РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. В.А.СТЕКЛОВА

5-2001-193

На правах рукописи
УДК 51-72:530/531

СЕРГЕЕВ
Сергей Михайлович

ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Специальность: 01.01.03 — математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург 2001

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук Г. П. ПРОНЬКО

доктор физико-математических наук П. П. КУЛИШ

доктор физико-математических наук С. М. ХОРОШКИН

Ведущая организация:

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, г. Москва

Защита состоится "__" ________________2001 года в ______ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (С.-Петербург, наб. р. Фонтанки, д.27, комн. 311).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ПОМИ.

Автореферат разослан "__" ________________2001 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук А.Ю. Зайцев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Известно, что системы с большим числом степеней свободы, будь то статистические или же квантово-полевые системы, затруднительно исследовать в случае большой константы связи, когда неприменима теория возмущений. В связи с этим продолжает оставаться актуальным поиск точно решаемых моделей в этих областях теоретической физики. Вся вторая половина XX века была ознаменована бурным развитием двумерных квантовых вполне интегрируемых моделей. Однако большинство интересных систем статистической физики трёхмерны, а в квантовой теории поля - по крайней мере четырёхмерны. Поэтому, на наш взгляд, заслуживают внимания любые попытки построения нетривиальных точно интегрируемых моделей пространственной размерности больше двух.

Наш подход основан на исследовании дискретной эволюции динамических систем, ассоциированных с двумерными решетками, т.е. с полностью дискретными $2+1$ эволюционными моделями. Такая постановка является естественным обобщением двумерного подхода, исследования эволюции спиновых одномерных цепочек, приводящего к формулировке $1+1$ мерных интегрируемых моделей.

В отличие от обычного подхода к многомерной интегрируемости во главу угла ставится исследование не алгебраического условия интегрируемости (уравнения симплексов, в частности уравнения тетраэдров), а вспомогательная задача, условие нулевой кривизны для которой и приводит к уравнению симплексов (уравнению тетраэдров в случае трех пространственных измерений). С этой точки зрения двумерные решетки, с которыми ассоциированы динамические переменные, являются вспомогательными. Трехмерные вершинные операторы, т.е. сплетатели вспомогательной задачи, в нашем подходе будут возникать как функциональное отображение тройки динамических комплексов, ассоциированных с вершинами ориентированных треугольников фиксированного типа, в тройку же динамических комплексов, ассоциированных с вершинами треугольников дуального типа. Правила, позволяющие сопоставить двумерным решеткам алгебраические выражения с участием динамических комплексов, такие что эквивалентность таких алгебраических выражений приводит к возникновению отображений, мы будем называть основными алгебраическими системами эволюционных моделей.

Комбинации элементарных сплетающих отображений для достаточно больших вспомогательных решеток будут образовывать интегрируемые эволюционные отображения. Естественная геометрическая интерпретация последовательности эволюционных отображений – трехмерная решетка (кубическая в простейшем случае), сечением которой является двумерная вспомогательная решетка. В случае спиновых моделей, когда эволюционные отображения осуществляются конечномерными матрицами, трехмерная решетка приобретает буквальный смысл, поскольку естественно возникает понятие Больцмановского веса, ассоциированного с вершиной кубической решетки.

Важным в понятии основной алгебраической системы является во-первых то, что система динамических переменных должна быть квантовой, и во-вторых то, что основная алгебраическая система должна подразумевать метод получения полного набора интегралов движения для эволюционных отображений в виде полиномов в алгебре наблюдаемых. Этим аспектам в диссертационной работе уделено основное внимание.

Цель диссертационной работы. Основной целью диссертации является поиск и исследование основных алгебраических систем, построении их сплетающих отображений, приводящих к интегрируемым (квантовым, спиновым, равно как и классическим) эволюционным моделям.

Для одной из полученных моделей с хорошо определенными классической, квантовой и спиновой формами, в диссертационной работе проведено весьма подробное исследование, целями которого являются:

- исследование свойств сплетающего и эволюционного отображений и получение их операторной или матричной реализации,
- поиск инвариантного метода получения полного набора интегралов движения оператора эволюции для трехмерных моделей,
- исследование структуры уравнений движения соответствующей классической интегрируемой модели,
- поиск функциональных уравнений для полного набора интегралов движения в случае спиновых моделей,
- исследование квазиклассического предела квантовых моделей,
- исследование Янг-Бакстеровской структуры сплетающих операторов, получаемых при обратной трансмутации размерности в ранг.

Научная новизна. В работе приводится классификационная теорема для решений простого функционального уравнения тетраэдров, основной алгебраической системой для которых является однопараметрическая векторная модель. Дается формулировка новой основной алгебраической системы как системы вспомогательных линейных уравнений (следует подчеркнуть во избежание недоразумений, что вспомогательные линейные уравнения выписываются для *квантовой* дискретной трехмерной

модели). В этом случае пространство динамических переменных изначально является квантовым, равно как и эволюционная модель. Производящим функционалом для интегралов движения является определитель операторнозначной матрицы коэффициентов линейной задачи. Примечательна полнота производимой системы интегралов движения. Подробно рассматривается классический предел этой эволюционной модели, для которого исследуются лагранжевы уравнения движения и приводятся полное решение в конечном объеме, а также солитонное решение в бесконечном объеме. Лагранжевы уравнения движения являются трёхкомпонентным обобщением уравнения Хироты. В квантовом случае конечного числа состояний (спиновая модель), когда и трехмерный вершинный оператор, и оператор эволюции, и трансфер-матрица типа слой-слой являются конечными матрицами, что соответствует или модели Замолодчикова – Бажанова – Бакстера или более общей $3d$ “шахматной” модели в вершинных формулировках, для производящего функционала для интегралов движения предлагается новое универсальное функциональное уравнение, принципиально позволяющее вычислять спектры коммутативных интегралов движения. Все эти результаты являются новыми.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Классификация решений простого функционального уравнения тетраэдров.
2. Формулировка линейной вспомогательной задачи как основной алгебраической системы для ассоциативного некоммутативного кольца наблюдаемых.
3. Фиксация проективных калибровочных неоднозначностей в кольце наблюдаемых, приводящее к возникновению локальной алгебры Вейля и сплетающего отображения $\mathcal{R}$ как автоморфизма локальной алгебры Вейля.
4. Реализация сплетающего отображения в виде перестановочного соотношения с операторнозначной функцией $\mathbf{R}$, определяемой в терминах q-дилогарифмической функции и обобщенной перестановочной функции.
5. Редукция оператора $\mathbf{R}$ к случаю конечного числа состояний при $q^N = 1$, базис инвариантная форма конечной трехмерной $\mathbf{R}^{(N)}$-матрицы и вид функциональной части отображения.

6. Формулировка эволюционной модели для параметра квантовой деформации q общего положения и для решетки произвольной формы на торе.

7. Получение полного набора интегралов движения для эволюционного отображения, ассоциированного со вспомогательной решеткой произвольной формы, в виде определителя операторнозначной матрицы коэффициентов вспомогательной линейной задачи.

8. Комбинаторное представление интегралов движения в виде суммы по путям с фиксированным классом гомотопии относительно тора.

9. Рассмотрение классического предела эволюционной модели на вспомогательной решетке кагоме: полное решение в конечном объеме (конечный размер решетки кагоме с периодическими граничными условиями), параметризуемое в терминах тета-функций на якобиане спектральной кривой, в которую превращается производящая функция для интегралов движения.

10. Солитонные решения лагранжевых уравнений движения однородной классической эволюционной модели, являющихся обобщением уравнения Хироты-Мивы.

11. Формулировка конечномерных, для $q^N = 1$, интегрируемых моделей нового типа (L-шахматные модели), в которых нетривиально учитывается функциональная часть эволюционного отображения.

12. Функциональное уравнение для спектра коммутативных интегралов движения при $q^N = 1$, универсальное по своей природе, т.е. справедливое для любых вспомогательных решеток с любой степенью неоднородности.

13. В качестве частного случая рассмотрена эволюция динамической системы, определенной на полосе. В этом случае эволюция определяется квантовым дискретным уравнением, похожем на уравнение Лиувилля, и комбинаторный анализ моментально дает полный набор инволютивных интегралов движения.

14. Другой частный случай: квадратная вспомогательная решетка (не эволюционная) и трансфер-матрица типа слой-слой однородной модели Замолодчикова – Бажанова – Бакстера в вершинной формулировке. Это случай простейшего вида функционального уравнения для интегралов движения.

15. Исследование квазиклассического предела эволюционной модели и вычисление статсуммы модели свободных бозонов прямым интегрированием.

16. Исследование результата двумерного слоения трехмерных $\mathbf{R}$ матриц, соответствующее обратной трансмутации размерности в ранг. Построение Дринфельдового дубля, канонический элемент которого при надлежащей спецификации приводит к полученной серии двумерных R-матриц.

Научная и практическая ценность работы заключается, в частности, в том, что в работе реанимирован принцип линейной вспомогательной задачи, тривиализующей алгебраическое условие нулевой кривизны в трех измерениях, и к тому же в случае квантованных динамических переменных. Кроме того, в общем трехмерном подходе фигурирует понятие вспомогательной решетки произвольной *формы* и произвольного *размера*. Это порождает множество новых двумерных моделей при обратной трансмутации размерности в ранг (при минимальных размерах, различным формам решетки соответствуют, например, релятивистская цепочка Тоды, или или решеточная версия модели "синус-Гордон", или нечто похожее на дискретную модель Лиувилля). Наиболее же существенным нам представляется получение универсального функционального уравнения на спектр коммутативных интегралов движения для большого числа спиновых трехмерных моделей.

Апробация работы. Результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[18], докладывались на семинарах Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова, Лаборатории Теоретической Физики им. Н. Н. Боголюбова Объединенного Института Ядерных Исследований (г. Дубна), Института Физики Высоких Энергий (г. Протвино), Южно-Уральского Политехнического Университета (г. Челябинск), Института Теоретической Физики (г. Черноголовка), Института Теоретической и Экспериментальной Физики (г. Москва), Научно-Исследовательского Института Ядерной Физики (г. Москва), Математического Института им. Макса Планка (г. Бонн), Физического Института Боннского Университета (г. Бонн), Лаборатории Теоретической Физики и Высоких Энергий университета Париж-VI (г. Париж), Университета Пьера и Марии Кюри (г. Париж), Математического факультета Австралийского Национального Университета (г. Канберра), Школы Физики и Инженерных Приложений (г. Канберра) и на международных конференциях по математической физике в следующих городах: Алушта (1995 г.), Париж (1996 г.), Челябинск (1996,1998 гг.), Черноголовка (1998-2000 гг.), Протвино (1996-2001 гг.), Дубна (1998-2001 гг.), Прага (2000 г.), Токио (2000 г.), Киев (2000 г.).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав основного текста и заключения, содержит список литературы (ок. 100 ссылок). Объем диссертации ок. 250 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение работы содержит формулировку темы, краткий обзор и содержание диссертации.

Первая глава посвящена формулировке метода основной алгебраической системы и примерам матричных алгебраических систем.

Понятие алгебраической системы проистекает из давно известного метода локального уравнения Янга – Бакстера как трехмерного условия нулевой кривизны, простейшего с точки зрения двумерного генезиса. В двух словах, пусть $L_{1,2}(x)$ – Янг – Бакстеровская матрица весов, интерпретируемая как оператор, действующий в тензорном произведении изоморфных конечномерных пространств 1 и 2. Предполагается, что различные L матрицы имеют одну и ту же функциональную структуру, и различаются только своими аргументами. Аргументы же x имеют произвольную природу. В этом случае локальным уравнением Янга – Бакстера называется соотношение

$$L_{1,2}(x_1) \cdot L_{1,3}(x_2) \cdot L_{2,3}(x_3) = L_{2,3}(x'_3) \cdot L_{1,3}(x'_2) \cdot L_{1,2}(x'_1) . \qquad (1)$$

В случае, если при данной функциональной структуре $L(x)$ все x'_j восстанавливаются из (1) однозначно,

$$x'_j = f_j(x_1, x_2, x_3) , \quad j = 1, 2, 3 , \qquad (2)$$

то локальное уравнение Янга – Бакстера задает однозначное отображение, сплетающее левую и правую конфигурации L-матриц:

$$\mathcal{R}_{1,2,3} : x_1, x_2, x_3 \mapsto x'_1, x'_2, x'_3 . \qquad (3)$$

Отображение $\mathcal{R}_{1,2,3}$ интерпретируется как функциональный оператор, действующий на пространстве функций от вершинных переменных:

$$\forall\, \varphi(x_1, x_2, x_3, ...) : \ (\mathcal{R} \circ \varphi)(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x'_1, x'_2, x'_3). \qquad (4)$$

Подразумевается, что $\mathcal{R}_{1,2,3}$ действует тривиально на все остальные вершинные переменные $x_4, x_5, ...$, если таковые рассматриваются. Графически (1) представляется как эквивалентность двух по-разному ориентированных треугольников, условно обозначаемых как $\triangle$ и ∇, как на рисунке

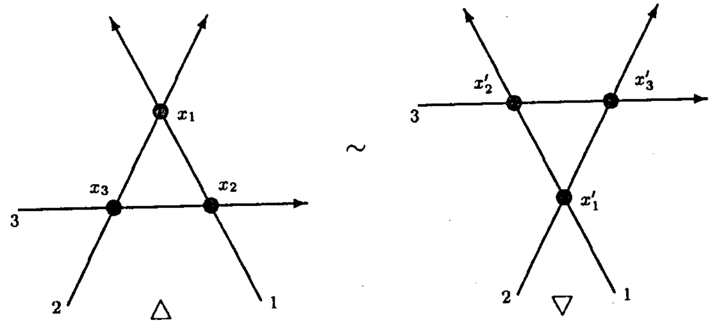


Рисунок 1: Янг – Бакстеровская эквивалентность треугольников типа $\triangle$ и ∇.

(1). При этом геометрическим образом матрицы L является вершина, и, следовательно, динамические переменные x_V ассоциированы с вершиной V.

В случае, когда рассматривается плоский граф более сложный, чем простой треугольник, то преобразование графа эквивалентно обычно нескольким последовательностям переклейки простых треугольников, и в силу однозначности разрешения (1) соответствующие последовательности применения сплетающих функциональных отображений $\mathcal{R}$ дают один и тот же результат. В частности, с неизбежностью выполняется функциональное уравнение тетраэдров:

$$\mathcal{R}_{1,2,3} \circ \mathcal{R}_{1,4,5} \circ \mathcal{R}_{2,4,6} \circ \mathcal{R}_{3,5,6} = \\ = \mathcal{R}_{3,5,6} \circ \mathcal{R}_{2,4,6} \circ \mathcal{R}_{1,4,5} \circ \mathcal{R}_{1,2,3} , \qquad (5)$$

где символы '$\circ$' обозначает суперпозицию функциональных отображений.

Ключевым для введения понятия основной алгебраической системы является то, что для вывода сплетающего отображения, решающего функциональное уравнение тетраэдров, является отнюдь не локальное уравнение Янга - Бакстера само по себе, а его графическое представление, рис. (1). Что необходимо, так это сформулировать правила, по которым вершине, треугольнику, или какому другому (произвольному плоскому) графу ставится в соответствие "наблюдаемый" алгебраический объект (в случае локального уравнения Янга - Бакстера наблюдаемый объект – это статсумма для открытого графа). Эти правила мы и называем основной алгебраической системой. Важным в определении основной алгебраической системы является то, что требование эквивалентности двух графов разрешалось бы однозначно, иначе сплетающее отображение будет не определено.

Вторым примером основной алгебраической системы, помимо локального уравнения Янга - Бакстера, является векторная модель, предложенная И. Корепановым: каждому ребру решетки приписывается некоторый n-мерный вектор, а правилом, из которого строится понятие эквивалентности, является требование $2n$-мерности линейного пространства четырех векторов, ассоциированных с окружающими любую вершину четырьмя ребрами.

В простейшем случае $n = 1$, и с любой ориентированной вершиной ассоциирована 2×2 матрица, отображающая пару независимых 'in'-векторов ϕ_1, ϕ_2 в пару 'out'-векторов ψ_1, ψ_2:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x), & b(x) \\ c(x), & d(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

причем матричные элементы являются некоторыми комплексными функциями единственной переменной $x = x_V \in \mathbb{C}$, которая и выступает в роли динамической переменной.

Задача однозначного сплетения треугольников $\triangle$ и ∇, рассматриваемая как набор функциональных уравнений как на вид функций $a(x), b(x), c(x), d(x)$, так и на вид отображения $x'_j = f_j(x_1, x_2, x_3)$, полностью решаема: существуют всего шесть нетривиальных форм $a(x), b(x), c(x), d(x)$ и соответственно, шесть сплетающих функциональных отображений, решающих функциональное уравнение тетраэдров (плюс еще два отображения как предельные случаи). Это составляет суть классификационной теоремы.

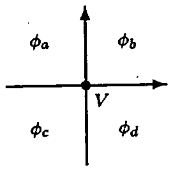
Помимо классификационной теоремы для векторных моделей предложен гипотетический метод квантования. А именно, если матрица в соотношении (6) является операторнозначной матрицей, элементы которой удовлетворяют некоторой локальной алгебре, то условие сохранения этой алгебры не противоречит сплетающим соотношениям в векторной модели. Технически сложное разрешение соотношений сплетения при наложении упомянутой локальной алгебры является одной из ближайших задач.

Со второй главы начинается рассмотрение нового типа основной алгебраической системы – вспомогательной линейной задачи. Основная алгебраическая система есть система линейных уравнений для "токов", ассоциированных с различными элементами клеточного комплекса. Для интуитивного понимания смысла линейной вспомогательной системы

удобно оперировать терминами электрических токов в плоской системе электрических сопротивлений. При этом каждое сопротивление характеризуется своим током и падением напряжения, а алгебраизация происходит благодаря двум правилам Кирхгофа: сумма токов, втекающих в узел, равна нулю, и падение напряжения вдоль замкнутого контура тоже есть ноль. При этом наблюдаемыми являются сопротивления между двумя внешними контактами. Кирхгофова система изначально линейна, поскольку в законе Ома $\Delta\Phi = r \cdot I$ – ток и разность потенциалов связаны линейным соотношением. Токовая система, описанная в диссертации, есть обобщение кирхгофовских правил и закона Ома. Благодаря тому, что система вспомогательных уравнений линейна, коэффициенты ее (аналоги электрических сопротивлений) можно считать образующими некоторого некоммутативного кольца. "Наблюдаемый" алгебраический объект – это система соотношений между внешними токами и полными падениями напряжения (т.е. "сопротивления" полной цепи). Соотношения сплетения же (аналог электрической дуальности звезда – треугольник) разрешаются неоднозначно, поскольку содержат проективную калибровочную инвариантность.

Однако, налагая требование локальности на динамические переменные, т.е. требование коммутативности всех элементов в различных вершинах одного и того же плоского графа (в классическом пределе это соответствует ультралокальности скобки Пуассона), можно зафиксировать калибровку так, что система соотношений сплетения становятся переопределенной, но совместной. Эта калибровка является альтернативой к пределу, воспроизводящему отображение электрических цепей. При этом абстрактное некоммутативное кольцо наблюдаемых с необходимостью превращается в ультралокальную алгебру Вейля. Приведем для этого случая линейную формулировку, однако не исходную "токовую", а двойственную, "ко-токовую". В двойственной формулировке вспомогательные линейные переменные ассоциируются с клетками двумерного графа, а каждое линейное уравнение на вспомогательные переменные ассоциировано с собственно вершиной. На рисунке (2) показано упорядочение клеточных "ко-токов" ϕ_a, ϕ_b, ϕ_c, ϕ_d, которые суть просто *вспомогательные линейные элементы*, вокруг ориентированной вершины V и определение ассоциированной с вершиной линейной формы f_V, равенство нулю которой и есть вершинное линейное уравнение на вспомогательные линейные элементы ϕ_a, ..., ϕ_d. Коэффициенты же в линейной форме являются вершинными динамическими переменными.

Для произвольного открытого плоского графа, образованного n ориентированными линиями и имеющего таким образом $\#V = \dfrac{n(n-1)}{2}$ вер-



$$\Leftrightarrow\ f_V = \phi_a + \phi_b\, q^{1/2}\mathbf{u}_V + \phi_c\,\mathbf{w}_V + \phi_d\,\kappa_V\,\mathbf{u}_V\,\mathbf{w}_V = 0.$$

Рисунок 2: Линейные элементы вокруг вершины и вершинное уравнение.

шин, $\#S_{cl} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ внутренних (замкнутых) клеток и $\#S_{op} = 2\,n$ внешних (открытых) клеток, линейная система строится как $\#V$ линейных вершинных форм по образцу рисунка (2). Система $\#V$ пар $\mathbf{u}_V, \mathbf{w}_V$ образует ультралокальную алгебру Вейля:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_V\,\mathbf{w}_V &= q\ \mathbf{w}_V\,\mathbf{u}_V\,, \\ [\mathbf{u}_V, \mathbf{u}_{V'}] &= [\mathbf{w}_V, \mathbf{w}_{V'}] = [\mathbf{u}_V, \mathbf{w}_{V'}] = 0\,,\quad V \neq V'\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Коэффициенты κ_V считаются $\mathbb{C}$-числовыми параметрами системы. При написании $\#V$ линейных форм f_V используются $\#S_{cl} + \#S_{op}$ клеточных ϕ_S, которые полагаются принадлежащими формальному левому модулю прямого произведения всех $\#V$ алгебр Вейля, и являются по смыслу квантовой функцией Бейкера-Ахиезера.

Эквивалентным данному является граф со смещенными линиями, например $\triangle \sim \nabla$. При этом ко-токи, ассоциированные с внешними (открытыми) клетками считаются равными внешним ко-токам исходного графа. Внутренние "ко-токи" для нового графа, равно как и новые вершинные переменные $\mathbf{u}'_V, \mathbf{w}'_V$ для измененной системы вершин отличаются от исходных. Принцип же эквивалентности есть тождественное совпадение внешних "ко-токов" для эквивалентных графов, или иными словами, есть эквивалентность систем линейных соотношений на внешние ко-токи, следующих из $f_V = 0$ и $f_{V'} = 0$. Числовой характер параметров κ_V подразумевает требование того, что κ_V, соответствующий пересечению пары линий в исходном графе, совпадал бы с $\kappa_{V'}$, соответствующем пересечению тех же самых линий в измененном графе.

Основной теоремой второй главы является то, что из условия линейной эквивалентности систем $f_V = 0$ для исходного графа и $f'_V = 0$ для измененного графа однозначно следует вид отображения $\mathbf{u}_V, \mathbf{w}_V \mapsto \mathbf{u}'_V, \mathbf{w}'_V$, причем это отображение автоматически сохраняет локальную алгебру Вейля.

Любое мыслимое преобразование эквивалентности можно устроить

как последовательность Янг-Бакстеровских переклеек. В терминах ко-токовых уравнений для получения эквивалентности Янг-Бакстеровских графов, на рисунке (1) следует задать восемь клеточных ко-токов. Внешние ко-токи для правого и левого графов, естественно, одни и те же. В качестве линейной системы возникает тройка вершинных уравнений для левого графа с коэффициентами $\mathbf{u}_j, \mathbf{w}_j, \kappa_j$, и тройка линейных уравнений для правого графа с коэффициентами $\mathbf{u}'_j, \mathbf{w}'_j, \kappa_j$. Обсуждаемое основное сплетающее отображение возникает как условие сильной эквивалентности этих двух троек линейных уравнений. Понятие "сильная эквивалентность" означает, что уравнения типа $\phi_x\cdot\mathbf{X}+\phi_y\cdot\mathbf{Y} = 0$, где ϕ_x и ϕ_y имеют смысл независимых линейных форм, решаются в виде: $\mathbf{X} \equiv 0$ и $\mathbf{Y} \equiv 0$.

Основное сплетающее отображение $\mathcal{R}$ для Янг-Бакстеровских графов

$$\mathcal{R}_{1,2,3}\ :\ \mathbf{u}_j, \mathbf{w}_j\ \mapsto\ \mathbf{u}'_j, \mathbf{w}'_j\,,\quad j = 1, 2, 3\,, \tag{8}$$

понимаемое как функциональное отображение на пространстве (рациональных) функций от некоммутативных переменных $\mathbf{u}_V, \mathbf{w}_V$ в духе (4), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'_1 &= \mathbf{w}_2\cdot\Lambda_3\,, & \mathbf{u}'_1 &= \Lambda_2^{-1}\cdot\mathbf{w}_3^{-1}\,, \\ \mathbf{w}'_2 &= \Lambda_3^{-1}\cdot\mathbf{w}_1\,, & \mathbf{u}'_2 &= \Lambda_1^{-1}\cdot\mathbf{u}_3\,, \\ \mathbf{w}'_3 &= \Lambda_2^{-1}\cdot\mathbf{u}_1^{-1}\,, & \mathbf{u}'_3 &= \mathbf{u}_2\cdot\Lambda_1\,, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \mathbf{u}_1^{-1}\cdot\mathbf{u}_3 - q^{1/2}\,\mathbf{u}_1^{-1}\cdot\mathbf{w}_1 + \kappa_1\ \mathbf{w}_1\cdot\mathbf{u}_2^{-1}\,, \\ \Lambda_2 &= \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\ \mathbf{u}_2^{-1}\cdot\mathbf{w}_3^{-1} + \frac{\kappa_3}{\kappa_2}\ \mathbf{u}_1^{-1}\cdot\mathbf{w}_2^{-1} - q^{-1/2}\ \frac{\kappa_1\,\kappa_3}{\kappa_2}\ \mathbf{u}_2^{-1}\cdot\mathbf{w}_2^{-1}\,, \\ \Lambda_3 &= \mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_3^{-1} - q^{1/2}\ \mathbf{u}_3\cdot\mathbf{w}_3^{-1} + \kappa_3\ \mathbf{w}_2^{-1}\cdot\mathbf{u}_3\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Как было отмечено, это отображение обратимо и является автоморфизмом локальной алгебры Вейля,

$$\mathbf{u}_V\,\mathbf{w}_V = q\ \mathbf{w}_V\,\mathbf{u}_V\ \ \Leftrightarrow\ \ \mathbf{u}'_V\,\mathbf{w}'_V = q\ \mathbf{w}'_V\,\mathbf{u}'_V\,. \tag{11}$$

Параметры же κ_j являются $\mathbb{C}$ – числовыми параметрами отображения. С одной точки зрения они являются спектральными параметрами трехмерного вершинного оператора, а с другой – модулями, поскольку разностное свойство отсутствует. В пределе $q = 1$ (и $q^{1/2} = -1$) $\mathcal{R}$ становится обычным Пуассоновым функциональным оператором, сохраняющим симплектическую структуру

$$\omega = \sum_{j=1,2,3} d \log \mathbf{u}_j \wedge d \log \mathbf{w}_j . \tag{12}$$

Исследованы и иные ипостаси линейной вспомогательной задачи, в частности, получена формулировка вспомогательной задачи в виде функционального уравнения Янга – Бакстера, причем соответствующее отображение L – бирациональное отображение.

В третьей главе мы строим реализацию основного сплетающего автоморфизма $\mathcal{R}$ в терминах q-дилогарифмической функции и обобщенной перестановочной функции. Под реализацией понимается формальная операторнозначная функция $\mathbf{R}_{1,2,3} = \mathbf{R}(\mathbf{u}_{1,2,3}, \mathbf{w}_{1,2,3})$, обладающая перестановочными соотношениями

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{u}'_j \cdot \mathbf{R} , \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{w}_j = \mathbf{w}'_j \cdot \mathbf{R} , \quad j = 1,2,3 , \tag{13}$$

где штрихованные элементы тождественно определяются (9,10). Полученная $\mathbf{R}$-матрица зависит не только от локальных Вейлевских образующих, но и от тройки свободных спектральных параметров κ_j.

Уравнение тетраэдров допускает некоторые предельные случаи, получаемые вырождениями параметров κ_j. Соответственно, и формальная $\mathbf{R}$-матрица также имеет пределы, решающие уравнение тетраэдров. Система предельных случаев матрицы $\mathbf{R}$ образует иерархическую систему $\mathbf{R}$-матриц, так что исходная матрица является наиболее сложным членом иерархии. В терминах отображения (9) эти пределы соответствуют, например,

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 << 1 , \tag{14}$$

что называется плоским пределом (терминология инспирирована свойствами конечных R-матриц), и

$$\kappa_1 << \kappa_2 = \kappa_3 << 1 , \tag{15}$$

что соответствует простейшей нетривиальной $\mathbf{r}$-матрице, имеющей помимо прочего число алгебраический (в терминах дубля Гейзенберга для $B_+(A_1)$) генезис [19]. Интересно, что оказалось возможным написать аналогичную иерархическую систему операторных решений уравнения 4 симплексов, но кроме старшего члена.

Случай, когда $q^N = 1$, отвечает конечномерным унитарным представлениям Вейлевской алгебры, и, соответственно, из матрицы $\mathbf{R}$ можно выделить конечномерную часть $\mathbf{R}^{(N)}$. Само же $\mathbf{R}$ в пределе $q^N \mapsto 1$

содержит помимо конечной части еще и функциональную часть, действующую на параметрах конечномерных представлений тройки локальных Вейлевских алгебр. Конечная форма матрицы $\mathbf{R}^{(N)}$ выводится как в базис-инвариантной форме, так и в виде матричных элементов в специальном базисе, в котором матричные элементы полученной $\mathbf{R}^{(N)}$ совпадают с известной R-матрицей серии Замолодчикова – Бакстера – Бажанова [20, 21, 22, 23, 24]. При тривиализации функциональной части показывается возникновение Замолодчиковской параметризации конечной $\mathbf{R}^{(N)}$ в терминах углов сферического треугольника при следующем отождествлении параметров κ_j матрицы $\mathbf{R}^{(N)}_{1,2,3}$ с двугранными углами θ_j сферического треугольника:

$$\kappa_1^N = \left(\tan \frac{\theta_1}{2}\right)^2 , \quad \kappa_2^N = \left(\cot \frac{\theta_2}{2}\right)^2 , \quad \kappa_3^N = \left(\tan \frac{\theta_3}{2}\right)^2 . \tag{16}$$

Четвертая глава посвящена исследованию эволюционной модели, порождаемой сплетающим отображением в классическом $q^{1/2} = -1$ пределе. Хорошая эволюционная модель возникает, когда плоский граф, на котором определена основная алгебраическая система, трансляционно инвариантен, и кроме того на динамические переменные наложено условие тороидальной периодичности. Трансляционная инвариантность графа нужна для однородности системы, чтобы одношаговая эволюция воспроизводила бы структуру решетки, а периодические условия нужны для конечности фазового пространства. Простейшая решетка, обладающая искомой трансляционной инвариантностью, а также содержащая треугольники обоих типов (как на рисунке 1), называется решеткой кагоме, см. рисунок (3). Решетки кагоме совершенно естественно возникают в сечении кубической решетки наклонными плоскостями.

На решетке кагоме для каждого треугольника Δ-типа, т.е. эквивалентного левому Янг-Бакстеровскому графу рисунка (1), и пронумерованного парой целых индексов (a, b), как на рисунке (3), имеются три различных сорта вершин, 1, 2 и 3. Таким образом, фазовое пространство модели образовано $\Delta = 3\,M^2$ локальными парами

$$\{ \mathbf{u}_{j,a,b} , \mathbf{w}_{j,a,b} \} , \quad a , b \in \mathbb{Z}_M , \quad j = 1,2,3 , \tag{17}$$

причем $\mathbb{Z}_M$ цикличность означает

$$\mathbf{u}_{j,a+M,b} = \mathbf{u}_{j,a,b+M} = \mathbf{u}_{j,a,b} , \quad \mathbf{w}_{j,a+M,b} = \mathbf{w}_{j,a,b+M} = \mathbf{w}_{j,a,b} . \tag{18}$$

Упорядочение индексов (a, b) также показано на рисунке (3). Функциональный оператор эволюции

$$\mathcal{E} : \mathbf{u}_{j,a,b}, \mathbf{w}_{j,a,b} \mapsto \mathbf{u}^\star_{j,a,b}, \mathbf{w}^\star_{j,a,b} , \tag{19}$$

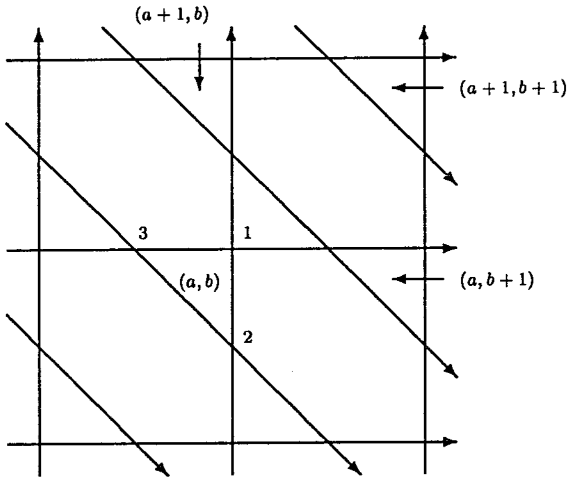


Рисунок 3: Решетка кагоме.

действующий на пространстве функций на фазовом пространстве (см. (4)) определяется посредством

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{\star}_{1,a,b} = \mathbf{u}'_{1,a,b}\,, & \mathbf{w}^{\star}_{1,a,b} = \mathbf{u}'_{1,a,b}\,, \\ \mathbf{u}^{\star}_{2,a,b} = \mathbf{u}'_{2,a-1,b}\,, & \mathbf{w}^{\star}_{2,a,b} = \mathbf{w}'_{2,a-1,b}\,, \\ \mathbf{u}^{\star}_{3,a,b} = \mathbf{u}'_{3,a,b-1}\,, & \mathbf{w}^{\star}_{3,a,b} = \mathbf{w}'_{3,a,b-1}\,, \end{cases} \tag{20}$$

где штрихованные величины определяются из (9,10) пределом к $q^{1/2} = -1$ с соответствующей тривиальной локализацией

$$\mathbf{u}_j \mapsto \mathbf{u}_{j,a,b}\,, \quad \mathbf{w}_j \mapsto \mathbf{w}_{j,a,b}\,, \quad \Lambda_j \mapsto \Lambda_{j,a,b}\,, \tag{21}$$

а κ_j считаются пространственно однородными, что соответствует автономной эволюции. Определение эволюционного отображения геометрически соответствует одновременному сдвигу всех наклонных линий решетки кагоме вверх-вправо, что приводит в возникновению локализованных по (a,b)-ым треугольникам Δ-типа отображений $\mathbf{R}$ с последующей естественной (a,b)-ренумерацией вершин новых треугольников ∇-типа. Из определения отображения $\mathcal{R}$ следует, что отображение $\mathcal{E}$ является каноническим, сохраняющим симплектическую структуру

$$\omega = \sum_{j,a,b} d\log \mathbf{u}_{j,a,b} \wedge d\log \mathbf{w}_{j,a,b}\,. \tag{22}$$

Отображение $\mathcal{E}$ мы называем эволюцией в том смысле, что примененное t раз подряд, оно определяет вид динамических переменных в момент t дискретного времени, а исходный набор соответствует времени $t_0 = 0$:

$$\mathcal{E}^{\circ t} : [\mathbf{u}_{j,a,b}(0) = \mathbf{u}_{j,a,b}, \mathbf{w}_{j,a,b}(0) = \mathbf{w}_{j,a,b}] \mapsto [\mathbf{u}_{j,a,b}(t), \mathbf{w}_{j,a,b}(t)]\,. \tag{23}$$

Таким образом пространственно-временными дискретными координатами является тройка (t,a,b).

Тороидальные граничные условия разрушают понятие наблюдаемых вспомогательных линейных переменных при формулировке основной алгебраической системы. Для замкнутой решетки число вершин равно числу клеток, причем все клетки являются внутренними. Однако всегда остается некоторое воспоминание об исходной алгебраической системе, которое и содержит информацию об интегралах движения полученной эволюции.

Для линейных переменных допустимо наложение не тривиальных периодических граничных условий, а квазипериодических, то есть при полном обходе тора по циклам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ вспомогательные линейные переменные приобретают дополнительные множители, $\mathbb{C}$-числовые квазиимпульсы A и B. Алгебраическая система же превращается в систему однородных линейных уравнений вида

$$f_V \stackrel{def}{=} \sum_S \phi_S\, \ell_{S,V} = 0\,, \tag{24}$$

где каждое из уравнений имеет тот же самый вид, что и приведенное на рисунке (2). Коэффициенты же собираются в матрицу $\mathbf{L} = ||\ell_{S,V}||$, равенство нулю определителя которой,

$$\mathbf{J}_f = \det \mathbf{L}\,, \tag{25}$$

есть условие разрешимости системы линейных уравнений. Доказывается, что этот определитель $\mathbf{J}_f$, являющийся Лорановским полиномом по квазиимпульсам A и B, инвариантен относительно эволюции, и, следовательно, содержит набор интегралов движения как коэффициентов в разложении по A и B. Таким образом, квазиимпульсы сыграли роль двойного спектрального параметра. Уравнение же $\mathbf{J}_f = 0$ в точке общего положения задает плоскую спектральную кривую рода $g = 3M^2 - 3M + 1$, где M-размер решетки кагоме. Система линейных уравнений рисунка (2) решается методами алгебраической геометрии, при этом система динамических переменных $\mathbf{u}_V, \mathbf{w}_V$, равно как и вспомогательная функция Бейкера-Ахиезера ϕ_S, явно параметризуются в терминах тета-функций на якобиане спектральной кривой. Параметризация содержит произвол в виде точки на якобиане, отвечающей g нетривиальным временам, а также произвольные $3M-1$ предэкспонент. В алебро-геометрическом подходе плоская кривая предполагается произвольной, задаваемой g независимыми модулями. А это доказывает полноту системы интегралов движения (количество модулей плюс количество предэкспонент равно половине размерности фазового пространства). Для простейшего случая $g = 1$ приводится параметризация в терминах обычных эллиптических функций.

Далее исследуются лагранжевы уравнения движения. Лагранжевыми переменными оказывается триплет τ-функций, а солитонными уравнениями является тройка уравнений следующего вида. Пусть (α, β, γ) - тройка индексов, являющихся циклической перестановкой $(1,2,3)$. Пусть далее $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$-базисная тройка трехмерного Евклидова пространства, с помощью которой задается положение целочисленных узлов кубической решетки:

$$\mathbf{p} = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + p_3 \mathbf{e}_3 = (p_1 + p_2 + p_3 = t, p_2 = a, p_3 = b)\,. \quad (26)$$

Второе равенство задает соответствие системы координат светового конуса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и исходной, (см. замечание после формулы (23)) лабораторной системы координат (t, a, b). В введенных обозначениях тройка солитонных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} r_\alpha\, \tau_{\alpha,\mathbf{p}+\mathbf{e}_\beta+\mathbf{e}_\gamma}\, \tau_{\beta,\mathbf{p}}\, \tau_{\gamma,\mathbf{p}} &= \tau_{\alpha,\mathbf{p}}\, \tau_{\beta,\mathbf{p}+\mathbf{e}_\gamma}\, \tau_{\gamma,\mathbf{p}+\mathbf{e}_\beta} + \\ &+ s_\beta\, \tau_{\alpha,\mathbf{p}+\mathbf{e}_\beta}\, \tau_{\beta,\mathbf{p}+\mathbf{e}_\gamma}\, \tau_{\gamma,\mathbf{p}} + s_\gamma^{-1}\, \tau_{\alpha,\mathbf{p}+\mathbf{e}_\gamma}\, \tau_{\beta,\mathbf{p}}\, \tau_{\gamma,\mathbf{p}+\mathbf{e}_\beta}\,. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь коэффициенты r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, и s_3 определяются параметрами κ_1, κ_2, κ_3 и предэкспоненциальными факторами. В диссертации приводятся солитонные решения этой системы. Каждая парциальная солитонная волна содержит ещё два дополнительных параметра, параметризующих дисперсионное соотношение, что порождает весьма нетривиальный вид вершинного оператора. Кроме того, следует отметить нетривиальное действие группы куба на полученных солитонных уравнениях.

Пятая глава посвящена исследованию квантовой эволюционной модели. Квантовое отображение $\mathcal{E}$ задается теми же формулами, что и классическое, (20,23) и т.д., но с восстановленными $q^{1/2}$ и, конечно же, с некоммутативными $\mathbf{u}_{j,a,b}$, $\mathbf{w}_{j,a,b}$. В силу определения рис. (2), линейная система вида (24) пишется и для квантового случая. Более того, в силу локальности, матричные элементы $\ell_{S,V}$ для различных V коммутируют,

так что формальный определитель квантовой матрицы $\mathbf{L}$ легко определим,

$$\mathbf{J} = \sum_{\{\sigma\}} (-)^\sigma \prod_S \ell_{S,V=\sigma S}\,, \quad (28)$$

поскольку в произведении по клеткам S все множители при любой перестановке σ коммутируют. Линейность системы вспомогательных уравнений (24) по-прежнему позволяет ввести $\mathbb{C}$-числовые квазиимпульсы A и B, и $\mathbf{J} = \mathbf{J}(A, B)$ является Лорановским полиномом по A и B с операторнозначными коэффициентами. В диссертации доказывается, что $\mathbf{J}(A, B)$ производит полный набор интегралов движения для квантового эволюционного отображения $\mathcal{E}$.

Будучи определителем локальной матрицы, производящий функционал для интегралов движения допускает комбинаторное представление своих слагаемых в виде путей по решетке, и при этом каждый интеграл движения соответствует всем путям фиксированного класса гомотопии относительно тора, на котором определена решетка.

Особое внимание уделено случаю конечномерного оператора эволюции, возникающего при $q^N = 1$. В этом случае развиваемый в диссертации метод позволяет получить некое универсальное функциональное уравнение на $\mathbf{J}$, общая форма которого справедлива для вспомогательной решетки произвольной формы и размера, и определяющее спектр конечномерных коммутативных интегралов движения. Как было отмечено в третьей главе, при $q^N = 1$ все отображения имеют функциональную часть – отображение N-х степеней параметров конечномерного представления алгебры Вейля. Для N-х степеней можно сформулировать классическую эволюционную модель, аналогичную квантовой, со своим спектральным детерминантом и $\mathbb{C}$-числовыми интегралами движения. Функциональное уравнение связывает квантовый спектральный детерминант с классическим, и является свойством ультралокальности алгебры Вейля и структуры вспомогательной линейной задачи. Ниже мы выпишем это уравнение для простой однородной модели Замолодчикова - Бажанова - Бакстера.

Далее рассмотрен простейший специальный случай эволюционной системы: эволюция не тора, а полосы толщиной 1. Эволюционные уравнения являются близкими аналогами квантового уравнения Лиувилля. Комбинаторный анализ интегралов движения проводится до конца, и интегралы выписываются въявь. Примечательным является применимость терминологии классического Бете-анзаца при описании этих интегралов.

В качестве другого примера рассмотрена однородная модель Замолодчикова – Бажанова – Бакстера в вершинной формулировке, но не для эволюционной вспомогательной решетки, а для более простой, квадратной вспомогательной решетки. Метод квантового спектрального детерминанта дает полный набор операторов, коммутирующих с трансфер-матрицей типа слой-слой. Простота формулировки позволяет продемонстрировать возникающую матрицу коэффициентов линейной задачи и получающееся функциональное уравнение.

Вершины квадратной вспомогательной решетки параметризуются парой индексов (a,b), $a \in \mathbb{Z}_A$ и $b \in \mathbb{Z}_B$, и для каждой вершины определена локальная пара $\mathbf{u}_{a,b}, \mathbf{w}_{a,b}$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{a,b} &= 1 \otimes 1 \otimes ... 1 \otimes \underbrace{\mathbf{x}}_{(a,b)-\text{е место}} \otimes 1 ... \\ \mathbf{w}_{n,m} &= 1 \otimes 1 \otimes ... 1 \otimes \underbrace{\mathbf{z}}_{(a,b)-\text{е место}} \otimes 1 ... \end{aligned} \tag{29}$$

а $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$ – стандартное N-мерное представление Вейлевских соотношений унитарными матрицами при $q^N = 1$:

$$\mathbf{x} \cdot |\gamma> = |\gamma> q^\gamma \,, \quad \mathbf{z} \cdot |\gamma> = |\gamma+1> \,, \quad <\gamma|\gamma'> = \delta_{\gamma,\gamma'}. \tag{30}$$

Именно в таком базисе матричные элементы $\mathbf{R}^{(N)}$ и совпадают с известной R-матрицей модели Замолодчикова – Бажанова – Бакстера, а трансфер-матрица типа слой-слой определяется как

$$<\gamma|\mathbf{T}|\gamma'> = \sum_{\{\alpha,\beta\}} \prod_{a,b} <\alpha_{a,b}, \beta_{b,a}, \gamma_{a,b}|\mathbf{R}^{(N)}|\alpha_{a,b+1}, \beta_{b,a+1}, \gamma'_{a,b}> . \tag{31}$$

Для заданной вспомогательной решетки система вершинных линейных форм, из которой извлекается матрица коэффициентов, выглядит так:

$$f_{a,b} = \phi_{a,b} + \phi_{a,b+1}\, q^{1/2}\mathbf{u}_{a,b} + \phi_{a-1,b}\,\mathbf{w}_{a,b} + \phi_{a-1,b+1}\,\kappa \mathbf{u}_{a,b}\mathbf{w}_{a,b} \,, \tag{32}$$

где подразумеваются граничные условия

$$\phi_{a-A,b} = X\, \phi_{a,b} \,, \quad \text{и} \quad \phi_{a,b+B} = Y\, \phi_{a,b} \,, \tag{33}$$

и в силу (16) отождествляется $\kappa = \kappa_3$. Все $\mathbf{u}_{a,b}$, $\mathbf{w}_{a,b}$ одинаково нормированы, и κ не зависит от номера вершины, т.е. рассматривается однородная модель. Определитель же матрицы коэффициентов

$$\mathbf{J}(X,Y|\kappa) = \sum_{n=0}^{B} \sum_{m=0}^{A} X^n\, Y^m\, \mathbf{J}_{n,m}(\kappa) \tag{34}$$

коммутирует с квантовой трансфер-матрицей $\mathbf{T}$. Заметим, что $J_{0,0} \equiv 1$. Алгебра интегралов движения такова:

$$\mathbf{J}_{n,m} \cdot \mathbf{J}_{n',m'} = q^{n'm-nm'}\, \mathbf{J}_{n',m'} \cdot \mathbf{J}_{n,m} . \tag{35}$$

Видно, что если выделить из каждого элемента $\mathbf{J}_{n,m}$ подходящим образом определенный фактор $\mathbf{U}^m\, \mathbf{W}^n$,

$$\mathbf{J}_{n,m} = \mathbf{U}^m\, \mathbf{W}^n \cdot \mathbf{t}_{n,m} \,, \tag{36}$$

такой, что

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{W} = q\, \mathbf{W} \cdot \mathbf{U} \,, \tag{37}$$

то оставшиеся $\mathbf{t}_{n,m}$ будут коммутировать. Без ограничения общности можно положить

$$\mathbf{U} = \prod_{b \in \mathbf{Z}_B} \mathbf{u}_{1,b} \,, \quad \mathbf{W} = \prod_{a \in \mathbf{Z}_A} \mathbf{w}_{a,1} . \tag{38}$$

Пара $\mathbf{U}, \mathbf{W}$, очевидно имеющая смысл центра инерции системы, коммутирует со всеми остальными $\mathbf{t}_{n,m}$. Функциональное уравнение же имеет вид:

$$\det_{\mathbf{U},\mathbf{W}} \mathbf{J}(A,B) = \prod_{\substack{x^A = X^N \\ y^B = Y^N}} \left(1 - \epsilon_N\, y + \epsilon_N\, x + \kappa^N\, x\, y\right) , \tag{39}$$

где в левой части берется определитель по $\mathbf{U}, \mathbf{W}$-блоку в блочном разложении системы инвариантов $\mathbf{U}, \mathbf{W}, \mathbf{t}_{n,m}$, а произведение в правой части берется по $A\,B$ множителям, отвечающим различным корням A-й и B-й степеней для x и y. В уравнении (39) использованы обозначения для знаков $\epsilon_N \equiv (-)^{N-1}$. Уравнение (39) производит Абелеву алгебру коммутативных $\mathbf{t}_{n,m}$ и эквивалентно набору характеристических полиномов для каждого из $\mathbf{t}_{n,m}$. Это уравнение в принципе решает модель Замолодчикова – Бажанова – Бакстера. По сути уравнений (39) для квадратной вспомогательной решетки есть удивительно простая, компактная форма записи всей системы уравнений вложенного Бете-анзаца. Однако, на других вспомогательных решетках ни о какой технике квантового метода обратной задачи речи не идет, но функциональное уравнение такого типа все равно есть.

В шестой главе изложен метод квазиклассического предела функциональных отображений, эволюционных моделей и пр. Пространство динамических переменных в квазиклассических моделях является касательным расслоением пространства переменных классических эволюционных моделей. Технически квазиклассические модели реализуются посредством вершинных операторов специального типа (Гауссовы операторы), присоединенное действие которых образует группу линейных автоморфизмов локальной алгебры Гейзенберга. Для таких свободных моделей построим как спектр оператора эволюции, так и статсумма в виде трехмерного интеграла. В частности, исследован квазиклассический (в данном случае соответствующий первому порядку в $\hbar$ разложении, $q = e^{-\hbar}$) предел нашего основного отображения $\mathbf{R}$, являющийся моделью свободных бозонов. Описан спектр. Статсумма модели свободных бозонов, эквивалентная Бакстеровской статсумме модели Замолодчикова, вычислена посредством простого интегрирования.

В седьмой главе исследована редукция трехмерных $\mathbf{R}$ матриц к двумерным. Метод этой редукции, т.н. слоение, хорошо известен и отвечает скрытию третьего пространственного измерения в ранг достаточно большой изотопической группы симметрии двумерной $\mathcal{R}$-матрицы:

$$\mathcal{R}_{A,B} = \text{Trace}_3 \; (\mathbf{R}_{a_1,b_2,3} \cdot \mathbf{R}_{a_2,b_2,3} \cdots \mathbf{R}_{a_n,b_n,3}) \; , \qquad (40)$$

где для мультипространств использованы обозначения

$$A = \prod_{j=1}^{n} \otimes \; a_j \; , \quad B = \prod_{j=1}^{n} \otimes \; b_j \; . \qquad (41)$$

Редукцию мы производим для простейшей трехмерной $\mathbf{R}$-матрицы $\mathbf{r}$ из иерархического списка. Хотя трехмерная $\mathbf{r}$ не зависит от каких-либо числовых параметров, результат слоения содержит центр определенного типа, $z = x_A \otimes x_B^{-1}$, который может быть отождествлен с мультипликативным спектральным параметром уравнения Янга – Бакстера.

Конечно же, двумерные операторнозначные R-матрицы есть ни что иное как R-матрицы для аффинной теории поля Тоды с алгеброй $U_q(A_{n-1}^{(1)})$ и с произвольным спектральным параметром. Особое внимание уделяется построению универсальной R матрицы

$$\mathcal{R} = \sum_{\alpha} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}^\alpha \; , \qquad (42)$$

дающей при подходящей спецификации полученные операторные матрицы. Описана соответствующая конструкция Дринфельдова дубля, отличающаяся от стандартной некоторой модификацией Картановской части.

В заключении кратко перечислены результаты диссертации и, что представляется существенным, весьма подробно перечислены ближайшие перспективные задачи этого направления, многие из которых благодаря ра̀звитому методу превратились в чисто технические, вычислительные проблемы.

Ссылки

[1] S. M. Sergeev. “Quantum 2+1 evolution model”. *Journal of Physics A: Math. Gen.*, Vol. 32 (1999) 5639-5714.

[2] S. M. Sergeev. “A three-dimensional quantum integrable mapping”. *TMF*, Vol. 118, No. 3 (1999) 479-487.

[3] S. M. Sergeev. “3d symplectic map”. *Phys. Lett. A*, V. 253, N. 3-4, pp. 145-150, 1999.

[4] I. G. Korepanov and S. M. Sergeev. “ Eigenvector and eigenvalue problem for 3*d* bosonic model ”. *solv-int/9802014*, 1998, appeared in Acta Applicandae Mathematicae.

[5] I. G. Korepanov R. M. Kashaev and S. M. Sergeev. “ Functional tetrahedron equation ”. *TMF*, V. 117, N. 3, pp. 370-384, 1998.

[6] S. M. Sergeev. “On a two dimensional system associated with the complex of the solutions of the tetrahedron equation.”. *solv-int/9709013*, 1997, appeared in Int. Journal of Mathematical Physics A.

[7] S. M. Sergeev. “Solutions of the functional tetrahedron equation connected with the local Yang – Baxter equation for the ferro-electric.”. *Lett. Math. Phys.*, Vol.45, No. 2, 1997.

[8] S. M. Sergeev. “Rwo – dimensional R – matrices – descendants of three dimensional R – matrices.”. *Mod. Phys. Lett. A*, Vol. 12, No. 19, pp. 1393 – 1410., 1997.

[9] S. M. Sergeev J.-M. Maillard. “Three dimensional integrable models based on modified tetrahedron equations and quantum dilogarithm.”. *Phys. Lett.*, B 405, pp. 55-63, 1997.

[10] S. M. Sergeev. “Operator solutions of simplex equations”. In *Proceedings of the International Conference of the Mathematical Physics, Alushta*, Dubna, May 1996.

[11] V. V. Bazhanov S. M. Sergeev and V. V. Mangazeev. "Quantum dilogarithm and the tetrahedron equation". *Preprint IHEP*, 95-141, 1995.

[12] I. G. Korepanov J.-M. Maillard and S. M. Sergeev. "Classical limit for a 3d lattice spin model". *Phys. Lett.*, A 232, pp. 211-216, 1997.

[13] S. M. Sergeev. "Solitons in a 3d integrable model". *Phys. Lett. A* 265 (1999) 364-368.

[14] S. M. Sergeev. "On exact solution of a classical 3d integrable model", *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, Vol. 7. (2000) 1-16.

[15] S. M. Sergeev. "Auxiliary transfer matrices for three dimensional integrable models", *TMF*, Vol. 124, N. 3 (2000) 1187-1201.

[16] S. M. Sergeev. "Some properties of local linear problem's matrices". in the memorial volume of A. Izergin, proceedengs of SPBMI. In russian.

[17] S. M. Sergeev. "Integrable three dimensional models in wholly discrete space-time". in "Integrable Structures of Exactly Solvable Two-Dimensional Models of Quantum Field Theory", to be issued by Kluwer Academic Publishers.

[18] S. M. Sergeev. "Complex of three dimensional integrable models". in special issue "Difference Equations", Institute of Physics Publishing Limited.

[19] S. M. Sergeev R. M. Kashaev. "On pentagon, ten-term, and tetrahedron relations". *Commun. Math. Phys.*, 195, 309-319, 1998.

[20] S. M. Sergeev V. V. Mangazeev and Yu. G. Stroganov. "The vertex formulation of the Bazhanov - Baxter model". *J. Stat. Phys.*, Vol. 82, Nos 1/2, 1996.

[21] S. M. Sergeev H. E. Boos, V. V. Mangazeev and Yu. G. Stroganov. "ψ – vectors for three-dimensional models". *Mod. Phys. Lett. A*, Vol. 11, No. 6, pp. 491-498, 1996.

[22] S. M. Sergeev V. V. Mangazeev and Yu. G. Stroganov. "New solution of vertex type tetrahedron equation". *Mod. Phys. Lett,*, **A10**, 279-287, 1995.

[23] S. M. Sergeev V. V. Mangazeev and Yu. G. Stroganov. "New series of 3d lattice integrable models". *Intnl. J. Mod. Phys.*, **A9**, 5517-5530, 1994.

[24] S. M. Sergeev V. V. Mangazeev and Yu. G. Stroganov. "The tetrahedron equation and its solution". In *Proceedings of the conference SMQFT*, Los Angeles, May 16-21 1994.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 сентября 2001 года.