ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

5-2001-146

На правах рукописи
УДК 530.1:51-7
512.55
512.664.3
519.688

КОРНЯК
Владимир Васильевич

МЕТОДЫ НЕКОММУТАТИВНОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Специальность: 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Дубна 2001

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, профессор	Е.А. Гребеников
Доктор физико-математических наук	А.А. Михалёв
Доктор физико-математических наук, профессор	Ю.П. Рыбаков

Ведущая организация:
Санкт-Петербургское Отделение Математического Института им. Стеклова

Защита диссертации состоится "23" ноября 2001 г. на заседании диссертационного совета Д720.001.04 в Объединённом институте ядерных исследований (Лаборатория информационных технологий), Дубна, Московской области. в 14 часов

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединённого института ядерных исследований.

Автореферат разослан "19" октября 2001 г.

Учёный секретарь совета
кандидат физико-математических наук З.М. Иванченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Современные модели теоретической и математической физики требуют развития методов исследования сложных математических объектов, обладающих нетривиальными алгебраическими свойствами, такими как неассоциативность и некоммутативность. Примерами таких структур являются алгебры и супералгебры Ли, грассмановы алгебры и супермногообразия, расслоения со связностями Римана-Картана и калибровочными связностями, структуры некоммутативной геометрии и квантовые группы и т. д. Целью направления, называемого некоммутативной компьютерной алгеброй, является разработка методов и алгоритмов для работы с такими математическими объектами, создание компьютерных программ и решение прикладных задач с помощью этих программ. Стандартные системы компьютерной алгебры, такие как *Maple*, *Mathematica*, *Reduce*, *Macsyma*, *Axiom*, *GAP* и т. п., обычно либо не имеют достаточно развитых средств для работы с упомянутыми математическими структурами, либо недостаточно эффективны для получения действительно новых результатов в актуальных прикладных задачах, имеющих в силу своей природы высокую вычислительную сложность. В связи с этим, разработка особых алгоритмических подходов и их эффективная реализация в виде компьютерных программ представляется весьма актуальной. Результаты решения конкретных задач, помимо непосредственного значения в тех областях, к которым эти задачи относятся, дают важный стимул для развития соответствующих алгоритмов и программ.

В диссертации рассматриваются три актуальные вычислительные проблемы математики и математической физики: вычисление конечно представленных алгебр и супералгебр Ли, вычисление когомологий (супер)алгебр Ли и вычисление асимптотических спектральных инвариантов эллиптических операторов, действующих на замкнутых компактных искривлённых многообразиях с кручением и калибровочными полями. Все эти задачи объединяет то, что математическими структурами, над которыми производятся основные манипуляции, являются алгебры над различными кольцами и полями. Эти алгебры отличаются операциями умножения, которые могут быть некоммутативными и неассоциативными.

По-видимому, исследование алгебраических систем, заданных образующими и определяющими соотношениями, с алгоритмической точки зрения началось с проблемы тождества слов для групп, сформулированной М. Деном в 1911 г.: найти алгоритм, способный для группы, заданной конечным множеством генераторов и соотношений, определить, является ли данное слово, составленное из генераторов, единицей в группе. Эта задача была мотивирована топологией и Ден решил её для случая фундаментальных (т. е., первых гомотопических) групп ориентируемых поверхностей. Впоследствии П.С. Новиков, доказал, что в общем случае проблема Дена неразрешима. Из этих исследований возникло направление, называемое в настоящее время комбинаторной алгеброй. Изучение конечно представленных алгебр и суперлгебр Ли является одной из важных частей комбинаторной алгебры. Среди учёных активно работавших в этой области можно упомянуть Ю.А. Бахтурина, Л.А. Бокутя, Н. Джекобсона, М.В. Зайцева, А.А. Золотых, В.Г. Каца, А.И. Кострикина, Г.П. Кукина, Р. Линдона, А.А. Михалёва, В.М. Петроградского, Ю.П. Размыслова, Ж.-П. Серра, В.А. Уфнаровского, М. Холла, А.И. Ширшова. Основной задачей является построение наиболее общей (супер)алгебры Ли, удовлетворяющей заданной системе соотношений. Эта задача сводится к построению полной системы соотношений, называемой также каноническим базисом или базисом Грёбнера идеалов свободных (супер)алгебр Ли. Канонические базисы для алгебр Ли были введены А. И. Ширшовым, а для супералгебр Ли – А. А. Михалёвым. Конечно представленные (супер)алгебры Ли имеют многочисленные приложения в физике и математике, например, при исследовании симметрий нелинейных дифференциальных уравнений, при изучении алгебр наблюдаемых в различных квантово-полевых теориях, при построении деформаций алгебр и супералгебр Ли в квантовые группы (q-квантование), при изучении гомологических и гомотопических свойств нётеровых колец и т. д.

Задачи современной математики, математической и теоретической физики требуют все большего использования топологических и геометрических методов. Важным элементом этих методов является изучение гомологических и когомологических свойств различных математических объектов и структур, возникающих при построении современных физических моделей. Особое место в таких исследованиях занимает вычисление когомологий (и гомологий) алгебр и супералгебр Ли, в частности, бесконечномерных градуированных (супер)алгебр Ли векторных

полей. Среди приложений когомологий (супер)алгебр Ли можно упомянуть: характеристические классы слоений; теорию кобордизмов; инвариантные дифференциальные операторы; комбинаторные тождества, найденные Эйлером, Клейном, Дайсоном и Макдональдом и т. д.; вычисление важных для квантовой теории центральных расширений и деформаций (супер)алгебр Ли; построение уравнений супергравитации для N-расширенного суперпространства Минковского и поиск возможных моделей для этих суперпространств; описание аналога тензора кривизны для систем с нелинейными неголономными связями, что можно использовать для исследования устойчивости неголономных систем, таких как подшипники, гироскопы, электромеханические устройства, волны в плазме и т.д.; построение так называемых алгебр Ли высшего порядка (с n-арной операцией вместо скобки Ли), которые, в свою очередь, используются в механике Намбу, обобщающей обычную механику Гамильтона. Ряд математических утверждений эквивалентны определённым свойствам когомологий (малых размерностей) алгебр Ли. Например, утверждение о равенстве нулю 2-х когомологий в конечномерном модуле конечномерной алгебры Ли над полем характеристики 0 (лемма Уайтхеда) эквивалентно теореме Леви–Мальцева о разложении конечномерной алгебры Ли с абелевым радикалом. Многие результаты о когомологиях (супер)алгебр Ли были получены в работах Д.В. Алексеевского, Р. Ботта, В.М. Бухштабера, И.М. Гельфанда, В. Гийемина, А. Гишарде, К. Годбийона, В.Г. Каца, Д.А. Лейтеса, Ж.-П. Серра, Б.Л. Фейгина, Д.Б. Фукса, Г. Хохшильда, В. ван Эста и других. Когомологии некоторых типов алгебр Ли, например, конечномерных редуктивных (в частности, полупростых) алгебр Ли над полями характеристики 0 полностью исследованы. Однако когомологические свойства многих важных в приложениях алгебр, например, (супер)алгебр Ли векторных полей, практически не изучены. Для таких алгебр конкретные вычисления могут дать ценную информацию для анализа и обобщений. Вычисление когомологий является задачей с высокой вычислительной сложностью, поскольку обычно пространства коцепей, фигурирующие в этих вычислениях, имеют очень высокую размерность. Поэтому эффективность алгоритмов и реализации имеет для этой задачи критическое значение.

Систематическое изучение асимптотических свойств спектров эллиптических дифференциальных операторов на многообразиях началось с работ Г. Вейля и Ж. Адамара и было продолжено в работах таких учёных, как М. Атья, Р. Ботт, Б. ДеВитт, И. Зингер, М. Кац, Дж. Милнор, С. Минакшисундарам, В. Патоди и др. Согласно предложенному Адамаром подходу, асимптотические свойства спектров можно изучать, вычисляя коэффициенты коротковременно́го разложения ядра оператора теплопроводности, построенного из рассматриваемого эллиптического оператора. Эти коэффициенты, являясь асимптотическими спектральными инвариантами, в которых закодирована информация об операторе и о геометрических и топологических свойствах многообразия, на котором этот оператор действует, находят многочисленные приложения в математике (спектральная геометрия и топология, индексы операторов на многообразиях, спектральная ζ-функция) и физике (вычисление функциональных интегралов в квантовой теории поля, эффективное действие, функции Грина и аномалии, высокотемпературное разложение для функции распределения в статистической физике). В последние годы многие результаты относительно вычислений и приложений этих коэффициентов были получены в работах И.Г. Аврамиди, П. Амстердамского, А.О. Барвинского, Н. Барта, А.А. Белькова, А. Беркина, Н. Биррелла, Т. Брэнсона, Г.А. Вилковысского, П. Гилки, П. Грайнера, В.П. Гусынина, П. Дэвиса, Э. Дэвиса, С. Кристенсена, А.В. Ланёва, Д. О'Коннора, М. Маккина, Ю.Н. Обухова, П.И. Пронина, Р. Сили, К.В. Степаньянца, С. Фуллинга, А. Шаале, Р. Шимминга и других. Потребности современной физики, в частности, квантовой гравитации и калибровочных теорий поля, приводят к необходимости изучать спектральные свойства эллиптических операторов всё более сложных типов, например, операторов высших порядков и так называемых "неминимальных" операторов (операторов с нескалярным символом), действующих на многообразиях, оснащённых более сложными геометрическими структурами (например, на многообразиях Римана–Картана). Вычисления в подобных случаях существенно усложняются и, по-видимому, использование методов компьютерной алгебры становится неизбежным.

Целью диссертационной работы является разработка алгоритмов работы с некоммутативными и неассоциативными алгебраическими структурами, создание на базе этих алгоритмов компьютерных программ и решение с помощью этих программ некоторых прикладных задач в следующих областях:

- вычисление конечно представленных алгебр и супералгебр Ли;
- вычисление когомологий алгебр и супералгебр Ли;

- вычисление асимптотических спектральных инвариантов эллиптических дифференциальных операторов на компактных замкнутых многообразиях Римана–Картана при наличии калибровочных полей.

Научная новизна и практическая ценность.

В диссертации предложены оригинальные алгоритмы работы с некоммутативными и неассоциативными алгебрами и методы реализации этих алгоритмов в виде эффективных компьютерных программ. Эти программы, реализованные на языке *C*, были использованы для решения ряда актуальных прикладных задач.

Для исследования конечно представленных алгебр и супералгебр Ли была разработана программа *FPLSA*. Эта программа, насколько нам известно, в настоящее время является наиболее эффективной среди программ, предназначенных для аналогичных целей. Программа *FPLSA* была включена, в частности, в международную систему компьютерной алгебры *GAP*, ориентированную на решение задач вычислительной теории групп и комбинаторной алгебры[1]. Однако, ввиду ограничений системы *GAP* (не имеющей средств работы с супералгебрами, бесконечномерными алгебрами и соотношениями, содержащими неопределённые параметры), автономный вариант программы позволяет решать задачи более широкого класса. В частности, были решены некоторые задачи, возникающие при исследовании гомотопических и гомологических свойств нётеровых колец, являющихся факторкольцами колец полиномов по квадратичным идеалам, и задачи, связанные с изучением алгебры наблюдаемых в теории Намбу–Гото замкнутых бозонных струн.

Для вычисления когомологий алгебр и супералгебр Ли была разработана программа *LieCohomology*. Эта программа позволяет вычислять когомологические классы в тривиальном, присоединённом и коприсоединённом модулях для конечномерных и бесконечномерных градуированных (супер)алгебр Ли. С помощью этой программы были впервые вычислены некоторые когомологические классы для ряда (супер)алгебр Ли, в частности, для гамильтоновых и пуассоновских (супер)алгебр Ли полиномиальных векторных полей и их нечётных аналогов – супералгебр Ли с антискобкой, играющих важную роль в методе квантования

[1]Систему *GAP* можно получить по ftp из серверов на трех континентах, адреса которых можно найти на интернетовской странице http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/.

Баталина–Вилковысского. Попутно была обнаружена, не упоминавшаяся в известной нам литературе, особенность строения колец когомологий в тривиальном модуле для (супер)алгебр, содержащих центр. В случае нечётного центра это приводит к тому, что кольцо когомологий вместе с каждым нетривиальным когомологическим классом содержит бесконечное множество его следствий.

Для вычисления асимптотических спектральных инвариантов (коэффициентов ДеВитта–Сили–Гилки) эллиптических дифференциальных операторов, действующих на замкнутых многообразиях, оснащённых метрикой, кривизной, кручением (многообразия Римана–Картана) и калибровочной связностью, была разработана программа *DWSGCoeff*. С помощью этой программы впервые были вычислены многие коэффициенты ДВСГ для ряда дифференциальных операторов второго и четвёртого порядков, как минимальных, так и неминимальных. Наиболее существенным новым результатом здесь является вычисление четвёртого коэффициента E_4 (или a_2 в часто встречающихся в литературе альтернативных обозначениях) для важного в квантовой гравитации и теории калибровочных полей неминимального оператора второго порядка.

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Разработаны конструктивные математические методы и основанные на них эффективные алгоритмы для компьютерного анализа некоммутативных и неассоциативных математических объектов, широко используемых в современных моделях теоретической и математической физики:
   - конечно представленных алгебр и супералгебр Ли,
   - когомологий алгебр и супералгебр Ли,
   - векторных и тензорных полей на искривлённых многообразиях.
2. Для вышеперечисленных объектов разработаны структуры данных, наиболее адекватно отражающие их математические свойства. Созданные алгоритмы и структуры реализованы на языке программирования *C* в виде программ:
   - *FPLSA* – программа построения полной системы соотношений (базиса Грёбнера) для конечно представленных алгебр и супералгебр Ли над различными полями коэффициентов. Эта про-

грамма позволяет, в частности, строить базисные элементы алгебр, таблицу их коммутаторов (структурные константы) и ряды Гильберта.
   - *LieCohomology* – программа вычисления когомологий конечномерных и бесконечномерных градуированных алгебр и супералгебр Ли. Алгоритм реализован для тривиальных, присоединенных и коприсоединённых модулей.
   - *DWSGCoeff* – программа, реализующая полностью ковариантный и универсальный алгоритм вычисления асимптотических спектральных инвариантов (коэффициентов разложения ядра оператора теплопроводности) дифференциальных операторов на искривленных многообразиях с кручением и произвольными калибровочными полями.
3. С помощью трёх перечисленных выше программ решены, соответственно, следующие задачи:
   - Вычислены до пятого порядка включительно базисные элементы алгебры наблюдаемых в теории Намбу–Гото замкнутых бозонных струн и построен ряд супералгебр Ли, возникающих при исследовании нётеровых колец, определяемых как факторкольца полиномов от четырех и пяти переменных по квадратичным идеалам.
   - Впервые построены высшие когомологии для ряда супералгебр Ли векторных полей со скобкой Пуассона и её нечётного аналога – скобки Бютен (антискобки или нечетной скобки Пуассона). С помощью прямых компьютерных вычислений обнаружено (а затем и доказано), что наличие центра в алгебре или супералгебре Ли, в случае тривиального модуля, позволяет строить новые когомологические классы исходя из известных. В частности, при наличии нечетного центрального элемента, любой когомологический класс порождает бесконечный набор классов, являющихся кратными исходному.
   - Впервые вычислены, не известные ранее, коэффициенты разложения для неминимальных операторов, операторов высших порядков и для многообразий с кручением. Среди них наиболее важным для калибровочных моделей теории поля и кванто-

вой гравитации является точное аналитическое выражение коэффициента E_4 для неминимального оператора на искривлённых многообразиях.

Апробация работы. Различные составные части диссертационной работы докладывались на конференциях: Новые компьютерные технологии в физических исследованиях AIHENP'93 (Обераммергау, Германия, 1993), AIHENP'95 (Пиза, Италия, 1995), AIHENP'96 (Лозанна, Швейцария, 1996); MEDICIS тематическое совещание по лиевским вычислениям (Марсель–Лумини, Франция, 1994); Симметрии в нелинейной математической физике (Киев, Украина, 1995); Новые компьютерные технологии в системах управления (Переславль–Залесский, Россия, 1995, 1996); Вычислительное моделирование и вычисления в физике (Дубна, Россия, 1996); Международное рабочее совещание по квантовой теории поля при влиянии внешних условий (Лейпциг, Германия, 1998); Международная алгебраическая конференция посвящённая 90-летию А. Г. Куроша (Москва, Россия, 1998); Международное рабочее совещание по компьютерной алгебре в научных вычислениях CASC'98 (Санкт-Петербург, Россия, 1998), CASC'99 (Мюнхен, Германия, 1999), CASC'2000 (Самарканд–Бухара, Узбекистан, 2000); Семинар по лазерной физике и фотонике (Саратов, Россия, 1999); Международная конференция по приложениям компьютерной алгебры IMACS ACA 2000 (Санкт-Петербург, Россия, 2000); Современные тенденции в вычислительной физике (Дубна, Россия, 1998, 2000); Международный коллоквиум Теоретико–групповые методы в физике GROUP-23 (Дубна, Россия, 2000); на семинарах по компьютерной алгебре при ВМК МГУ, на семинарах в Институте математики стокгольмского университета (Стокгольм, Швеция), в Техническом университете г. Эйндховена (Эйндховен, Голландия), в Высшей технической школе Рейна–Вестфалии RWTH (Аахен, Германия); на совместных семинарах ЛВТА ОИЯИ и ВМК МГУ, на семинарах по вычислительной математике в ЛВТА ОИЯИ.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 27 работ.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, пяти приложений и списка литературы. Объём диссертации — 222 страницы. Список литературы включает 187 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** даётся обоснование актуальности темы и сформулированы основные цели работы. Изложено краткое содержание диссертации с описанием основных её результатов.

Каждая из последующих глав предваряется кратким обзором по рассматриваемым проблемам и содержанию главы.

Глава 1 посвящена реализации математических объектов, рассматриваемых в последующих главах, и алгоритмов работы с ними. Мы описываем необходимые нам в дальнейшем математические объекты и операции с ними параллельно с их компьютерной реализацией. Некоторые наиболее важные алгоритмы приведены непосредственно в виде C кодов. В Главе 1 рассматриваются также общие приёмы, используемые нами при разработке компьютерно–алгебраических программ.

Раздел 1.1 посвящен структурам данных и вопросам программирования. В **подразделе 1.1.1** описываются связные списки с узлами переменной структуры. Такие списки являются основной структурой данных, используемой нами при реализации различных модулей, линейных пространств и алгебр: алгебры и супералгебры Ли, грассмановы алгебры, пространства и алгебры коцепей, векторные поля, тензорные выражения и т. д. Особенностью задач некоммутативной компьютерной алгебры является большое разнообразие входных данных для задач одного и того же типа. Например, поля коэффициентов могут иметь совершенно различную природу и, соответственно, реализацию, элементы алгебр могут быть снабжены индексными выражениями или нет, векторные поля могут быть представлены в виде дифференциальных операторов или в виде производящих функций, тензоры, в зависимости от задачи, могут иметь различное максимальное число индексов и т. д. Стандартные конструкции языков C и $C{+}{+}$ такие как, структуры, объединения и классы не в состоянии обеспечить достаточную гибкость и эффективность для представления подобных разнообразных данных. Например, если узел содержит массивы, то либо размеры этих массивов должны быть фиксированы до компиляции программы (недостаток гибкости) либо память для массивов должна выделяться динамически всякий раз, когда формируется данный узел (недостаток эффективности). Для того, чтобы обеспечить одновременно гибкость и эффективность внутреннего представления математических структур мы используем связные списки с узлами переменной структуры. Такие узлы могут содержать различное количество информационных полей разных типов и размеров, в зависимости от потребностей задачи, что позволяет "не иметь ничего лишнего" при решении любой конкретной задачи. В **подразделе 1.1.1** приведены конкретные примеры реализации такого рода списков и коды функций для работы с ними. В частности, в качестве примера, приведены тексты функций, реализующих основные операции (сложение и умножение) в алгебре полиномов. На самом деле, эти функции, возможно, с незначительными модификациями, пригодны для реализации операций в произвольной алгебре, не обязательно коммутативной или ассоциативной.

При реализации рассматриваемых нами задач мы широко используем таблицы разных типов. В **подразделе 1.1.2** мы приводим алгоритмы работы с наиболее часто употребляемым нами типом таблиц.

В **подразделе 1.1.3** описываются общие черты всех программ, с помощью которых решались задачи последующих глав. Рассматриваются также некоторые общие принципы, которых мы придерживались при разработке этих программ и интерфейса.

В **разделе 1.2** Главы 1 мы рассматриваем особенности реализации и основные алгоритмы работы с некоторыми конкретными типами пространств и алгебр, такими как: алгебры и супералгебры Ли (**подраздел 1.2.1**); алгебры Грассмана (**подраздел 1.2.2**); пространства и алгебры коцепей (**подраздел 1.2.3**); (супер)алгебры векторных полей (они являются частным случаем (супер)алгебр Ли, но имеют свои особенности при реализации) (**подраздел 1.2.4**); тензорные алгебры (**подраздел 1.2.5**).

Все модули, линейные пространства и алгебры, рассматриваемые нами, определены над коммутативными кольцами и полями, элементы которых представляют собой скалярные коэффициенты в этих структурах. Поскольку наиболее часто используемые в прикладных задачах поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ не являются конструктивными и, следовательно, не допускают компьютерной реализации, мы рассматриваем разнообразные конструктивные системы скалярных коэффициентов: кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, его комплексное расширение $\mathbb{Q}(i)$ и другие алгебраические расширения, конечные поля $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Z}_{p^n}$ (т. е., поля Галуа $\mathrm{GF}(p)$ и $\mathrm{GF}(p^n)$), поле частных кольца полиномов от скалярных параметров (т.е., рациональные функции) и т. д. В задаче, которой посвящена Глава 4, скалярные коэффициенты на одном из этапов вычислений представляют собой выражения, составленные из гипергеометрических и гамма-функций. В **разделе 1.3** Главы 1, состоящем из трёх подразделов, параллельно с описанием всех этих математических конструкций приводятся их реализации в виде компьютерных структур данных и основные алгоритмы работы с этими структурами.

<u>Глава 2</u> посвящена построению конечно представленных алгебр и супералгебр Ли, т. е., алгебр, задаваемых конечным числом генераторов и определяющих соотношений:

$$A = \langle X | R \rangle$$

где $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – конечное множество генераторов (некоторых элементов алгебры) и $R = \{r_1 = 0, \ldots, r_m = 0\}$ – множество определяющих соотношений (r_i – лиевские полиномы от генераторов). Основная задача – построение наиболее общей (супер)алгебры Ли, удовлетворяющей системе соотношений R, т. е., необходимо получить её базис и таблицу коммутаторов (в качестве побочного продукта вычисляются также другие характеристики алгебры, например, ряд Гильберта).

В **разделе 2.1** приведены основные определения, относящиеся к конечно представленным алгебрам и супералгебрам Ли. В частности, поскольку конечно представленную (супер)алгебру Ли можно рассматривать как факторалгебру свободной (супер)алгебры Ли по идеалу, порождаемому определяющими соотношениями R, с самого начала целесообразно работать в базисе свободной алгебры (при этом тождество Якоби и (анти)симметричность учитываются при вычислениях автоматически). Поэтому в разделе 2.1 описаны базисы свободных (супер)алгебр Ли. Известно, что базис свободной алгебры Ли образуют генераторы x_i и лиевские мономы вида $[u, v]$ и $[[u, v], w]$, причем подмономы u, v и w, сами являясь базисными элементами, должны удовлетворять неравенствам $u > v$ и $v \leq w$ во введённом некоторым образом упорядочении между мономами. В случае супералгебры Ли к базисным элементам необходимо еще добавить лиевские квадраты *нечетных* базисных элементов указанного выше вида. В случае полей ненулевой характеристики могут возникнуть дополнительные особенности, например, в полях характеристики 2 базисными элементами также являются элементы вида $q(u)$, где u – нечетный базисный элемент, а $q(\cdot)$ – так называемый *квадратичный оператор*. Разный выбор упорядочения мономов приводит к различным типам базисов свободных (супер)алгебр Ли, наиболее употребимыми из которых являются базисы Линдона–Ширшова и базисы Холла. Упорядочение Линдона–Ширшова – это просто лексикографическое упорядочение последовательностей генераторов, входящих в моном (при этом лиевские скобки игнорируются). Упорядочение Холла основано на введении градуировки, при которой каждому генератору приписан некоторый вес, являющийся *положительным* целым числом, при этом вес монома равен сумме весов, входящих в него генераторов. Мономы вначале сравниваются по весам, а в случае равных весов, вначале сравниваются (по Холлу) левые подмономы в лиевской паре, а затем – правые.

Задача построения (супер)алгебры Ли по соотношениям R сводится к построению *полной системы соотношений* $\tilde{R}$, называемой также *каноническим базисом* или *базисом Грёбнера*. В **разделе 2.2** мы описываем разработанный нами алгоритм построения канонического базиса для алгебр и супералгебр Ли. Стратегия алгоритма состоит в том, чтобы при вычислениях все время поддерживать минимально необходимое количество лиевских мономов и соотношений между ними, стараясь получить как можно больше следствий исходных соотношений наиболее экономным способом. После чего, небольшое количество недостающих следствий можно достроить уже прямым вычислением, основанным на полном переборе оставшихся возможностей.

Упомянутую выше стратегию алгоритма мы реализовали используя в качестве исходного базиса базис Холла, а в качестве средства порождения новых соотношений – лиевское умножение соотношений на *отдельные* генераторы, т. е., если имеется соотношение $r = 0$ – мы добавляем равенство $[r, x_i] = 0$ к системе соотношений. Как оказалось, в случае базиса Холла, такой процесс приводит к построению практически всех необходимых соотношений и только иногда требуется небольшая работа для доведения их до полной системы соотношений $\tilde{R}$. Заметим, что в случае базиса Линдона–Ширшова эффективность такого подхода значительно ниже – по грубой экспериментальной оценке генерируется порядка половины всех необходимых соотношений. Заметим также, что все лиевские операции выполняются по модулю вычисленных к данному моменту соотношений, что позволяет поддерживать таблицы лиевских мономов и соотношений настолько компактными насколько это возможно.

Входными данными для алгоритма являются:

- Упорядоченное множество генераторов $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ с предписанными четностями $\alpha_i \in \mathbb{Z}_2$ и положительными целыми весами w_i (= 1 по умолчанию).

- Множество скалярных параметров $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$, если они присутствуют в исходных соотношениях.
- Множество определяющих соотношений $R = \{r_1, r_2, \ldots\}$.
- Целое число, ограничивающее вес генерируемых соотношений.

Результатом работы алгоритма являются следующие выходные данные:

- Взаимно редуцированное множество следствий исходных соотношений $\tilde{R} = \{\tilde{r}_1, \ldots\}$.
- Список $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ элементов (супер)алгебры Ли, линейно независимых по модулю $\tilde{R}$.
- Таблица коммутаторов $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$.
- Таблица скалярных полиномов от p_i, рассматриваемых как ненулевые во время вычислений. Частные значения p_i, обнуляющие эти полиномы, могут вызвать ветвление вычислений и, следовательно, изменение структуры алгебры.
- Размерности однородных компонент в форме полинома Гильберта для конечномерных алгебр или начальной части ряда Гильберта – для (потенциально) бесконечномерных.

В **разделе 2.3** описана программа *FPLSA*, реализующая алгоритм. В **подразделе 2.3.1** достаточно подробно (поскольку программы, описанные в других главах, имеют аналогичный интерфейс) рассматривается работа с программой. В **подразделе 2.3.2** приведён пример инициирующего файла, содержащего установки, необходимые для работы программы.

Раздел 2.4 содержит примеры решения некоторых задач с помощью программы *FPLSA*.

В **подразделе 2.4.1** рассматривается конечно представленная супералгебра Ли с параметрами. (Эта супералгебра возникает при изучении суперсимметричного обобщения уравнения Кортевега–де Фриза.) При наличии в соотношениях неопределённых параметров возникает задача классификации неизоморфных алгебр, возникающих при различных значениях параметров. Мы демонстрируем каким образом такая классификационная задача может быть решена с помощью программы *FPLSA*.

В **подразделе 2.4.2** приводится пример вычислений для случая, когда исходные соотношения определяют бесконечномерную алгебру.

В **подразделе 2.4.3** на примере одной из супер態алгебр, возникающих при исследовании гомотопических и гомологических свойств нётеровых колец, демонстрируется вычисление с помощью программы ряда Гильберта бесконечномерной супералгебры Ли. Упомянутые нётеровы кольца представляют собой факторкольца колец полиномов от четырёх и пяти переменных, по идеалам, задаваемым квадратичными формами. Изучением таких колец занимается группа исследователей под руководством проф. Я.-Э. Руса из Стокгольма. Учитывая классификацию К. Жордана квадратичных форм, проблема сводится к большому, но конечному набору задач о построении (вычислении рядов Гильберта) конечно представленных супералгебр Ли, задаваемых квадратичными соотношениями.

В **подразделе 2.4.4** кратко описываются результаты вычислений алгебры инвариантных зарядов в теории Намбу–Гото замкнутых бозонных струн. Изучением этой алгебры занимается группа исследователей из университета г. Фрайбурга под руководством проф. К. Полмайера. Это пример вычислительно трудной задачи и нам удалось вычислить базисные элементы алгебры до веса пять включительно.

В **подразделе 2.4.5** приведена вычислительная статистика применения программы к соотношениям Серра для всех простых алгебр Ли до десятого ранга включительно. Наиболее трудным оказалось вычисление исключительной алгебры E_8. Результирующий базис Грёбнера содержит 23074 соотношений, включающих лиевские мономы до 58-й степени. Вычисление заняло более 3-х минут на компьютере AT/486.

Глава 3 посвящена вычислениям когомологий алгебр и супералгебр Ли.

Когомологическая теория возникает всякий раз, когда удается построить *коцепной комплекс*, т. е., последовательность линейных пространств C^k, связанных линейными отображениями d^k

$$0 \to C^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{k-2}} C^{k-1} \xrightarrow{d^{k-1}} C^k \xrightarrow{d^k} C^{k+1} \xrightarrow{d^{k+1}} \cdots.$$

Элементы пространств C^k называются *коцепями* (или k-коцепями), а отображение d^k – *дифференциалом*. Характеристическим свойством дифференциала является равенство нулю его квадрата или, более строго, $d^k \circ d^{k-1} = 0$. Коцепи, отображаемые дифференциалом в нуль, называются *коциклами*, т. е., коциклы образуют пространство

$$Z^k = \mathrm{Ker}\; d^k = \{C^k \mid dC^k = 0\}.$$

Коцепи, являющиеся дифференциалами других коцепей, называются *кограницами*, т. е., кограницы образуют пространство

$$B^k = \mathrm{Im}\; d^{k-1} = \{C^k \mid C^k = dC^{k-1}\}.$$

Очевидно, что любая кограница является коциклом.

Классы эквивалентности по модулю кограниц нетривиальных (т. е., не являющихся кограницами) коциклов образуют *когомологию*. Иными словами, когомология – это факторпространство

$$H^k = Z^k/B^k,$$

часто называемое k-й группой когомологий (поскольку H^k – абелева группа).

Теории когомологий (и гомологий) разработаны для различных разделов математики, зачастую не связанных друг с другом очевидным образом. Эти теории отличаются друг от друга устройством пространства коцепей и дифференциала, по-разному определяемых для различных математических структур. Во всех случаях когомологии описывают наиболее фундаментальные ("топологические") свойства этих подлежащих математических структур. Когомологии (супер)алгебр Ли являются частным случаем приведённой выше конструкции. В данном случае коцепи выражаются в терминах элементов (супер)алгебры Ли и модуля, на котором эта (супер)алгебра действует, а дифференциал определяется с помощью скобки Ли и действия алгебры в модуле.

Во введении к Главе 3 рассматриваются некоторые области приложений когомологий (супер)алгебр Ли в физике и математике.

В **разделе 3.1** сформулированы основные определения и свойства когомологий, используемые в дальнейшем. Одно из этих свойств, касающееся строения кольца когомологий в тривиальном модуле для алгебр, содержащих центр, фактически было обнаружено с помощью компьютерной программы, описываемой в данной главе.

Раздел 3.2 содержит список определений основных (супер)алгебр Ли векторных полей, среди которых: общая и специальная векторные супералгебры, супералгебры Пуассона и Гамильтона, контактная супералгебра, общая и специальная супералгебры Бютен (супералгебры антискобок или нечетных скобок Пуассона), нечетная и специальная нечетная контактные алгебры. Эти (супер)алгебры имеют важное прикладное значение, поэтому программа "знает" их определения и может автоматически построить соответствующие базисные элементы и таблицу коммутаторов.

В **разделе 3.3** описаны алгоритм и программа для вычисления когомологий. Эта программа, описанная в **подразделе 3.3.1**, предназначена для вычисления когомологий в тривиальном, присоединенном и коприсоединённом модулях как для конечномерных так и для бесконечномерных градуированных (супер)алгебр Ли. Программа выполняет следующие основные шаги:

- *Считывание входной информации.*
- *Построение базиса алгебры.*
- *Построение таблицы коммутаторов* алгебры, если эта таблица не была считана из входного файла.
- *Построение в общем виде* выражений для кограниц и определяющих уравнений для коциклов.
- *Переход к конкретной градуировке* в выражениях общего вида.
- *Вычисление факторпространства* $H^k(A; M) = Z^k/B^k$.
- *Вывод на печать нетривиальных коциклов.*

В **подразделе 3.3.2** мы иллюстрируем работу программы на примере вычисления пятых когомологий для одной из супералгебр с антискобкой для векторных полей в суперразмерности (2|2) (это один из новых результатов).

В **разделе 3.4** приведены некоторые результаты вычислений. В **подразделе 3.4.1** описаны результаты для супералгебр Ли векторных полей со скобкой Пуассона (на которой основана классическая процедура квантования), а в **подразделе 3.4.2** — для супералгебр Ли с антискобкой (основа формализма Баталина–Вилковысского для квантования

калибровочных теорий). Практически все приведённые результаты являются новыми. Исключением является лишь вычисление когомологий специальной гамильтоновой супералгебры SH(0|4), результаты которого мы приводим в качестве интересного иллюстративного примера. Соответствующие вычисления впервые были выполнены Д. Лейтесом и Д. Фуксом и дополнены А. Шаповаловым, мы лишь проверили отсутствие новых когомологических классов до степени шесть включительно (ранее вычисления были проведены до 4-й степени). Некоторые из результатов ввиду громоздкости приведены в приложениях.

<u>Глава 4</u> посвящена вычислению асимптотических спектральных инвариантов эллиптических псевдодифференциальных операторов на замкнутых многообразиях, снабженных такими структурами как метрика, кривизна, кручение и калибровочные поля. В этой задаче, являющейся математической формой общефизической задачи определения внутренней структуры объекта по спектру излучений и волн вокруг него, скомбинированы методы алгебры, дифференциальной геометрии и анализа.

Постановка задачи следующая. Рассмотрим расслоение $\pi : E \to M$, в котором база M является замкнутым компактным n-мерным многообразием Римана–Картана, т. е., на нем задана метрика $g_{\mu\nu}$ и линейная (или аффинная), не обязательно симметричная, связность, согласованная с этой метрикой $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$. Сечения расслоения включают помимо касательных, кокасательных и тензорных полей также и произвольные векторные поля на которых задана связность с некоторой структурной (калибровочной) группой. Уровень общности, с которым мы рассматриваем задачу, позволяет не конкретизировать ни размерность n многообразия, ни калибровочную группу — в наших, полностью ковариантных, вычислениях эта группа будет проявляться только в виде кривизны соответствующей связности (тензор этой кривизны мы обозначаем символом $W_{\mu\nu}$). Аналогичным образом связность Римана–Картана в ковариантных вычислениях проявляется в виде тензоров кривизны $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ и кручения $T^{\alpha}{}_{\mu\nu}$. Рассмотрим эллиптический (псевдо)дифференциальный оператор A, действующий на гладких сечениях расслоения E. Ставится вопрос: какую информацию о расслоении E и многообразии M можно получить, изучая спектр оператора A?

Подходы, основанные на изучении *асимптотических* свойств спектров, делают задачу доступной для вычислительных методов. Один из основных и наиболее конструктивных подходов был предложен Ж. Адамаром в 1923 году. Адамар предложил вместо спектральной задачи для больших значений спектрального параметра изучать коротковременные асимптотики ядра *оператора теплопроводности* $A-\frac{\partial}{\partial t}$, построенного из эллиптического оператора A порядка $2r$ добавлением дифференцирования по дополнительно вводимой "временно́й" переменной t:

$$\langle x|e^{-tA}|x\rangle \sim \sum_{m\geq 0} \mathrm{E_m(x|A)t^{\frac{m-n}{2r}}}, \qquad \mathrm{t}\to +0.$$

Коэффициенты этого разложения E_m являются спектральными инвариантами оператора A и в них закодирована информация о топологических и геометрических свойствах многообразия M, в частности, интеграл от коэффициента E_n по n-мерному многообразию M равен индексу Атьи–Зингера оператора A на этом многообразии. Эти коэффициенты, которые мы называем коэффициентами ДеВитта–Сили–Гилки (ДВСГ), находят также многочисленные применения в физике, например, при вычислениях методом перевала (или методом Лапласа) повсеместно возникающих в квантовых теориях поля и статистике функциональных интегралов (эти вычисления приводят к необходимости регуляризации функциональных детерминантов с помощью *спектральной* ζ-функции, вычисляемой, в свою очередь, с помощью приведенного выше разложения).

В то время как классическая спектральная геометрия занята, главным образом, изучением оператора Лапласа на римановых многообразиях, потребности современной физики приводят к необходимости изучать аналогичные задачи для операторов более общего вида, действующих на многообразиях более общих, чем римановы. В **разделе 4.1** рассматриваются наиболее часто встречающиеся в современных физических теориях эллиптические операторы. Типичными примерами таких операторов являются:

$$\left.\begin{array}{l} -\Box+X, \\ \Box^2+V^{\mu\nu}D_\mu D_\nu+N^\mu D_\mu+X \end{array}\right\} \quad \text{– \textit{минимальные} операторы,}$$

$$-g^{\mu\nu}\Box+aD^\mu D^\nu+X^{\mu\nu} \qquad \text{– \textit{неминимальный} оператор.}$$

Здесь $\Box=g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu$, D_μ – ковариантная производная, включающая связности Римана–Картана и калибровочную, $X, V^{\mu\nu}, N^\mu, X^{\mu\nu}$ – матричнозначные тензорные поля, a – скалярный параметр.

В разделе 4.1 приведены также наиболее важные примеры приложений коэффициентов ДВСГ в спектральной геометрии и топологии, квантовой теории поля, статистической физике и др.

В **разделе 4.2** описан применяемый нами алгоритм вычисления коэффициентов ДВСГ. Для минимальных операторов второго порядка широко применяется алгоритм Б. ДеВитта. В.П. Гусынин предложил более универсальный подход, основанный на ковариантном обобщении псевдодифференциального исчисления, разработанном Г. Видомом. Этот подход является наиболее универсальным из существующих в настоящее время, позволяя проводить вычисления с большинством типов операторов, встречающихся в современных теориях поля (в частности, с неминимальными операторами и операторами высших порядков). В соответствии с этим подходом мы разработали алгоритм и реализовали его на языке *C*. Подход основан на формуле Данфорда, выражающей оператор $\exp(-tA)$ через интеграл от резольвенты оператора A

$$e^{-tA}=\int_C \frac{id\lambda}{2\pi}e^{-t\lambda}(A-\lambda)^{-\mathrm{I}},$$

где интегрирование ведется против часовой стрелки по контуру, охватывающему спектр оператора A. Затем мы используем стандартное для псевдодифференциального исчисления представление для резольвенты

$$G(x,x',\lambda)\equiv\langle x|\frac{1}{A-\lambda}|x'\rangle=\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n\sqrt{g(x')}}e^{il(x,x',k)}\sigma(x,x',k;\lambda).$$

Здесь $l(x,x',k)$ – фазовая функция, k – волновой вектор, $\sigma(x,x',k;\lambda)$ – амплитуда, удовлетворяющая уравнению

$$(A(x,D_\mu+iD_\mu l)-\lambda)\sigma(x,x',k;\lambda)=I(x,x'),$$

в котором $I(x,x')$ – функция параллельного переноса (транспортная функция). Разлагая амплитуду по степеням однородности волнового вектора, решая рекуррентную систему уравнений для коэффициентов разложения, переходя в этих коэффициентах к пределам совпадения аргументов x и x' и интегрируя эти предельные выражения мы получаем искомые спектральные инварианты E_m. Интегрирование, в большинстве случаев, может быть выполнено в замкнутом виде и его результат выражается в терминах гамма и гипергеометрических функций, которые для типичных операторов A (для которых параметры гипергеометрических функций принимают целые и полуцелые значения) могут быть сведены к элементарным. Основная трудность в вычислениях является следствием ковариантного обобщения фазовой и транспортной функций в подходе Видома: эти функции определяются через соотношения, постулирующие равенство нулю пределов совпадения их высших симметризованных ковариантных производных. Симметризованная ковариантная производная m-го порядка представляет собой сумму из $m!$ несимметризованных производных, содержащих все возможные перестановки дифференцирований. Чтобы получить из условия равенства нулю такой производной необходимые для вычислений *несимметризованные* производные нужно привести все $m!$ слагаемых с помощью тождества Риччи к одному порядку. При этом возникают очень громоздкие тензорные полиномы из тензоров метрики, кривизны (Римана–Картана и калибровочной), кручения и их ковариантных производных. Затем, после подстановки этих полиномов в выражения для амплитуды, к этим тензорам добавляются еще и тензорные поля (и их производные), входящие в оператор A. Из-за наличия различных симметрий и тензорных тождеств (Бьянки, циклическое и т. д.), которые могут взаимодействовать между собой довольно сложным образом, возникает задача приведения полученных выражений к каноническому, желательно как можно более компактному виду. Это очень сложная задача, которая к настоящему времени решена только в некоторых простейших случаях (причём сложность полученных алгоритмов оказывается довольно высокой). Мы используем эвристический подход, который дает хорошие результаты, по крайней мере для порядков спектральных инвариантов, достижимых на современных компьютерах.

Раздел 4.3 посвящён реализация алгоритма, которая представляет собой текст на языке *C* длиной примерно 11000 строк. Этот текст содержит около 250 различного рода функций для действий с тензорами и скалярами. Из этих функций можно скомпилировать две программы *CoLim* и *DWSGCoeff*.

Программа *CoLim* вычисляет пределы совпадения несимметризованных производных функций $l(x,x',k)$ и $I(x,x')$ и записывает их на диск. Однажды вычисленные, эти пределы совпадения используются затем при вычислениях для различных операторов A.

Основная программа *DWSGCoeff* вычисляет коэффициенты E_m, выполняя последовательно следующие шаги:

1. Считывание входной информации (оператор, порядок m, и т.д.).
2. Вычисление множества асимптотических операторов для построения рекуррентных соотношений.
3. Вычисление σ_m с помощью рекуррентных соотношений.

4. Взятие предела совпадений $[\sigma_m]$.
5. Интегрирование $[\sigma_m]$ для получения коэффициента E_m.
6. Подстановка тензорных выражений для $[D_{a_1}\dots D_{a_k}l]$ и $[D_{a_1}\dots D_{a_k}I]$ в E_m.
7. Сведение гипергеометрических функций (возникающих при интегрировании на Шаге 5) к элементарным в скалярных коэффициентах в случае неминимальных операторов или операторов высших порядков, построение и упрощение линейных зависимостей между этими коэффициентами.
8. Вывод для E_m (и его следа в неминимальном случае).

Квадратные скобки в приведённой выше последовательности шагов означают взятие предела совпадения.

Раздел 4.4 содержит описание наиболее важных новых результатов, полученных с помощью программы *DWSGCoeff*. Часть этих результатов приведена явно либо в тексте раздела 4.4, либо в Приложениях. Наиболее важным из приведённых результатов является полное вычисление коэффициента E_4 для неминимального оператора на многообразии без кручения. Помимо этого были вычислены некоторые инварианты для операторов высших порядков и для многообразий с кручением (включение которого, существенно затрудняет вычисления).

В **Приложениях** приведены явные выражения для вычисленных базисных элементов некоторых когомологий и асимптотических спектральных инвариантов некоторых эллиптических операторов:

- В разделе П.1 приложений приведены базисные базисные элементы когомологий в тривиальном модуле для двумерных алгебр Гамильтона и Пуассона.
- В разделе П.2 приведены порождающие базисные элементы когомологий для нечётного аналога двумерных алгебр Гамильтона и Пуассона – специальной супералгебры Бютен SB(1).
- В разделе П.3 приведены коэффициенты ДВСГ E_2 и E_4 для оператора $-\Box + B_i D^i + X$ на многообразии с кручением.
- В разделе П.4 приведен коэффициент E_2 для неминимального оператора $-g^{\mu\nu}\Box + aD^\mu D^\nu + X^{\mu\nu}$ на многообразии с кручением.

- В разделе П.5 приведен коэффициент E_4 для неминимального оператора на многообразии без кручения.

В **Заключении** сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Н.М. Глазунов, Ф.Г. Карпинский, В.В. Корняк. Решение некоторых задач алгебры, анализа и математической физики с помощью систем аналитических вычислений на ЭВМ // Кибернетика. – 1991. – No 2. – С. 23-29.
2. V.P. Gusynin, V.V. Kornyak. Symbolic Computation of the Heat Kernel Expansion on Curved Manifolds // Preprint ITP–93–59E, Bogolyubov Inst. of Theor. Phys. – 1993. – Kiev. – P. 8.
3. V.P. Gusynin, V.V. Kornyak. Symbolic Computation of DeWitt–Seeley–Gilkey Coefficients on Curved Manifolds // Journ. Symb. Computation. – 1994. – V. 17, No. 3. – P. 283-294.
4. V.P. Gusynin, V.V. Kornyak. Symbolic Computation of the Heat Kernel Expansion on Curved Manifolds // New Computing Techniques in Physics Research III, eds K.-H. Beck and D.Perret-Gallix. – 1994. – Singapore: World Scientific. – P. 615-621.
5. V.P. Gerdt, V.V. Kornyak. Construction of Finitely Presented Lie Algebras and Superalgebras // Preprint JINR E5-95-353. – 1995. – Dubna. – P. 12.
6. V.P. Gerdt, V.V. Kornyak. Lie Algebras and Superalgebras Defined by a Finite Number of Relations: Computer Analysis // Journ. Nonlinear Math. Phys. – 1995. – V. 2. – P. 367–373.
7. N.M. Glazunov, V.V. Kornyak, E. Cheremnykh, F. Diaba. Algebra, Interval Analysis and Some Nonlinear Differential Equations // Proc. IMACS 14 World Congress, Atlanta, USA. – 1995. – V. 1. – P. 89-92.
8. V.P. Gerdt, V.V. Kornyak. Construction of Finitely Presented Lie Algebras and Superalgebras // Proceedings of 5th Rhine Workshop on Computer Algebra. 1-3.04.1996, Saint-Louis, France, eds A. Carriere and L.R. Oudin. – P. 18.1-18.11.

9. V.P. Gerdt, V.V. Kornyak. Computer Analysis of Finitely Presented Lie Superalgebras // New Computing Techniques in Physics Research IV, eds B. Denby and D.Perret-Gallix. – 1996. – Singapore: World Scientific. – P. 289-294.
10. V.P. Gerdt, V.V. Kornyak. Construction of Finitely Presented Lie Algebras and Superalgebras // Journal of Symbolic Computation. – 1996. – V. 21, No 3. – P. 337–349.
11. V.P. Gerdt, V.V. Kornyak. A Program for Constructing the Complete Set of Relations, Basis Elements and their Commutator Table for Finitely Presented Lie Algebras and Superalgebras // Preprint JINR E11-96-103. – 1996. – Dubna. – P. 26.
12. V.P. Gerdt, V.V. Kornyak. An Implementation in C of an Algorithm for Construction of Finitely Presented Lie Superalgebras // Computer Sci. Journ. of Moldova. – 1996. – V. 4, No 3(12). – P. 399-427.
13. V.P. Gusynin, V.V. Kornyak. Heat Kernel Coefficient E_4 for Nonminimal Operator in Curved Space // Preprint JINR E2-96-448. – 1996. – Dubna. – P. 9.
14. В.П. Гердт, В.В. Корняк. Программа для построения полной системы соотношений, базисных элементов и таблицы их коммутаторов конечно представленных алгебр и супералгебр Ли // Программирование. – 1997. – Т. 3. – С. 58-71.
15. В.П. Гусынин, В.В. Корняк. Полное вычисление коэффициента Де-Витта–Сили–Гилки E_4 для неминимального оператора на искривленных многообразиях // Препринт ОИЯИ Р2-97-88, 1997. – 22 с.; arXiv: math.SC/9909145.
16. V.P. Gerdt, V.V. Kornyak. An algorithm for analysis of the structure of finitely presented Lie algebras // Discrete Math. and Theor. Computer Sci. – 1997. – V. 1. – 217-228.
17. V.P. Gerdt, V.V. Kornyak. A program for constructing finitely presented Lie algebras and superalgebras // Nucl. Instr. & Meth. in Phys. Res. A. – 1997. – V. 389. – P. 370-373.

18. V.P. Gusynin, V.V. Kornyak. Heat Kernel Coefficient E_4 for Nonminimal Operator in Curved Space // Nuclear Instr. and Methods in Phys. Res. – 1997. – V. A389. – P. 365-369.

19. V.V. Kornyak. A program for computing cohomology of Lie superalgebras of vector fields
// Preprint JINR E5-98-380. – 1998. – Dubna. – 8 p.

20. В.П. Гусынин, В.В. Корняк. Коэффициенты ДеВитта–Сили–Гилки для неминимальных операторов в искривленном пространстве
// Фундаментальная и прикладная математика. – 1999. – Т. 5, No. 3. – С. 649-674.

21. В.В. Корняк. Программа для вычисления когомологий супералгебр Ли векторных полей //Записки научных семинаров ПОМИ. С.-Петербург. – 1999. – Т. 258. – С. 148-160.

22. V.P. Gerdt, V.V. Kornyak, M. Berth, G. Czichowski. Construction of involutive monomial sets for different involutive divisions // Computer Algebra in Scientific Computing. – Springer, 1999. – P. 147-157; arXiv: math.SC/9912031.

23. V.V. Kornyak. Computation of cohomology of Lie superalgebras of Hamiltonian vector fields
// Preprint JINR E5-99-95. – 1999. – Dubna. – 11 p.

24. V.V. Kornyak. Cohomology of Lie Superalgebras of Hamiltonian Vector Fields: Computer Analysis // Computer Algebra in Scientific Computing. – Springer, 1999. – P. 241-249; arXiv: math.SC/9906046.

25. V.V. Kornyak. Computation of Cohomology of Lie Superalgebras of Vector Fields // International Journal of Modern Physics C. – 2000. – V. 11, No. 2. – P. 397-414; arXiv: math.SC/0002210.

26. V.V. Kornyak. Heat Invariant E_2 for Nonminimal Operator on Manifolds with Torsion // Computer Algebra in Scientific Computing. – Springer, 2000. – P. 273-284; arXiv: math.SC/0004085.

27. В.В. Корняк. Вычисление когомологий супералгебр Ли: алгоритм и реализация // Программирование. – 2001. – Т. 3. – С. 46-50.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 июля 2001 года.