ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

5 - 11643

ХОРОМСКИЙ
Борис Николаевич

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ НЬЮТОНОВСКОГО ТИПА В НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ФИЗИКИ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1978

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор Евгений Петрович Жидков

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник Василий Яковлевич Арсенин

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Виктор Яковлевич Галкин

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

Автореферат разослан "13" сентября 1978 г.

Защита диссертации состоится "19" октября 1978 г. в "11" часов на заседании Ученого совета Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ, г.Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук Т.П.Пузынина

Целью работы является, с одной стороны, исследование общих вопросов сходимости непрерывных и дискретных процессов ньютоновского типа, с другой – обоснование возможности применения этих методов к решению трёх конкретных физических задач:

I) нелинейная краевая задача для аналитических функций, связанная с уравнением Лоу;

2) обратная задача рассеяния;

3) краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения, описывающего движение заряженных частиц в ускорителе.

При этом, как правило, мы стремимся довести предложенные алгоритмы до конкретных численных расчётов /2-4/.

Научная новизна

Впервые проведено аналитическое исследование сходимости ньютоновских процессов в конкретных задачах I)-3), доказано существование нового класса решений задачи I), а также получены общие, близкие к необходимым и достаточным, условия локальной сходимости ряда непрерывных и дискретных процессов типа Ньютона. Получены условия нелокальной сходимости непрерывного аналога метода Ньютона.

Практическая ценность

I) Результаты диссертации позволяют выяснить общую структуру решений уравнения Лоу, а также указывают ту дополнительную физическую информацию, которая определяет единственное решение этого уравнения. Составленная программа позволяет находить численно решения для достаточно общего вида матриц кроссинг-симметрии и функций обрезания.

2) Численные расчёты ОЗР с помощью метода Ньютона /I8,5/ показали эффективность этого метода в обратной задаче и слабую зависимость сходимости процесса от начального приближения.

3) Численные расчёты рассмотренной /6/ краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения /I7/ были использованы при проектировании устройства вывода из серпуховского ускорителя.

4) Представленные в диссертации общие результаты о сходимости ньютоновских методов дали возможность получить менее ограничительные, по сравнению с ранее известными, условия сходимости некоторых итерационных процессов /I,7-9/, а также были использованы при построении сходящихся итераций в одной задаче теории ядра /I9-2I/.

Апробация работы

Работы, положенные в основу диссертации, докладывались на Международном совещании по программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1977), а также на семинарах ОИЯИ.

Публикации

По материалам диссертации опубликовано I0 работ, в том числе в ДАН СССР, ЭЧАЯ, трудах совещаний и в сообщениях ОИЯИ.

Объём работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и содержит I48 страниц машинописного текста, включая I рисунок и 3 таблицы, список литературы, насчитывающий I06 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении даётся краткое изложение основных результатов диссертации по главам, а также приводится обзор литературы по рассмотренным здесь вопросам приближённого решения нелинейных уравнений вида:

$$P(x)=0\ ;\ P: X \to Y, \quad (X, Y - B\text{- пространства}). \qquad (I)$$

Решение уравнения (I) обозначим через x^*.

Большинство итерационных методов, использующих для вычисления $n+1$-го приближения n-е приближение, имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \tau_n \Psi(x_n), \quad 0 < \tau_n \le 1, \qquad (2)$$

где $\Psi: X \to X$ и $\Psi(x^*)=0$.

Процессу типа (2) можно поставить в соответствие его непрерывный аналог

$$dx(t,x_0)/dt = -\Psi(x(t,x_0)); \quad x(0)=x_0, \ 0 \le t < \infty, \qquad (3)$$

где $x(t,x_0)$ – функция со значением в X. Решение x^* получается как предел при $t \to \infty$ решения задачи Коши (3):

$$\lim_{t\to\infty} \| x^* - x(t,x_0) \| = 0.$$

В наших рассмотрениях центральным будет непрерывный аналог метода Ньютона (НАМН) /II/

$$\frac{dx}{dt} = -P'(x)^{-1} P(x), \quad x(0)=x_0, \qquad (4)$$

для траекторий которого выполнен закон сохранения

$$P(x(t,x_0)) = P(x_0)\exp(-t), \quad 0 \le t < \infty,$$

упрощающий доказательство существования решений уравнения (I).

В главе I получены условия существования нелокальных начальных приближений x_0 для НАМН (4) и обоснована сходимость (от указанного начального приближения) этого процесса при решении краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения, описывающего движение заряженных частиц в магнитном поле ускорителя /6/.

В § I доказана теорема о нелокальной сходимости НАМН (4), из которой как частный случай получаются результаты из /II/. Получены условия сходимости процесса (4) от любого начального приближения (нумерация теорем соответствует диссертации):

Теорема I.2. Пусть $P_r''(x)$ ($P_r''(x)$ – вторая производная Гато) ограничена в окрестности каждой точки $x \in X$ и выполнено условие

$$Bh(P'(x)h) \geq \{L(\|x\|)\}^{-1} \|h\|^2, \quad (x, h \in X),$$

где B – линейный непрерывный оператор, действующий из X на все Y^*, а непрерывная положительная функция $L(u)$ удовлетворяет условию

$$\int_A^\infty du / L(u) = \infty .$$

Тогда уравнение $P(x) = y$ имеет единственное решение в X для $\forall y \in Y$ и процесс Ньютона (4) сходится к нему при всяком $x_0 \in X$.

Здесь существование решения получается как следствие сходимости процесса Ньютона и, таким образом, даётся новое доказательство известных условий существования решений уравнения (I).

Далее получено обобщение этой теоремы, а также обоснованы нелокальные условия сходимости НАМН в случае вырожденного $P'(x)$.

Если учесть известную связь между поведением непрерывных (3) и соответствующих дискретных процессов (2), то изложенные в § I условия сходимости можно перенести на дискретный процесс Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \tau P'(x_n)^{-1} P(x_n), \quad x_0 \in X, \quad 0 < \tau \leq 1 \qquad (5)$$

при малом параметре τ. Это сделано в главе II, где рассматривается обратная задача теории рассеяния. Там же применяются и некоторые результаты § I.

В § 2 обоснован и обобщен существующий численный алгоритм приближённого решения обобщённой краевой задачи, определяемой нелинейным дифференциальным уравнением $(0 \leq x \leq 9\delta)$

$$y'' - 2y'^2 (y+R)^{-1} - (y+R) + \frac{1}{R}(R+y)^2 F(y) = 0, \quad R > 0 \qquad (6)$$

и одним из следующих краевых условий

(I) $y(0) = a, \ y(\delta) = b$;

(II) $y(0) = a$, в точках $x_k = k\delta$, $k = 1, \dots, 8$ функция $y(x)$ терпит разрыв с условием

$$y_-'(k\delta) = y_+'(k\delta); \quad y_+(k\delta) = y_-(k\delta) + \varepsilon y_-'(k\delta), \quad \varepsilon > 0,$$

а $y(9\delta) = b$.

Эта краевая задача описывает движение заряженных частиц в медианной плоскости ускорителя /I7/. Доказано существование решения этой задачи для физически допустимых значений параметров: $R = 1.9 \cdot 10^4$, $\delta = \pi/60$, $\varepsilon \leq 242/R$. Существование решения на отрезке $[0, \delta]$ получается как следствие нелокальной сходимости НАМН от указанного начального приближения. При помощи решения на $[0, \delta]$ строится решение задачи (6), (II) на отрезке $[0, 9\delta]$. Для обоснования сходимости процесса Ньютона к этому решению получена оценка собственных значений краевой задачи

$$z'' + B(x) z = \lambda z \quad ; \quad z(0) = 0, \quad z(9\delta) = 0$$

с периодическим потенциалом $B(x)$, что свелось к отысканию корней нелинейного алгебраического уравнения. Эта задача решена численно на ЭВМ методом Ньютона.

Численные расчёты краевой задачи (6) (II) проводились в /I7/ и были использованы при проектировании устройства вывода из серпуховского ускорителя.

<u>В главе</u> II, на основе /5, I0/, изучена возможность применения НАМН в обратной задаче рассеяния для краевой задачи

$$y'' + (k^2 - v(x)) y = 0, \quad 0 \leq x < \infty; \quad y(0) = 0 \qquad (7)$$

с потенциалом $v(x)$, принадлежащим вещественному B-пространству X с нормой

$$\|v\|_X = \int_0^\infty x |v(x)| dx < \infty . \qquad (8)$$

Пусть $\varphi(v; x, k)$ – решение уравнения (7), нормированное условием $\varphi'(v; 0, k) = 1$. Определим, следуя /22/, по функции рассеяния $S(v;k)$ задачи (7) (эта функция задаёт асимптотику $\varphi(v;x,k) \approx A(k) \cdot \sin(kx - \eta(k)), \ x \to \infty; \ \eta(k) = \frac{i}{2} \ln S(v;k)$) отображение в пространстве X (8):

$$v \mapsto \Psi(v) = 4F'(v; 2x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad \left({}' = \frac{d}{dx}\right), \qquad (9)$$

где /23/

$$F(v; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - S(v;k)\} e^{ikx} dk . \qquad (9')$$

Согласно /23/, Ψ отображает X в X. При этом обратная задача для потенциалов $v(x) \in X$ таких, что задача (7) не имеет собственных чисел и виртуального уровня, сводится к операторному уравнению

$$Q(v) \equiv \Psi(v) - f_* = 0; \quad (f_* = 4F_{S_*}'(2x), \quad Q: X \to X), \qquad (I0)$$

где заданная функция $S_*(k)$ удовлетворяет свойствам

$$S_*^{-1}(k) = S_*(-k) = \bar{S}_*(k), \ -\infty < k < \infty; \ \ln S_*(+0) = \ln S_*(+\infty);$$

$$S_*(k) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F_S(x) \exp(-ikx) dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F_S(x)| dx < \infty .$$

Уравнение (I0) решается при помощи НАМН (4).

В § 1 доказано, что потенциалы $v(x) \in X$ без собственных чисел и виртуального уровня могут быть восстановлены при помощи НАМН (4) из существенно нелокальной области начальных приближений:

<u>Теорема 2.2</u>. Пусть по элементу $f_* \in \Omega^+_{F'}$ построена область

$$H_* = \{ f_0 \in \Omega^+_{F'} \,/\, \alpha f_* + (1-\alpha) f_0 \in \Omega^+_{F'} ,\ 0 \le \alpha \le 1 \}.$$

Тогда при любом $v_0 \in G_* = \Psi^{-1}(H_*)$ решение $v(t)$ задачи Коши

$$\frac{d}{dt} v(x,t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \{ S_*(k) - S(v;k) \} f^2(v;x,k)\, dk , \quad \underset{0 \le t < \infty}{v(x,0) = v_0(x)}, \tag{11}$$

содержится в Ω_v и $\lim v(t) = v_* = \Psi^{-1}(f_*)$

Здесь $f(v;x,k)$ – решение Йоста: $\lim\limits_{x \to \infty} f(v;x,k)\, e^{-ikx} = 1$, а $\Omega_v = \{ v \in X \,/\, f(v;0,k) \neq 0,\ \mathrm{Im}\, k \ge 0 \}$; $\Omega^+_{F'} = \Psi(\Omega_v)$.

Отметим, что процесс Ньютона (11) допускает сравнительно простую реализацию на ЭВМ /18,5/.

На основе теоремы 2.2 в § 2 показана слабая зависимость от начального приближения $v_0(x)$ сходимости дискретного ньютоновского процесса

$$v_{n+1}(x) = v_n(x) + \tau_n \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \{ S_*(k) - S(v_n;k) \} f^2(v_n;x,k)\, dk , \quad 0 < \tau_n \le 1 .$$

Результаты § 1,2 получаются с использованием следующих дифференциальных свойств оператора $\Psi(v)$:

<u>Лемма 2.6</u> В любой ограниченной области $G \subset X$ функции $\Psi(v)$ и $\Psi'(v)^{-1}$ удовлетворяют условию Липшица:

$$\| \Psi(v_1) - \Psi(v_2) \| \le L_1 \| v_1 - v_2 \| ,\quad L_1 = O(\mu) ;\quad v_1, v_2 \in G$$

$$\| \Psi'(v_1)^{-1} - \Psi'(v_2)^{-1} \| \le L_2 \| v_1 - v_2 \| ,\quad L_2 = O(\mu) ;\quad v_1, v_2 \in G ,$$

где $\mu = \sup\limits_{v \in G} \| v \|$.

Более точные оценки области сходимости НАМН получены для неотрицательных потенциалов $v(x) \ge 0$.

В § 3 получены сходной с /23/ техникой оценки для разностей $K(v_1;x,t) - K(v_2;x,t)$ и $L(v_1;x,t) - L(v_2;x,t)$ ядер операторов преобразования

$$\varphi(v;x,k) = \frac{\sin kx}{k} + \int_0^x K(v;x,t) \frac{\sin kt}{k}\, dt ,$$

$$f(v;x,k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} L(v;x,t)\, e^{ikt}\, dt ,\quad \mathrm{Im}\, k \ge 0 .$$

Эти оценки использовались в § 1,2. Из них, в частности, следует, что оператор $\Psi^{-1}(f)$, определённый в области $\Omega^+_{F'}$, непрерывен и, следовательно, задача нахождения решения $v_* \in \Omega_v$ уравнения (10) по элементу $f_* \in \Omega^+_{F'}$ является корректно поставленной.

Некорректность ОЗР состоит в самом построении f_* по заданной функции $S_*(k)$ формулами (9), (10), так как операции дифференцирования и преобразования Фурье являются неустойчивыми /24/.

В численных экспериментах /18,5/ обнаружена сходимость НАМН от достаточно произвольного начального приближения $v_0(x)$.

В то время как в первых двух главах рассматривались нелокально сходящиеся процессы Ньютона, <u>в главе III</u> изучается, на основе /1,7–9/, поведение приближённых процессов в малой окрестности искомого решения.

Легко видеть, что локальная сходимость процесса (3) эквивалентна асимптотической устойчивости стационарного решения x^*. Это даёт возможность применить результаты теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в B-пространстве. Согласно /12/, поведение процесса (3) в окрестности x^* определяется линеаризованным уравнением

$$dy/dt = -\Psi'(x^*)\, y ,\qquad y(0) = y_0 \in X . \tag{12}$$

Если $\mathrm{Re}\, \sigma(\Psi'(x^*)) > \nu > 0$ ($\sigma(A)$ – спектр оператора A), то для $\forall \varepsilon > 0$ существует окрестность решения x^*, в которой выполнена оценка

$$\| x(t,x_0) - x^* \| \le \| x_0 - x^* \| M \exp[(\varepsilon - \nu) t] ,\quad M < \infty .$$

Отсюда следует /1,8/, что для непрерывного аналога модифицированного метода Ньютона

$$\dot{x}(t) = -P'(x_0)^{-1} P(x) ,\qquad x(0) = \bar{x} \tag{13}$$

имеет место следующее условие сходимости

$$\| P'(x) - P'(y) \| \le k \| x - y \| ;\quad \| x^* - x_0 \| \le \left(\| P'(x_0)^{-1} \| \cdot k \right)^{-1} .$$

Для процесса установления общего вида

$$\dot{x}(t) = -\alpha(x) P(x) ,\quad x(0) = x_0 ;\quad \alpha : X \to \mathbb{R} \tag{14}$$

получено условие сходимости $\mathrm{Re}\, \sigma(\alpha(x^*) P'(x^*)) > \nu > 0$, которое менее ограничительно по сравнению с хорошо известным условием для случая гильбертова пространства $(\alpha \equiv 1)$

$$(P'(x) y, y) \ge c \| y \|^2 ,\quad c > 0 .$$

На основе условий неустойчивости /12/ стационарного решения x^* показано, что без дополнительных ограничений перечисленные выше условия сходимости неулучшаемы.

В § 2 исследованы двухшаговые итерационные процессы

$$x_{n+1} = A x_n + B x_{n-1} + \Phi(x_n, x_{n-1}) ;\quad \Phi : X \times X \to X , \tag{15}$$

где A и B – линейные ограниченные операторы в B-пространстве X. Показано, что поведение процесса (15) определяется его линейной частью:

<u>Теорема 3.1</u> Пусть для элементов итерационной последовательности

$$y_{n+1} = A y_n + B y_{n-1} ;\quad y_0, y_1 \in X \tag{16}$$

выполнена оценка $\|y_n\| \le M\varepsilon^n(\|y_0\|+\|y_1\|);\ M>0,\ 0<\varepsilon<1$. Тогда для $\forall \varepsilon_1, M_1$ таких, что $1>\varepsilon_1>\varepsilon$, $M_1>M$ существуют достаточно малые $q_1, q_2>0$ такие, что если $\Phi(x,y)$ подчиняется условию $\|\Phi(x,y)\| \le q_1\|x\| + q_2\|y\|$ с этими q_1, q_2, то для элементов x_n (I5) в малой окрестности нуля выполнена оценка

$$\|x_n\| \le C\varepsilon_1^n \max(\|x_0\|,\|x_1\|)\ ;\quad (C \le 2M_1 \max(1, 2M_1)).$$

Отметим, что в /25/ другим способом доказано близкое утверждение о локальной сходимости процесса

$$x_{n+1} = F(x_n)\ ;\quad (x^* = F(x^*)).$$

Далее аналогично случаю непрерывных процессов в § 2 рассмотрен новый вопрос об отсутствии сходимости итераций (I5). Вводится понятие неустойчивости итерационной последовательности (I5). Доказано, что процесс (I5) неустойчив, если неустойчива его линейная часть (I6), а $\Phi(x,y)$ удовлетворяет условию

$$\|\Phi(x,y)\| \le q_1\|x\|^{1+p} + q_2\|y\|^{1+p},\quad p>0.$$

Это утверждение помогает при выяснении близости необходимых и достаточных условий сходимости итерационных процессов.

Полученное с помощью теоремы 3.I условие

$$Re\,\sigma[P'(x^*)] \ge M > 0\ ,\quad \tau < 2M\,\|P'(x^*)\|^{-2}$$

сходимости метода простой итерации

$$x_{n+1} = x_n - \tau P(x_n)\ ;\quad 0<\tau\le 1$$

менее ограничительно по сравнению с известными условиями из работ И.Петерсена и М.М.Вайнберга.

Отметим, что в /I9,20/ результаты о сходимости процесса (I5) использовались при построении сходящегося двухшагового итерационного процесса приближенного решения задачи на собственные значения для интегродифференциального уравнения Шредингера в задачах теории ядра.

В § 3, следуя /I,9/, рассматриваем поведение траекторий НАМН (4) и метода наискорейшего спуска

$$\dot{x}(t) = -P'(x)^* P(x)\ ,\quad x(0)=x_0 \qquad (I7)$$

в окрестности вырожденного решения x^*, для которого оператор $P'(x^*)$ не имеет ограниченного обратного, однако в каждой точке некоторой окрестности x^* существует ограниченный обратный $P'(x)^{-1}$. Получен результат, аналогичный случаю невырожденного решения: при естественном условии, необходимом лишь для осуществимости указанных процессов, траектории (4), (I7) сходятся к вырожденному решению x^*. Приведены также оценки скорости сходимости и длины кривой для НАМН (4).

Далее рассмотрены регуляризованные процессы Ньютона

$$\dot{x}(t) = -(P'(x)+\omega E)^{-1}P(x)\ ,\quad x(0)=x_0 \qquad (I8)$$

и Гаусса-Ньютона

$$\dot{x}(t) = -(P'(x)P'(x)^* + \omega E)^{-1}P'(x)^* P(x),\quad x(0)=x_0 \qquad (I9)$$

в случае плохо обусловленного оператора $P'(x)$. Оценивается область изменения параметра $\omega>0$, в которой процессы (I8), (I9) сходятся быстрее, чем методы установления (I4) $(\alpha\equiv 1)$ и наискорейшего спуска(I7) соответственно. Этот вопрос интересен в связи с тем, что процессы (I4), (I7) также являются регуляризующими для НАМН и метода Гаусса-Ньютона (I9) (при $\omega=0$), поскольку в них нет обращения "почти" вырожденного оператора $P'(x)$.

В конце § 3 процесс (I9) рассмотрен в предположении $\|P''(x)\| \le T$ на вторую производную $P(x)$.

<u>В главе IУ</u> при помощи НАМН (4) проводится качественное исследование нелинейной краевой задачи для аналитических функций типа Римана-Гильберта, соответствующей уравнению Лоу /I3,I4/

$$h^\alpha(\omega) = \frac{\lambda_\alpha}{\omega} + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty d\omega' f(\omega')\left(\frac{|h^\alpha(\omega')|^2}{\omega'-\omega} + \sum_{\beta=1}^N \frac{A_{\alpha\beta}|h^\beta(\omega')|^2}{\omega'+\omega}\right) \qquad (20)$$

(здесь $\alpha = 1,\dots,N$, а числа λ_α и матрица $A=\{A_{\alpha\beta}\}$ – заданы) и построен численный алгоритм её решения.

Известно, что эта краевая задача /I5/ сводится к отысканию аналитической внутри единичной окружности C_0 вектор-функции $h^\alpha(z)$, $\alpha=1,\dots,N$ $(\omega = 2z/1+z^2)$ со следующими свойствами:

I) $h^\alpha(z)$ непрерывна на C_0 и имеет простой полюс при $z=0$ с заданным вычетом $Res\, h^\alpha(0) = \lambda_\alpha$, $\lambda_\alpha = -\sum_{\beta=1}^N A_{\alpha\beta}\lambda_\beta$.

II) $\overline{h^\alpha}(z) = h^\alpha(\bar z)$ – условие действительности (черта означает операцию сопряжения).

Ш) $Jm\, h^\alpha(z) = F(\varphi)|h^\alpha(z)|^2;\ z=e^{i\varphi},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ – условие унитарности. Функция $F(\varphi)$ – задана.

IУ) $h^\alpha(-z) = \sum_{\beta=1}^N A_{\alpha\beta}h^\beta(z)$ – условие кроссинг-симметрии. Матрица A удовлетворяет условию $A^2=E$.

В § I, следуя /2,3/, рассматриваем класс малых по модулю решений задачи I-IУ. Условия сходимости НАМН с начальным приближением $h_0^\alpha(z)=0$ позволяют доказать существование решений с малой нормой и малыми вычетами λ_α. Эти результаты близки к соответствующим из работы /I6/, где применялась теорема Шаудера для уравнений в форме (20). Нами получена более широкая, по сравнению с /I6/, область единственности таких решений. В Лемме 4.I выводится общая формула для суммарного индекса æ производной Фреше краевой задачи I–IУ в точке $H_0=U_0+iV_0$; $U_0=(u_1^0,\dots,u_N^0)$, $V_0=(v_1^0,\dots,v_N^0)$:

$$\varkappa=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\Delta_0^{\pi/2}\arg\left[2F(\varphi)\left(u_j^0(z)+iv_j^0(z)\right)-i\right];\quad z=e^{i\varphi}. \qquad (21)$$

Здесь $\Delta_0^{\pi/2}$ означает приращение соответствующего аргумента на $[0,\pi/2]$.

Из этой формулы, в частности, следует, что малые по модулю решения имеют нулевой индекс.

В § 2 построено семейство больших по модулю решений, имеющих произвольный неотрицательный суммарный индекс производной Фреше. При этом в случае отличного от нуля индекса производная Фреше не имеет ограниченного обратного оператора, а решение зависит от конечного числа произвольных параметров. Показано, что индекс равен разности чисел полюсов функций $h^\alpha(z)$ на первом и втором листе римановой поверхности этого решения. При помощи этого утверждения доказана /3/

<u>Теорема 4.2</u> Пусть векторы Λ_0, D_0 таковы, что число $\varepsilon=\|G_N(H_0,\Lambda_0,D_0)\|$, определённое для диагонального решения $H_0=U_0+iV_0$, удовлетворяет условию $2\varepsilon M^2L<1$. Тогда для матриц A таких, что $\sum_{\beta=1}^{N}A_{\alpha\beta}=1$, $\alpha=1,\dots,N$, задача I–IУ при дополнительном условии, фиксирующем положение m полюсов функции $H(z)=U+iV$ (либо $m/2$ полюсов вместе с их вычетами) вне круга C_0, имеет в шаре $\|V-V_0\|\le(1-\sqrt{2\varepsilon M^2L})(ML)^{-1}$ единственное решение, суммарный индекс производной Фреше для которого равен m. Это решение можно получить методом Ньютона (5) с начальным приближением, совпадающим с диагональным решением H_0.

Здесь вектор $H(z)=\{h^\alpha(z)\}$, а $H_0(z)$ – известное точное решение задачи I–IУ, для которого $h^\alpha(z)=h^\beta(z)$, $\alpha,\beta=1,\dots,N$; G_N – нелинейный оператор, соответствующий задаче I–IУ вместе с дополнительными условиями; $\|G_N''(H)\|=L$; $\|G_N'(H_0)^{-1}\|\le M$, а $D_0=H(z)-\Lambda_0/z\big|_{z=0}$.

Отметим, что малые по норме решения /I5/ получаются как частный случай.

В §.3 строится алгоритм и приводятся результаты численных расчётов для двухканального уравнения рассеяния Лоу. Аналогично /I5/, задача I–IУ заменяется бесконечной алгебраической системой для коэффициентов a_n^α ряда Лорана функции $h^\alpha(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n^\alpha z^n$:

$$a_\nu^\alpha=a_{-\nu}^\alpha+\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\nu,k)\sum_{m=-\infty}^{\infty}E_\nu^\alpha(a_m;a_{m+k});\quad \alpha=1,\dots,N;\quad \nu=1,2,\dots\infty, \qquad (22)$$

где коэффициенты $a_{-\nu}^\alpha$ считаются заданными, а

$$F(\nu,k)=1/\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\nu\varphi\cos k\varphi\, F(\varphi)\,d\varphi;\qquad F(\varphi)=f(1/\cos\varphi),$$

$$E_\nu^\alpha(a_m;a_{m+k})=a_m^\alpha a_{m+k}^\alpha+(-1)^\nu\sum_{\beta=1}^{N}A_{\alpha\beta}a_m^\beta a_{m+k}^\beta.$$

Система из K нелинейных уравнений, получающаяся из (22), если положить $a_\nu^\alpha=0$, $\nu>K$ для малых по модулю решений с высокой точностью рассчитана методом Ньютона для

$$F(\varphi)=1/2\sin 2\varphi;\quad A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

В случае отличного от нуля суммарного индекса конструкция доопределённого оператора G_N, предложенная в § 2, позволяет добавить к системе (22) такие дополнительные условия, что становится возможным применение ньютоновских процессов. Проведены расчёты решений с индексом, равным 8 при помощи метода (I7). Характерным здесь является медленное убывание коэффициентов a_ν^α, что осложняет вычисления.

Кроме этого, рассчитаны решения с двумя полюсами внутри C_0. Во всех случаях получено хорошее совпадение с точными решениями.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

I) Впервые применён непрерывный аналог метода Ньютона (4) для приближённого решения нелинейной краевой задачи для аналитических функций, соответствующей уравнению Лоу. Получена теорема существования и единственности малых по модулю решений при малых константах связи.

2) Обоснована сходимость процесса Ньютона к большим по модулю решениям, имеющим отличный от нуля суммарный индекс производной Фреше. Как следствие, доказано существование и получены условия единственности нового класса решений с произвольным неотрицательным индексом. При этом используется формула для суммарного индекса производной Фреше (2I), позволившая определить вид дополнительных условий, фиксирующих единственное решение.

3) Построен алгоритм для расчёта на ЭВМ решений указанного класса. Проведены численные расчёты двухканального уравнения рассеяния Лоу и получены с хорошей точностью как малые (индекс равен нулю), так и большие (индекс отличен от нуля) по модулю решения. Этот алгоритм позволяет рассчитывать решения с достаточно произвольными особенностями внутри единичного круга, что проиллюстрировано на примере решений с двумя полюсами при $|z|<1$.

4) Исследованы дифференциальные свойства нелинейного оператора обратной задачи рассеяния для радиального уравнения Шредингера

на полуоси в случае потенциалов без собственных чисел и виртуального уровня. Показано, что этот оператор, а также оператор, обратный производной Фреше, удовлетворяют условию Липшица. Получены некоторые оценки для разностей ядер операторов преобразования.

5) В результате получены нелокальные условия сходимости непрерывного аналога метода Ньютона к решению обратной задачи рассеяния и обоснована дискретная реализация этого процесса методом Эйлера.

6) Указан общий подход для исследования локальной сходимости непрерывных и двухшаговых дискретных процессов ньютоновского типа. Как следствие, доказаны новые условия сходимости для метода установления и непрерывного аналога модифицированного метода Ньютона, а также для дискретного варианта метода установления. Показано, что эти условия близки к неулучшаемым.

7) Получены новые результаты о стабилизации траекторий непрерывного аналога метода Ньютона и наискорейшего спуска из малой окрестности вырожденных решений, приведена оценка скорости сходимости. Оценивается область изменения регуляризующего параметра, в которой процессы Ньютона и Гаусса-Ньютона сходятся быстрее, чем метод установления и наискорейшего спуска.

8) Найдены существенно нелокальные области начальных приближений, обеспечивающих сходимость непрерывного аналога метода Ньютона к точному решению, в том числе обоснованы условия сходимости этого процесса от любого начального приближения.

9) Обоснован и обобщён существующий численный алгоритм приближенного решения краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения, описывающего движение заряженных частиц в ускорителе.

Как следствие сходимости метода Ньютона, доказано существование решения.

<u>Работы, положенные в основу диссертации</u>:

I. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. О локальной сходимости приближённых процессов решения операторных уравнений. ДАН СССР, т.23I, 5, 1976.

2. Жидков Е.П., Нгуен М., Недялков И.П., Хоромский Б.Н. Исследование одного класса решений уравнения Лоу, ч.I. Малые по модулю решения. ОИЯИ, Р5-II470, Дубна, 1978. (Направлено в ЖВМ и МФ).

3. Жидков Е.П., Нгуен М., Недялков И.П., Хоромский Б.Н. Исследование одного класса решений уравнения Лоу, ч.II. Большие по модулю решения. ОИЯИ, Р5-II47I, Дубна, 1978. (Направлено в ЖВМ и МФ).

4. Жидков Е.П., Недялков И.П., Хоромский Б.Н. Об одной нелинейной краевой задаче для аналитических функций, связанной с уравнениями типа Чу-Лоу. Тр.Совещания по программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, ДI0,II-II264, 1978.

5. Визнер Я., Жидков Е.П., Малышев Р.В., Лелек В., Хоромский Б.Н., Христов Е.Х., Улегла И. Итерационные методы решения обратной задачи теории рассеяния. ЭЧАЯ, т.9, вып.3, стр.7I0-769, I978.

6. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Некоторые нелокальные условия сходимости непрерывного аналога метода Ньютона. ОИЯИ, Р5-8244, Дубна, I974.

7. Жидков Е.П., Пузынин И.В., Хоромский Б.Н. Итерационные процессы решения некоторых нелинейных задач физики. Тр.Совещания по программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, ДI0,II-II264, 1978.

8. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-9598, Дубна, I976.

9. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. О непрерывных процессах ньютоновского типа в случае вырожденного решения. ОИЯИ, Р5-I0288, Дубна, I976.

I0. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Христов Е.Х. О непрерывном аналоге метода Ньютона в обратной задаче теории рассеяния. ОИЯИ, Р5-9980, Дубна, I976.

<u>Цитированные работы</u>:

II. Гавурин М.К. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных процессов. Изв.вузов, Математика, 5(6), стр.I8-3I, I958.

I2. Далецкий Ю.А., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. М., Наука, I970.

I3. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В., ЭЧАЯ, т.4, вып.I, стр.I27, I973.

I4. Журавлев В.И., Мещеряков В.А.. ЭЧАЯ, т.5, вып.I, стр.I74,I974.

I5. Nedelkov I.P. Phys. Rev., D6, p.2842, 1972.

I6. Warnock R.L. Phys. Rev. 170, p.1323, 1968; 174, p.2169, 1969.

17. Жидков Е.П., Рыльцева Т.В., Феоктистов Б.В. ЖВМ и МФ, т.10, № 5, 1970.

18. Жидков Е.П., Малышев Р.В., Христов Е.Х. ОИЯИ, Р5-9923, Дубна, 1976.

19. Гареев Ф.А., Гончаров С.А., Жидков Е.П., Пузынин И.В., Хоромский Б.Н., Ямалеев Р.М. Численное решение задач на собственные значения для интегродифференциальных уравнений в теории ядра. ЖВМ и МФ, 17, № 2, 1977;
ОИЯИ, Р4-8751, Дубна, 1975.

20. Жидков Е.П., Пузынин И.В., Хоромский Б.Н. Об одном итерационном процессе численного решения интегродифференциального уравнения Шредингера. ОИЯИ, Р5-9512, Дубна, 1976.

21. Гареев Ф.А., Гончаров С.А., Пузынин И.В., Ямалеев Р.М. ЯФ, 24, II, 1976, стр.938.

22. Жидков Е.П., Малышев Р.В., Христов Е.Х. ОИЯИ, Р5-9063, Дубна, 1975.

23. Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. Киев, Наукова Думка, 1972.

24. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1974.

25. Красносельский М.А. и др. Приближённое решение операторных уравнений. М., Наука, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 июня 1978 года.