизации" $y(x,t)$ к решению задачи (0.1) – (0.2) при движении по параметру t определяется соотношением

$$|y(x)-y(x,t)|\le \epsilon e^{-t}\Phi(x), \tag{1.12}$$

где $\Phi(x)$ – некоторая ограниченная положительная функция, обращающаяся в нуль при $x=0$ и $x=1$.

II. Переходим теперь к доказательству существования решения системы (1.2), удовлетворяющего условиям (1.3), в некоторой ограниченной области D:

$$0\le x\le 1,\quad 0\le t\le\sigma,\quad z(x)\le y(x,t)\le Z(x),\quad |v(x,t)|\le V(x). \tag{2.1}$$

Здесь $z(x)$ и $Z(x)$ – функции, определенные условиями теоремы раздела I; $V(x)$ – непрерывная положительная функция, обращающаяся в нуль в точках $x=0$ и $x=1$, которую мы определим ниже; $\sigma>0$ – достаточно малое число, значение которого также будет определено.

Произведем разбиение области D по переменной t: $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=\sigma$, $t_{i+1}-t_i=r$. Рассмотрим приближенный аналог системы (1.6) – (1.8). Обозначим для краткости $v(x,t_i)$ через $v_i(x)$, $y(x,t_i)$ через $y_i(x)$, $y_i''+f(x,y_i)$ через $r_i(x)$.

Доказательство состоит из следующих пунктов: 1) доказательство некоторых вспомогательных утверждений; 2) описание метода построения функции $V(x)$; 3) доказательство того, что все функции v_i, y_i, определенные (1.6) – (1.8), при определенном выборе σ, r, начальной функции $\phi(x)$ и построенной согласно п. 2. функции $V(x)$ принадлежат области D; 4) построение при помощи функций $v_i(x,t)$ и $y_i(x,t)$ методом линейной интерполяции по t последовательностей непрерывных функций $V_n(x,t)$ и $Y_n(x,t)$ и доказательство их равномерной сходимости; 5) доказательство, что предельные функции $v(x,t)$ и $y(x,t)$, являются решением задачи (1.2) – (1.3) в области (2.1).

1. Лемма 1. Пусть $y_i(x)$ – множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, принадлежащих области d (1.9). Предположим, что семейство функций $r_i(x)$ равномерно ограничено, то есть для всех i

$$|r_i(x)|\le R \tag{2.2}$$

Тогда множество функций $f'_y(x,y_i)$ равностепенно непрерывно по x на отрезке $[0,1]$.

Доказательство. $f(x,y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая в d функция. Пусть $x_1, x_2\in[0,1]$. При помощи теоремы о конечном приращении для любого i можем получить следующую оценку

$$|f'_y(x_1,y_i(x_1))-f'_y(x_2,y_i(x_2))|\le \max_d|f''_{xy}|\,|x_1-x_2| + \max_d|f''_{yy}|\,|y_i(x_1)-y_i(x_2)|.$$

Из (2.2) следует равномерная ограниченность функций $y''(x)$; поэтому $y_i'(x)$ также равномерно ограничены.

Следовательно, $|y_i(x_1)-y_i(x_2)|\le \max_d|y_i'|\cdot|x_1-x_2|$

Утверждение леммы, таким образом, доказано.

Лемма 2. Множество решений $v_i(x)$ краевых задач

$$v_i'' + f'_y(x,y_i)v_i = -r_i(x), \tag{2.3}$$

$$v_i(0)=v_i(1)=0, \tag{2.4}$$

где $y_i(x)$ – семейство дважды непрерывно дифференцируемых функций, принадлежащих области d (1.9), равномерно ограничено в случае выполнения (2.2).

Доказательство. Пусть $w_{1i}(x)$ и $w_{2i}(x)$ – линейно независимые решения однородного уравнения (1.10), удовлетворяющие начальным условиям

$$w_{1i}(0) = 1\,, \quad w'_{1i}(0) = 0\,,$$

$$w_{2i}(0) = 0\,, \quad w'_{2i}(0) = 1\,.$$

Легко показать, что $w_{1i}(x)$ и $w_{2i}(x)$ равномерно ограничены на отрезке $[0,1]$. Покажем, что

$$\inf_d |w_{2i}(1)| = a > 0$$

Предположим противное, то есть $\inf_d |w_{2i}(1)| = 0$. Можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $w_{2j}(1)$, для которой $\lim_{j\to\infty} |w_{2j}(1)| = 0$. Ей будет соответствовать последовательность функций $f'_y(x,y_j(x))$, равномерно ограниченная и, в силу леммы 1, равностепенно непрерывная. По теореме Арцела можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность функций $f'_y(x,y_k(x))$, пределом которой является непрерывная функция $f'_y(x,y(x))$, причем $y(x)$ принадлежит области d. Решение уравнения

$$v'' + f'(x,y)\,v = 0$$

с начальными условиями

$$v(0) = 0\,, \quad v'(0) = 1$$

будет обращаться в нуль в точке $x = 1$. Это противоречит предположению 2 теоремы раздела 1.

Применяя метод вариации произвольных постоянных, можно записать решение краевой задачи (2.3) – (2.4) в виде:

$$v_i(x) = w_{2i}(x)\Big[-w_{1i}(1)\,w_{2i}^{-1}(1)\int_0^1 r_i(x)\,w_{2i}(x)\,dx +$$

$$+\int_0^1 r_i(x)\,w_{1i}(x)\,dx - \int_0^x r_i(x)\,w_{1i}(x)\,dx\Big] + w_{1i}(x)\int_0^x r_i(x)\,w_{2i}(x)\,dx\,, \tag{2.5}$$

откуда утверждение леммы непосредственно следует.

Используя методику доказательства леммы 2, можно легко доказать следующее утверждение, которое мы приводим здесь без доказательства.

Лемма 3. Пусть решение краевой задачи

$$v''_\delta + f'_{y\delta}\,v_\delta = -r_\delta\,,$$

$$v_\delta(0) = v_\delta(1) = 0$$

существует и единственно для всех функций $f'_{y\delta}$ и r_δ, удовлетворяющих условиям

$$f'_y(x,y_i) - \delta \le f'_{y\delta} \le f'_y(x,y_i) + \delta\,,$$

$$r_i(x) - \delta \le r_\delta \le r_i(x) + \delta\,,$$

где $\delta > 0$ достаточно мало, а $y_i(x)$ – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, принадлежащая d (1.9).

Тогда для любой функции v_δ имеет место

$$|v_\delta - v_i| < b\delta\,, \tag{2.6}$$

где $b > 0$ – константа, а $v_i(x)$ – решение краевой задачи (2.3) – (2.4).

Лемма 4. Пусть функции $y_i(x)$ и $v_i(x)$, определенные (1.6) – (1.8), принадлежат области D (2.1) и выполнено (2.2).

Если начальная функция $y_0(x) = \phi(x)$ выбрана таким образом, что $y''_0(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то при любых разбиениях области D по t множества функций $y''_i(x)$ и $v''_i(x)$ равностепенно непрерывны.

Доказательство. Из (1.7) и (2.2) непосредственно вытекает равномерная ограниченность функций $v''_i(x), v'_i(x), y''_i(x), y'_i(x)$. Пусть для $x_1, x_2 \in [0,1]$ имеем

$$|y''_0(x_1) - y''_0(x_2)| \le L\,|x_1 - x_2| \tag{2.7}$$

Тогда при помощи теоремы о конечном приращении и соотношения (1.7) получаем

$$|v''_0(x_1) - v''_0(x_2)| \le M\,|x_1 - x_2|\,,$$

где

$$M = \max_D |f'_y| \max_D |v'_i| + \max_D |f''_{xy}| \max_D |v_i| + \max_D |f''_{yy}| \max_D |v_i| \max_D |y'_i| +$$

$$+ L + \max_D |f'_x| + \max_D |f'_y| \max_D |y'_i|$$

Далее, согласно (1.6), имеем

$$|y''_1(x_1) - y''_1(x_2)| \le (L + \tau M)\,|x_1 - x_2|\,.$$

Переходя к функции $v''_1(x)$ при помощи (1.7) и теоремы о конечном приращении получаем

$$|v''_1(x_1) - v''_1(x_2)| \le (1+\tau)\,M\,|x_1 - x_2|\,.$$

Для $y_2''(x)$ получаем

$$|y_2''(x_1)-y_2''(x_2)| \le \{L + rM + r(1+r)M\}|x_1-x_2|.$$

Для $v_2''(x)$ будем иметь

$$|v_2''(x_1)-v_2''(x_2)| \le (1+r)^2 M|x_1-x_2|.$$

Далее по индукции легко показать, что при любом разбиении и для любого i

$$|v_i''(x_1)-v_i''(x_2)| \le (1+r)^i M|x_1-x_2|,$$

$$|y_i''(x_1)-y_i''(x_2)| \le \{L+rM+r(1+r)M+r(1+r)^2M+\dots+r(1+r)^{i-1}M\}|x_1-x_2|.$$

Отсюда для любого i получаем равномерные оценки

$$|v_i''(x_1)-v_i''(x_2)|\le e^{\sigma} M|x_1-x_2|,$$

$$|y_i''(x_1)-y_i''(x_2)|\le\{L+\sigma M+M(e^{\sigma}-1)\}|x_1-x_2|.$$

Таким образом, равностепенная непрерывность $y_i''(x)$ и $v_i''(x)$ доказана.

2. Остановимся на методе построения функции $V(x)$. Предположим, что $y_i \in d$ и (2.2) выполнено. Тогда, согласно лемме 2, все $v_i(x)$ равномерно ограничены,

$$|v_i(x)|\le K. \qquad (2.8)$$

Но из (1.7) непосредственно следует, что $v_i''(x)$ также равномерно ограничены. Следовательно, $v_i'(x)$ равномерно ограничены, то есть для любого

$$|v_i'(x)|\le C. \qquad (2.9)$$

Очевидно, что функция

$$V(x)=\begin{cases} Cx, & 0\le x\le \tfrac12, \\ -C(x-1), & \tfrac12\le x\le 1 \end{cases} \qquad (2.10)$$

удовлетворяет условию $|v_i(x)|\le V(x)$, $V(0)=V(1)=0$.

3. Покажем, что при определенном выборе начального приближения $y_0(x)=\phi(x)$ возможно построить функцию $V(x)$ и подобрать константу σ так, чтобы все функции $y_i(x)$ и $v_i(x)$, определенные при помощи (1.6)–(1.8), принадлежали области D (2.1) при достаточно малом r.

Выберем начальную функцию $y_0(x)$, чтобы

$$z(x)<y(x)<Z(x).$$

Предположим также, что выполнено (2.7); однако это требование использовано в п. 5.

Пусть $R>0$ – константа, удовлетворяющая соотношению

$$|r_0(x)|<R.$$

Согласно лемме 2 и обозначениям п. 2, функции $|v_0(x)|$ и $|v_0'(x)|$ ограничены константами K и C соответственно. Построим функцию $V(x)$ (2.10). Выберем теперь σ таким, чтобы было выполнено

$$z<y_0-\sigma V<y_0<y_0+\sigma V<Z. \qquad (2.11)$$

Из (1.6) и (2.11) следует, что функция $y_1(x)=y_0+rv_0$ принадлежит области d. Выражение для $r_{i+1}(x)=y''_{i+1}+f(x,y_{i+1})$, в котором y_{i+1} и y_i связаны при помощи (1.6), мы можем представить в следующем виде

$$r_{i+1}(x)=(1-r)r_i(x)+\tfrac12 r^2 v_i^2 f''_{yy}(x,y_i+\theta_i r v_i), \qquad (2.12)$$

$$0<\theta_i<1,\quad i=0,1,\dots,n-1.$$

Функция $y_0+\theta_0 r v_0$ принадлежит области d. Следовательно, при $i=0$ из (2.12) вытекает следующая оценка

$$|r_1(x)|\le(1-r)R+\tfrac12 r^2K^2\max_d|f''_{yy}|.$$

Из последней оценки следует, что достаточно выбрать

$$r<2RK^{-2}[\max_d|f''_{yy}|]^{-1}, \qquad (2.13)$$

чтобы $|r_1(x)|<R$. Из леммы 2 для функций $v_1(x)$ и $v_1'(x)$ получаются такие же оценки, как и для $v_0(x)$ и $v_0'(x)$. Поэтому $|v_1(x)|\le V(x)$. Согласно (1.6) определяем функцию

$$y_2(x)=y_0+r(v_0+v_1),$$

которая также принадлежит области d. Легко видеть, что при нашем выборе r (2.13) $|r_2(x)|<R$. Те же рассуждения можно проделать для любого i.

Таким образом, все $y_i(x)$ и $v_i(x)$ принадлежат области D.

4. Рассмотрим всевозможные разбиения области D с шагами r, удовлетворяющими (2.13). Для каждого разбиения функция $y_0(x)$ определяет функции $v_0(x),v_1(x),\dots,v_n(x)$ и $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$, $n=\frac{\sigma}{r}$. Построим с помощью этих функций непрерывные функции $V_n(x,t)$ и $Y_n(x,t)$, применив линейную интерполяцию по t на каждом из отрезков $t_i\le t\le t_{i+1}$. Определенные таким образом функции будут иметь вид

$$V_n(x,t)=v_i(x)+r^{-1}(t-t_i)[v_{i+1}(x)-v_i(x)],$$
$$Y_n(x,t)=y_i(x)+(t-t_i)v_i(x),\quad t_i\le t\le t_{i+1}. \qquad (2.14)$$

Очевидно, что все функции $V_n(x,t)$ и $Y_n(x,t)$ принадлежат области D (2.1). Следовательно, они равномерно ограничены. Покажем, что они равностепенно непрерывны по переменным x, t в прямоугольнике $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le \sigma$. Пусть (x', t') и (x'', t'') – пара точек этого прямоугольника, расстояние между которыми достаточно мало. Учитывая, что y_i' равномерно ограничены, так как выполнено (2.2), легко получить следующую оценку для функций $Y_n(x,t)$

$$|Y_n(x',t') - Y_n(x'',t'')| \le p\,\{|t'-t''| + |x'-x''|\},$$

где $p = \max\{\max\limits_{0 \le x \le 1} V(x),\ 3\max\limits_d |y_i'|\}$. Последнее неравенство доказывает равностепенную непрерывность функций $Y_n(x,t)$.

Доказательство равностепенной непрерывности функций $V_n(x,t)$ мы начнем с установления следующего факта относительно $v_i(x)$: для функций v_i и v_{i+1} на двух соседних слоях $t = t_i$ и $t = t_{i+1}$

$$|v_{i+1}(x) - v_i(x)| \le Tr, \tag{2.15}$$

где $T > 0$ – константа, а r достаточно мало. Действительно, для коэффициентов линейных уравнений (1.7) на двух соседних слоях справедливы соотношения:

$$f_y'(x, y_{i+1}) = f_y'(x, y_i) + r v_i f_{yy}''(x, y_i + \theta_1 r v_i),\quad 0 < \theta_1 < 1,$$

$$y_{i+1}'' + f(x, y_{i+1}) = (1-r)[y_i'' + f(x,y_i)] + \tfrac{1}{2} r^2 v_i^2 f_{yy}''(x, y_i + \theta_2 r v_i),\quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Функции $v_i(x)$ и $r_i(x)$ равномерно ограничены. Поэтому можно построить δ-окрестности (в смысле леммы 3) функций $f_y'(x,y_i)$ и $r_i(x)$ $(\delta = T_1 r)$, в которых будут находиться функции $f_y'(x,y_{i+1})$ и $r_{i+1}(x)$. Воспользовавшись результатом леммы 3, получаем (2.15). Далее отметим, что $v_i'(x)$ равномерно ограничены, причем справедливо (2.9). Поэтому для любой функции $V_n(x,t)$ можно получить

$$|V_n(x',t') - V_n(x'',t'')| \le q\,\{|t'-t''| + |x'-x''|\},$$

где $q = \max\{T, 3C\}$, что доказывает равностепенную непрерывность $V_n(x,t)$.

По теореме Арцела из последовательностей функций $V_n(x,t)$ и $Y_n(x,t)$ можно выбрать равномерно сходящиеся в прямоугольнике $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le \sigma$ подпоследовательности. Непрерывные предельные функции обозначим $v(x,t)$ и $y(x,t)$.

5. Покажем, что функции $v(x,t)$ и $y(x,t)$ являются решением задачи (1.2) – (1.3). Исследуем невязки, получающиеся при подстановке функций $V_n(x,t)$ и $Y_n(x,t)$ в уравнения системы (1.2). Покажем сначала, что невязка первого уравнения

$$\rho_1(x,t) = |V_{nxx}'' + f_y'(x,Y_n)V_n + f(x,Y_n) + Y_{nxx}''| \tag{2.16}$$

стремится к нулю при $r \to 0$. Заметим, что

$$V_{nxx}'' = v_i'' + r^{-1}(t-t_i)(v_{i+1}'' - v_i''),$$

$$Y_{nxx}'' = y_i'' + (t-t_i)v_i'',\quad t_i \le t \le t_{i+1}.$$

Легко показать, что при достаточно малом r

$$|v_{i+1}''(x) - v_i''(x)| \le T_2 r.$$

Учитывая последнее неравенство, (2.15), а также равномерную ограниченность функций v_i, f и их производных до второго порядка включительно, получаем следующую оценку для невязки

$$\rho_1(x,t) \le r^{-1}|t-t_i|\,|v_{i+1}'' - v_i''| + |t-t_i|\,v_i^2 \max_d |f_{yy}''| +$$

$$+ r^{-1}|t-t_i|\,|v_{i+1} - v_i| \max_d |f_y'| + r^{-1}(t-t_i)^2 |v_{i+1} - v_i|\,|v_i| \max_d |f_{yy}''| +$$

$$+ |t-t_i|\,|v_i''| + |t-t_i|\,|v_i| \max_d |f_y'| + \tfrac{1}{2}(t-t_i)^2 v_i^2 \max_d |f_{yy}''| \le$$

$$\le T_3 r,\quad t_i \le t \le t_{i+1}.$$

Выбрав r достаточно малым, можно сделать невязку меньше любого наперед заданного числа $\epsilon > 0$. Отсюда непосредственно вытекает равномерная сходимость последовательности $V_{nxx}'' + Y_{nxx}''$.

Рассмотрим невязку второго уравнения

$$\rho_2(x,t) = |Y_{nt}' - V_n|. \tag{2.17}$$

Производная Y_{nt}', которую можно представить как

$$Y_{nt}' = v_i(x),\quad t_i \le t \le t_{i+1},$$

имеет разрыв в каждой узловой точке $t_i = i\sigma n^{-1}$. Однако абсолютная величина скачка, согласно (2.15), имеет порядок r. Учитывая (2.15), из (2.17), для $t_i \le t \le t_{i+1}$ получаем

$$\rho_2(x,t) = |r^{-1}(t-t_i)(v_{i+1} - v_i)| \le Tr.$$

В узловых точках оценка будет того же порядка. Следовательно, при $r \to 0$ $\rho_2(x,t) \to 0$. Отсюда непосредственно следует равномерная сходимость последовательности Y_{nt}' к непрерывной функции $v(x,t)$. Действительно,

$$Y_{nt}' - v(x,t) = [Y_{nt}' - V_n] + [V_n - v(x,t)].$$

Из равномерной сходимости обоих слагаемых правой части к нулю следует равномерная сходимость левой части к нулю. Можно утверждать, что $y(x,t)$ имеет частную производную y_t', причем

$$y'_t = \lim_{n\to\infty} Y'_{nt}\,.$$

Следовательно, функции $v(x,t)$ и $y(x,t)$ удовлетворяют второму уравнению системы (1.2).

Покажем теперь, что последовательности Y''_{nxx} и V''_{nxx} равномерную сходятся. Для этого нам достаточно рассмотреть сходимость одной из них, например, имея в виду, что сходимость для суммы $Y''_{nxx}+V''_{nxx}$ доказана. Последовательность Y''_{nxx} равномерно ограничена в прямоугольнике $0\le x\le 1,\ 0\le t\le\sigma$. Для двух достаточно близких точек (x',t') и (x'',t'') этого прямоугольника при помощи леммы 4 (так как $y''_0(x)$ удовлетворяет на отрезке $[0,1]$ условию Липшица) легко получить следующее неравенство

$$|Y''_{nxx}(x',t') - Y''_{nxx}(x'',t'')| < s\,\{|t'-t''| + |x'-x''|\}\,,$$

где

$$s = \max\{\,3[L+\sigma M + M(e^{\sigma}-1)]\,,\ \max_D |v''_1(x)|\,\},$$

а константа M определена в лемме 4. Это неравенство доказывает равностепенную непрерывность последовательности Y''_{nxx}. По теореме Арцела существует равномерно сходящаяся к непрерывной функции подпоследовательность функций Y''_{nxx}. Это доказывает, что $y(x,t)$ имеет частную производную y''_{xx}, причем

$$y'_{xx} = \lim_{n\to\infty} Y''_{nxx}\,.$$

Но отсюда следует, что $v(x,t)$ имеет производную v''_{xx}, и

$$v''_{xx} = \lim_{n\to\infty} V''_{nxx}\,.$$

Таким образом, функции $y(x,t)$ и $v(x,t)$ удовлетворяют и первому уравнению системы (1.2). Очевидно, что условия (1.3) выполнены.

Следствие. Величина $\max\limits_{0\le x\le 1}|r_k(x)|$ убывает с ростом k при достаточно малом r. Обозначим для краткости записи через f''_k функцию $f''_{yy}(x,y_k+\theta_k r v_k)$, где $0<\theta_k<1$. Тогда функцию $r_k(x)$ можно представить следующим образом:

$$r_k(x) = (1-r)^k r_0(x) + \tfrac{1}{2}r^2[(1-r)^{k-1} v_0^2 f''_0 + (1-r)^{k-2} v_1 f''_1 + \ldots + v^2_{k-1} f''_{k-1}].$$

Отсюда

$$\max_{0\le x\le 1}|r_k(x)| \ge (1-r)^k \max_{0\le x\le 1}|r_0(x)| - \tag{2.18}$$

$$-\tfrac{1}{2}r^2[(1-r)^{k-1}\max_{0\le x\le 1} v_0 \max_{0\le x\le 1}|f''_0| + \ldots + \max_{0\le x\le 1} v^2_{k-1}\max_{0\le x\le 1}|f''_{k-1}|]\,.$$

Далее легко получить следующую оценку

$$\max_{0\le x\le 1}|r_k(x)| - \max_{0\le x\le 1}|r_{k+1}(x)| > r\,[\max_{0\le x\le 1}|r_k(x)| - \frac{r}{2}\max_{0\le x\le 1} v_k^2 \max_{0\le x\le 1}|f''_k|\,]\,.$$

Отсюда и из (2.18) следует, что

$$\max_{0\le x\le 1}|r_k(x)| - \max_{0\le x\le 1}|r_{k+1}(x)| \ge r\,\{(1-r)^k \max_{0\le x\le 1}|r_0(x)| - \tfrac{1}{2}r^2[(1-r)^{k-1}\max_{0\le x\le 1} v_0^2 \max_{0\le x\le 1}|f''_0| +$$

$$+(1-r)^{k-2}\max_{0\le x\le 1} v_1^2 \max_{0\le x\le 1}|f''_1| + \ldots + \max_{0\le x\le 1} v^2_{k-1}\max_{0\le x\le 1}|f''_{k-1}|] - \tfrac{1}{2}r\max_{0\le x\le 1} v_k^2 \max_{0\le x\le 1}|f''_k|\,\}$$

Функции v_k и f''_k равномерно ограничены в области D.

Пусть $\delta>0$ константа, удовлетворяющая условию

$$\delta < \max_{0\le x\le 1}|r_0(x)|\,.$$

Тогда

$$\max_{0\le x\le 1}|r\ (x) - \max_{0\le x\le 1}|r_{k+1}(x)| \ge r[(1-r)^k\delta - \frac{r}{2}(2-(1-r)^k)\max_D v_k^2 \max_D |f''_{yy}|]\,.$$

При достаточно малом r правая часть последнего неравенства будет больше нуля, поскольку

$$\lim_{r\to 0}[(1-r)^k\delta - \frac{r}{2}(2-(1-r)^k)\max_D v_k^2 \max_D |f''_{yy}|] = \delta > 0\,.$$

Следовательно, при достаточно малом r в области D

$$\max_{0<x<1}|r_k(x)| - \max_{0\le x\le 1}|r_{k+1}(x)| > 0$$

для любого $k\ (k=0,1,\ldots,n-1)$.

III. Покажем, что при дополнительном предположении относительно выбора начальной функции $y(x,0)=\phi(x)$ построенное в области D (2.1) решение системы (1.2) с задачей (1.3) продолжимо в полуполосе $0\le x\le 1,\ 0\le t<\infty$.

Сделаем предположение относительно "близости" начального приближения $\phi(x)$ к искомому решению. Предположим, что выполнено условие

$$|r_0(x)| = |\phi'' + f(x,\phi)| \le \epsilon\,, \tag{3.1}$$

где ϵ – достаточно малое положительное число, значение которого будет определено ниже. Как было показано в разделе 1, система (1.2) эквивалентна обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка (1.5) с параметром t.

Из начального условия $y(x,0)=\phi(x)$ получаем, что

$$r(x) = r_0(x).$$

Таким образом, задача (1.2) – (1.3) равносильна уравнению, содержащему параметр t,

$$y''(x,t) + f(x,y(x,t)) = r_0(x)e^{-t} \tag{3.2}$$

с краевой задачей

$$y(0,t) = y(1,t) = 0. \tag{3.3}$$

Как следует из раздела II, решение задачи (3.2) – (3.3) существует для всех значений параметра t, $0 \le t \le \sigma$, причем выбор σ определялся, в основном, выполнением условий (2.11).

Покажем теперь, что при подходящем выборе ϵ в (3.1) функция $y(x,\sigma)$ будет заключена в области

$$\phi - \sigma V < y(x,\sigma) < \phi + \sigma V, \tag{3.4}$$

то есть решение задачи (1.2) – (1.3) можно продолжить по t еще, по крайней мере, в интервале $[\sigma, 2\sigma]$.

Предварительно оценим абсолютную величину разности между решением $y(x)$ задачи (0,1) – (0,2) и начальным приближением $\phi(x)$, удовлетворяющим условию (3.1). Заметим, что $\phi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\phi'' + f(x,\phi) = r_0(x)$$

и краевым условиям

$$\phi(0) = \phi(1) = 0.$$

Легко видеть, что разность $u(x) = y(x) - \phi(x)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$u'' + f'_y(x, \phi + \theta(y-\phi))u = -r(x), \quad 0<\theta<1,$$

с краевыми условиями

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных, можно получить следующую оценку для $|u(x)|$

$$\begin{aligned} |u(x)| \le \epsilon \{ \sup_{\phi\in D} |w_2(x)| [\sup_{\phi\in D} |w_1(1)| (\inf_{\phi\in D} |w_2(1)|)^{-1} \int_0^1 \sup_{\phi\in D} |w_2(x)|dx \, + \\ + \sup_{\phi\in D} \int_0^1 |w_1(x)|dx + \sup_{\phi\in D} \int_0^x |w_1(x)|dx \} \, + \\ + \sup_{\phi\in D} |w_1(x)| \sup_{\phi\in D} \int_0^x |w_2(x)|dx \}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $w_1(x)$ и $w_2(x)$ – два линейно независимых решения однородного уравнения

$$w'' + f'_y(x, \phi + \theta(y-\phi))w = 0, \quad 0 < \theta < 1,$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$w_1(0) = 1, \quad w_1'(0) = 0,$$

$$w_2(0) = 0, \quad w_2'(0) = 1.$$

Нетрудно показать, что выражение, стоящее в фигурных скобках в неравенстве (3.5), является ограниченной положительной функцией, обращающейся в нуль при $x=0$. Таким образом,

$$|u(x)| \le \epsilon \Phi_1(x), \tag{3.6}$$

где

$$\Phi_1(0) = 0, \quad \Phi_1(x) > 0 \qquad 0 < x \le 1.$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных с интегрированием от точки $x = 1$ до $x = 0$, можно получить для $|u(x)|$ оценку вида

$$|u(x)| \le \epsilon \Phi_2(x), \tag{3.7}$$

где $\Phi_2(1) = 0$, $\Phi_2(x) > 0$ для $0 \le x < 1$. Пусть x_1 внутренняя точка отрезка $[0,1]$, для которой $\Phi_1(x_1) = \Phi_2(x_1)$. Комбинируя оценки (3.6) и (3.7), получаем на отрезке $[0,1]$ оценку

$$|u(x)| \le \epsilon \Phi(x), \quad \Phi(0) = \Phi(1) = 0, \tag{3.8}$$

где

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1(x), & 0 \le x \le x_1, \\ \Phi_2(x), & x_1 \le x \le 1. \end{cases}$$

Предположим теперь, что начальное приближение $\phi(x)$ выбрано таким образом, что величина ϵ в (3.1) обеспечивает выполнение неравенства

$$\epsilon \Phi(x)(1 + e^{-\sigma}) < \sigma V(x). \tag{3.8}$$

Для функции $y(x)$ будет выполнена система неравенств

$$\phi - \sigma V < \phi - \epsilon\Phi < y(x) < \phi + \epsilon\Phi < \phi + \sigma V. \tag{3.9}$$

С другой стороны, для разности функций $y(x)$ и $y(x,\sigma)$, где $y(x,\sigma)$ – решение задачи (3.2) – (3.3) при $t=\sigma$, можно получить оценку, аналогичную (3.8)

$$|y(x) - y(x,\sigma)| \le \epsilon e^{-\sigma} \Phi(x). \tag{3.10}$$

Из последней оценки, учитывая (3.8) – (3.9), легко получить, что для функции $y(x,\sigma)$ выполнено (3.4). Таким образом, решение задачи (1.2) – (1.3) продолжимо от $t=\sigma$ до $t=2\sigma$. Но далее все наши рассуждения остаются в силе. Поэтому решение $y(x,t)$ продолжимо во всей полуполосе $0 \le x \le 1$, $0 \le t < \infty$.

Оценка

$$|y(x) - y(x,t)| \le \epsilon e^{-t} \Phi(x) \tag{3.11}$$

показывает скорость стабилизации решения $y(x,t)$ задачи (1.2)-(1.3) к искомому решению $y(x)$ краевой задачи (0,1)-(0.2).

IV. Описанный метод решения краевых задач типа (0.1)-(0.2) был опробован на некоторых примерах по составленной для ЭВМ програмие. В качестве алгоритма численного решения системы (1.2) с задачей (1.3) был взят разностный аналог системы (1.6)-(1.8). При этом краевая задача (1.7)-(1.8) для обыкновенного линейного дифференциального уравнения на слое $t = t_j$ решалась методом прогонки, примененным к разностному уравнению, получающемуся при разбиении отрезка $[0,1]$ на n равных частей с узлами x_i и замене в уравнении (1.7) второй производной в узле x_i на выражение

$$h^{-2}[v(x_{i+1},t_j) - 2v(x_i,t_j) + v(x_{i-1},t_j)], \quad h = x_{i+1} - x_i .$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y'' + Ae^{ay} = 0 \tag{4.1}$$

с краевым условием

$$y(0) = y(1) = 0 . \tag{4.2}$$

Здесь $A, a > 0$ - числовые параметры. Решение этого уравнения можно получить в конечном виде, проконтролировав, таким образом, точность, с которой получаются приближенные решения. Обозначим Aa через ρ. Легко видеть, что существует некоторое значение $\rho = \rho_1$, при котором имеется единственное решение задачи (4.1)-(4.2). При $\rho < \rho_1$ существуют два решения и, наконец, при $\rho > \rho_1$ решений краевой задачи не существует. Грубые оценки показывают, что при значениях параметров A и a, удовлетворяющих условию

$$Aa \le 3{,}5 ,$$

существуют два решения задачи (4.1)-(4.2). Обозначим эти решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Для $A = 1{,}5$ и $a = 2$ графики их изображены на рис. 1.

Уравнение (4.1) интересно тем, что метод стабилизации с помощью уравнения (0.3) с условиями (0.4)-(0.5), описанный в вводной части настоящей работы, позволяют отыскать в случае существования двух решений задачи (4.1)-(4.2) только нижнее решение $y_1(x)$. При достаточно гладких функциях $u(x,0)$, взятых в качестве начального приближения, удовлетворяющих условию

$$0 < u(x,0) < y_2(x) ,$$

$u(x,t)$ стабилизируется к $y_1(x)$. При начальных функциях $u(x,0)$, взятых выше решения $y_2(x)$, и $u(x,t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Предлагаемый в данной работе метод позволил приближенно вычислить оба решения задачи (4.1)-(4.2). В качестве начального приближения выбирались функции вида

$$y(x,0) = \Delta \sin \pi x , \tag{4.3}$$

где Δ - числовой параметр, принимающий различные значения.

При $\tau = 1$ (случай, аналогичный методу, описанному в [2]) с помощью функций вида (4.3) были построены приближенные "области влияния" вокруг решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Находящиеся внутри этих областей функции вида (4.3) обеспечивали сходимость функций $y(x,t_j)$ к соответствующему решению краевой задачи. При $0 < \Delta < 0{,}6$; $\tau = 1$ функция $y(x,t)$ стабилизируется к решению $y_1(x)$. При $0{,}8 \le \Delta \le 3.09$ наблюдается стабилизация к решению $y_2(x)$. В случае $\Delta = 0{,}7$ и $\tau = 1$ стабилизации не произошло. Это был критический случай вблизи границы "областей влияния". Однако выбор меньшего шага $\tau = 0{,}1$ обеспечил стабилизацию к решению $y_2(x)$. Во всех случаях шаг по x $h = 0{,}05$, а вычисления проводились до установления 9 десятичных знаков.

На рис. 1 показаны "зоны влияния", а также процесс стабилизации в случае, близком к критическому: $\Delta = 3{,}09$, $\tau = 1$. Все кривые симметричны относительно прямой $x = ½$, поэтому на рис. 1 они изображены на отрезке $[0, ½]$. Приведенные вычисления показывают, что требования теоремы 1 работы [2] можно ослабить, поскольку сходимость метода наблюдается в случае, когда условие 3) теоремы не выполнено.

Пример 2. Изложенный метод был применен также для нахождения решений дифференциального уравнения с сингулярной точкой $x = 0$

$$y'' = y\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right), \tag{4.4}$$

удовлетворяющих краевым условиям

$$y(0) = y(b) = 0, \quad b > 0. \tag{4.5}$$

Данное уравнение встречается в нелинейной полевой теории и в теории ядра. Отметим, что оно не удовлетворяет условиям теоремы, сформулированной в разделе 1. Однако при определенном выборе начальной функции $y(x,0)$ и шага τ, функция $y(x,t_j)$ стабилизировалась к различным решениям задачи (49)-(50) при $t_j \to \infty$. Заметим, что имеется счетное множество решений краевой задачи (4.4)-(4.5). Изучению свойств решений уравнения (4.4) посвящены, например, работа [4] и другие.

Для контроля вычислений было сначала приближенно найдено решение уравнения (49), удовлетворяющее начальному условию

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 5.$$

Точка пересечения решения с осью x $b = 1.885867$ была взята в качестве правой границы интервала в краевых условиях (4.5).

За начальные приближения $y(x,0)$ брались функции вида

$$y(x,0) = \Delta \sin \frac{\pi}{b} x, \qquad \Delta = 1,3;\ 2,5.$$

В случаях $\Delta = 1,3$ и $\tau = 0,001;\ 0,01;\ 0,05;\ 0,1;\ 0,5;\ 0,6$ происходила стабилизация решений $y(x,t)$ к положительному решению краевой задачи (4.4) – (4.5). При $\tau > 0,6$ (0,7; 0,9) стабилизация происходила к некоторой "пилообразной" кривой, которая не является решением задачи (4.4) – (4.5).

В случае $\Delta = 2,5$, то есть когда начальное приближение довольно сильно отличается от всех решений краевой задачи (4.4) – (4.5), удавалось при некоторых значениях τ найти некоторые другие решения краевой задачи. Так, при $\tau = 0,005$ было получено решение с одним нулем внутри отрезка $[0,b]$, при $\tau = 0,002$ было найдено решение с двумя нулями внутри отрезка $[0,b]$. В некоторых других случаях стабилизация приводила к "пилообразным" кривым.

Во всех случаях шаг по оси x брался равным $h = 0,05b$, а вычисления велись до установления 9 десятичных знаков. На рис. 2 показан процесс стабилизации к положительному решению задачи (4.4) – (4.5) при $\Delta = 1,3$ и $\tau = 0,6$.

Описанный пример показывает, что условия теоремы раздела 1 могут быть, вероятно, ослаблены.

Литература

1. И.С. Березин, Н.П. Жидков. Методы вычислений, II., Физматгиз, Москва, 1962, 395–406.
2. Н.Н. Глинская, И.П. Мысовских. О численном решении граничной задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Вестник Ленинградского университета, 8, сер. мат., 49–54 (1954).
3. A. Friedman. Convergence of Solutions of Parabolic Equations to a Steady State, J. Math. and Mech., 8, 1, 57–76 (1959).
4. Е.П. Жидков, В.П. Шириков. Об одной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, ЖВМ и МФ, 4, № 5, 804–816 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
30 сентября 1966 г.

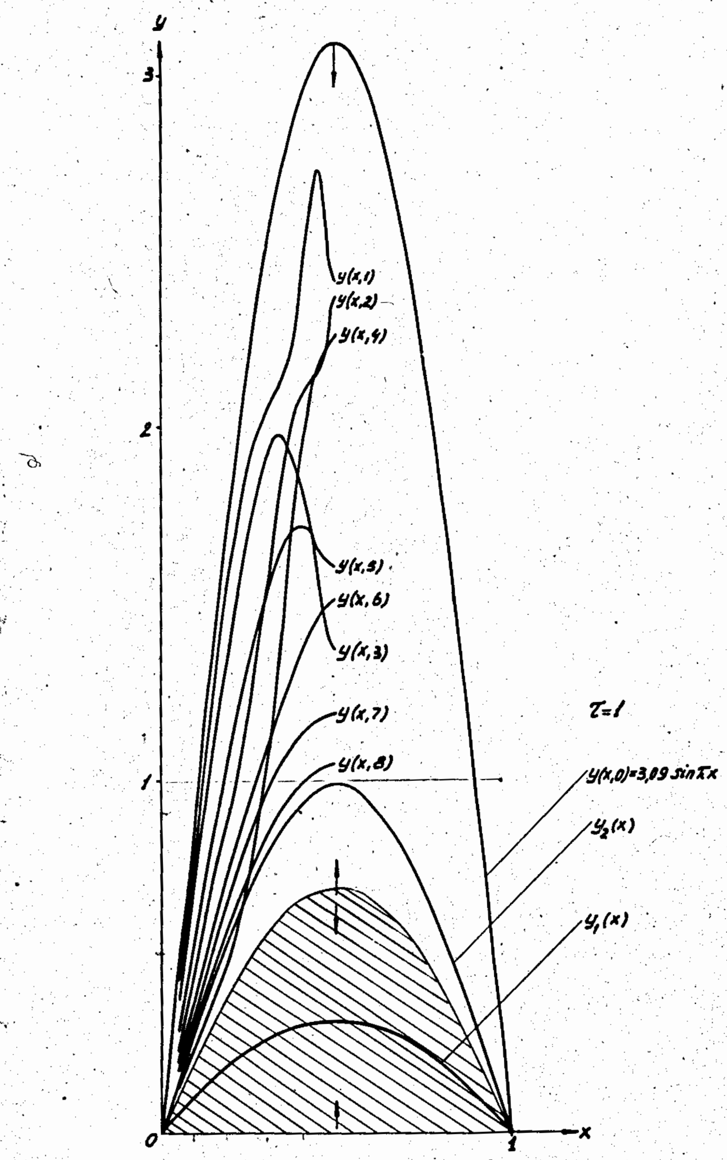
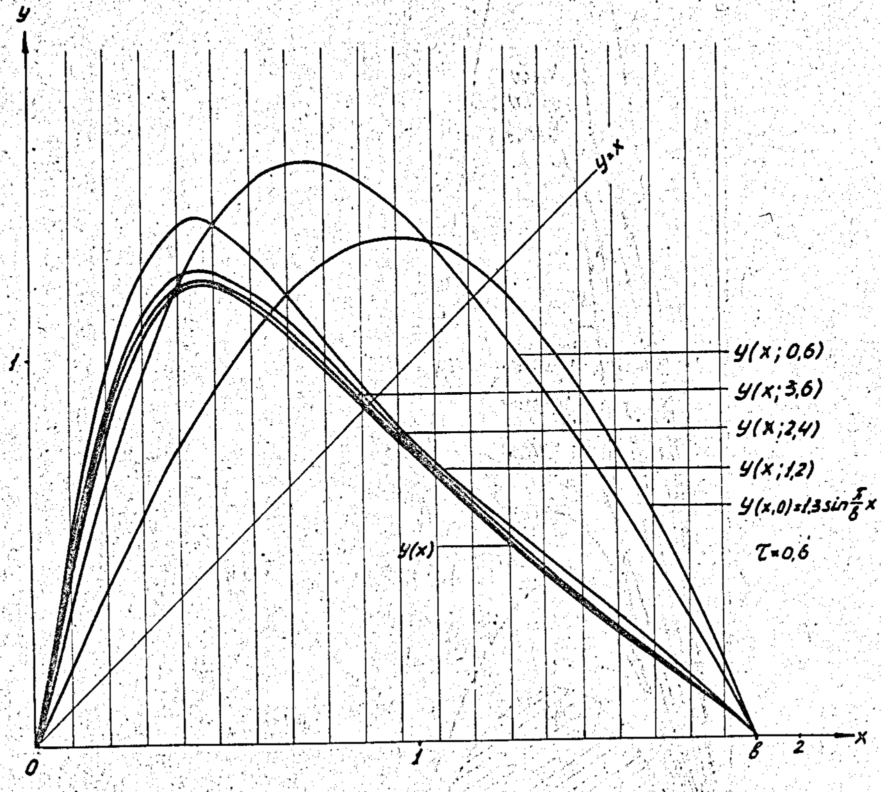


Рис. 1



Р и с. 2